Q1. Math–Analyse	APP0 (S1)	Dest. : Etudiants
31/05/05		Auteur : Ph. D.

APP sur les notions de limite, continuité et dérivée

Le jeu des deux fonctions

Premier acte : devinons-nous de quelles fonctions il s'agit ?

Fanny et Gaston jouent à des devinettes mathématiques. Chacun des deux acteurs pense à une *fonction* d'une variable réelle, à valeurs réelles ; il en donne des propriétés caractéristiques et demande à son interlocuteur d'identifier la fonction.

- *Fanny* : la fonction f est représentée par un *polynôme* ; elle prend la valeur 1 au point 1 et elle possède la propriété suivante. Si x est multiplié par deux alors $f(x)$ est multiplié par quatre. Quelle sera la réponse de Gaston ?
- *Gaston* : la fonction g est *continue* ; elle prend la valeur 1 au point 0 et elle satisfait aux deux conditions suivantes. (i) Si x est augmenté d'une unité alors $g(x)$ est multiplié par deux. (ii) Si x est multiplié par m alors $g(x)$ est élevé à la puissance m, et cela pour tout $m \in \mathbb{N}$. Quelle sera la réponse de Fanny ?

Deuxième acte : en quels points prennent-elles la même valeur ?

Nos duettistes aimeraient savoir si les fonctions f et g qu'ils ont définies peuvent avoir des valeurs égales en certains points.

- En esquissant le graphe des deux fonctions, vous devinez le *nombre de points* x en lesquels $f(x) = g(x)$. Quel est ce nombre ? Certains de ces points sont-ils évidents ?
- Comment démontrez-vous, de manière rigoureuse, (a) que les solutions devinées *existent* et (b) qu'il n'y en a *pas d'autre* ?

  Suggestion Pour la partie (b), appliquez le *théorème de Rolle.*

Troisième acte : comment calculer la solution négative ?

Vous avez prouvé l'existence et l'unicité d'un nombre réel négatif x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$. Les règles de l'arithmétique montrent que x_0 est irrationnel. Cependant, il existe des méthodes permettant de calculer x_0 avec une grande précision. Pour appliquer ces méthodes numériques, on doit disposer d'une “estimation décente” de la solution recherchée.

- Comment utilisez-vous les *formules de Taylor* pour calculer une approximation de x_0, en résolvant une équation du second degré ?

- On désire obtenir x_0, par approximations successives, selon la *méthode de Newton–Raphson*. Expliquons le principe de celle-ci. Il s'agit de résoudre une équation de la forme $h(x) = 0$, pour une certaine fonction h ayant de bonnes propriétés que nous ne précisons pas ici. Soit a_n la $n$ième approximation de la solution, et soit T_n la tangente à la courbe d'équation $y = h(x)$ au point d'abscisse a_n. La $(n+1)$ième approximation, a_{n+1}, est définie comme l'abscisse de l'intersection de T_n avec l'axe Ox. Comment calculez-vous a_{n+1} à partir de a_n ?

Quatrième acte : pourquoi n'y a-t-il qu'*une* réponse aux devinettes ?

Revenant au point de départ, on s'efforcera de prouver que les réponses données durant le premier acte sont les seules qui soient correctes. Bien entendu, on se basera sur les *hypothèses* qui figurent dans les descriptions présentées par Fanny et Gaston.

- Concernant la fonction f, comment utilisez-vous le fait qu'il s'agit d'un *polynôme* pour montrer que la réponse de Gaston — que vous avez devinée — est la seule possible ?

- Concernant la fonction g, un peu d'arithmétique permet de déterminer les valeurs $g(x)$ dans le cas où x est *rationnel*. Vous avez reconnu ces valeurs durant le premier acte. Cela étant, comment utilisez-vous le fait que g est *continue* pour montrer que la réponse de Fanny — que vous avez devinée — est la seule possible ?