La logique dans les nouveaux programmes pour le lycée

Zoé MESNIL

Laboratoire de Didactique André Revuz
IREM de Paris

zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr

Une vaste question : les professeurs de mathématiques enseignent-ils la logique ?
Si oui, comment ?
Si non, pourquoi ?

Un contexte particulier pour poser cette question concernant les professeurs de lycée : le nouveau programme de 2010 pour la classe de Seconde.

A quoi ça sert la logique pour faire des mathématiques ?

- la position de Descartes/Poincaré : c'est un outil de contrôle, mais l'important c'est l'intuition (guidée par le bon sens).
- la position logiciste de Leibniz/Frege/Russell : la logique c'est le fondement des mathématiques.
- une position moins extrême (je pense assez courante chez les mathématiciens universitaires) : on apprend naturellement le minimum de logique dont on a besoin pour faire des mathématiques en faisant des mathématiques.

Une réponse :
La logique est une branche des mathématiques qui modélise non pas les mathématiques mais ce que nous faisons quand nous faisons des mathématiques.

A l'Université :
compte-rendu d'une expérience d'enseignement d'un cours « Langage Mathématique » proposé en première année dans les parcours math, math-info, info et Mass (facultatif).

Objectif du cours : familiariser les étudiants avec le langage mathématique.

Des notions de base de logique : statut des variables, connecteurs, quantificateurs, les différents types de raisonnement
à partir de l'étude du langage mathématique.

Difficulté de passer d'exercices du type :

x est un nombre réel.
Montrer que *P(x)*

À

Montrer que pour tout *x* réel on a *P(x)*

Voire

Montrer que l'on a $\forall x \quad P(x)$

Des nouveautés dans le programme pour la classe de Seconde de 2010 :

Est-ce que ça va changer quelque chose ?

Un regard en arrière :
petit historique de l'enseignement de la logique au lycée depuis 1960.

Programmes de 1960

« C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles. »

Programmes de 2008

« Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme.»

Dans les programmes de Seconde

- **1960** : une entrée discrète dans les textes, une préparation sur le terrain
- **1969** : le programme des maths modernes : la logique, associée à la théorie des ensembles, comme base du langage mathématique propre à expliquer le monde
- **1981** : programme de la contre-réforme : la logique bannie
- **2001** : un retour timide
- **2010** : le tableau des objectifs

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Dans les manuels, des pages autour de la logique et des exercices estampillés.

Mais des présentations très différentes.

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

• Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :

– « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;

– « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :

– « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.

– « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

• On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».

Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)

« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)

La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q),** appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q),** appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Dans les exercices, prédominance des Vrai/faux.

Et des confusions sur les notions en jeu :

Par exemple, dire que la phrase « les solutions de $f(x)=1$ sont -3 ou 4 » est fausse montre une confusion entre un « ou » conjonction de coordination (c'est le cas ici) et un « ou » connecteur logique entre deux propositions.

Voire des erreurs :

Compléter la phrase :
« Il existe au moins un réel x tel que si x^2=36, alors … »
Pour obtenir :
a) une proposition vraie
b) une proposition fausse

Est-ce que les professeurs ont des connaissances en logique mathématique qui leurs permettent d'avoir de ce point de vue un regard critique sur ce qui est proposé dans les manuels ?

Dans le bilan du stage « initiation à la logique », 30 professeurs sur 35 se déclarent demandeurs d'une formation théorique en logique mathématique.

Dans le questionnaire, 28 professeurs sur 35 répondent que leurs connaissances leurs paraissent suffisantes pour atteindre les objectifs fixés par le programme.

La logique pour raisonner

La logique pour s'exprimer

Logique et langage

- la logique étudie des langages formels, par exemple le langage des prédicats que nous utilisons rarement dans sa version complètement formelle mais qui sert de référence par exemple si l'on veut analyser la structure d'une proposition.
- En 1970 : présentation d'un « nouveau » langage *vs* En 2010 : précisions sur les règles d'utilisation du langage courant en mathématiques.

Logique et raisonnement

- La logique étudie des systèmes de déductions (par exemple la déduction naturelle) mais je fais l'hypothèse que cette modélisation est beaucoup moins connue des mathématiciens (qui ont tous vu un symbole de quantificateur, mais ne savent pas tous ce qu'est le modus ponens, ou règle de détachement, ou règle d'élimination de l'implication).
- En 1970, les types de raisonnement étaient reliés à des règles de déduction, plus en 2010.

- Est-ce que pour les professeurs la logique mathématique fournit des outils pertinents pour remédier au constat récurrent de difficultés chez les élèves en matière d'expression et de raisonnement ?
- Si oui, ont-ils une formation suffisante en logique pour présenter ces outils ?
- Si oui, comment ces outils pour l'activité mathématique deviennent-ils objets d'enseignement ?

Des professeurs de collège, lycée, université, des logiciens, des didacticiens au travail dans le groupe Logique de l'IREM de Paris.

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/logique/

MERCI DE VOTRE ATTENTION