Une analyse de la complexité des tâches de manipulation des définitions: le cas de la topologie.

Stéphanie Bridoux
Université de Mons (Belgique)
LDAR, Université Paris Diderot

CIIU
L'enseignement de la logique au lycée et à l'université
31 mars 2012

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

$\rightarrow$ mieux comprendre ce constat d'échec (Bridoux,2005)

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

→ mieux comprendre ce constat d'échec (Bridoux,2005)
→ réfléchir à des pistes de remédiation

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

→ mieux comprendre ce constat d'échec (Bridoux,2005)
→ réfléchir à des pistes de remédiation
→ élaboration d'un dispositif didactique (Bridoux, 2011)

Plan

Plan

1. Diagnostic d'un enseignement de topologie
2. Élaboration d'un dispositif didactique
3. Apprentissages des étudiants
4. Conclusion

Contexte institutionnel

Enseignement et public visés

- Cours d'analyse mathématique : cours théorique magistral, travaux dirigés.
- Étudiants en première année d'université, filière mathématique.
- Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$: intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.
- Environ 15 heures (théorie et exercices).

Contexte institutionnel

Le point sur les connaissances des étudiants

LA TOPOLOGIE :

- Quand ? En mars.
- Après un enseignement sur :
  - les suites dans $\mathbb{R}$,
  - les notions de borne supérieure/inférieure, de maximum/minimum,
  - les normes sur $\mathbb{R}^n$,
  - les suites dans $\mathbb{R}^n$,
  - les notions de limite et de continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Contexte institutionnel

Contraintes institutionnelles

Objectifs en première année

- Manipulation du langage symbolique.
  ➙ nature des exercices proposés : utilisation des définitions.
- Accent sur la rédaction : citer les définitions et les résultats utilisés, détailler les calculs.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (1/2)

- $\operatorname{int} A = \{x \in A : \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A\}$
  $= \{x \in A : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ (x_n \to x) \implies \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A\}$
- $\operatorname{adh} A = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$
  $= \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\}$
- A est ouvert si $A = \operatorname{int} A$;
  ssi $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$;
  ssi $\forall x \in A,\ \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ (x_n \to x) \implies (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A)$.
- A est fermé si $A = \operatorname{adh} A$;
  ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$;
  ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall (x_n) \subseteq A,\ (x_n \to x) \implies (x \in A)$.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$

A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Longrightarrow (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.
- mobilisent des connaissances en cours d'acquisition : boule de centre x et de rayon r.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.
- mobilisent des connaissances en cours d'acquisition : boule de centre x et de rayon r.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.
- mobilisent des connaissances en cours d'acquisition : boule de centre x et de rayon r.
- sont des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (Bridoux, 2011).

L'enseignement de la topologie

Les exercices (1/3)

NATURE DES EXERCICES À RÉSOUDRE : manipuler chaque caractérisation sur des ensembles simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$.

- $[-1,3]$ est-il ouvert ? Fermé ?
- $\left\{1/n : \ n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\right\}$ est-il ouvert ? Fermé ?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y\}$ est-il ouvert ? Fermé ?

L'enseignement de la topologie

Les exercices (2/3)

Énoncé

Montrez que $]-1,2[$ est un ensemble ouvert.

À prouver : $\forall x \in]-1,2[, \ \exists r > 0, \ B(x,r) \subseteq]-1,2[$.
Soit $x \in]-1,2[$.
Prenons $r = \min\{x+1, 2-x\}$. On a bien $r > 0$ car $x \in]-1,2[$.
On a $B(x,r) \subseteq]-1,2[$.
En effet, soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x - r < y < x + r$.
Si $r = x+1$, alors on a, en remplaçant, $x - (x+1) < y < x + (x+1)$.
La première inégalité dit $-1 < y$. Comme $x + 1 \leqslant 2 - x$ par définition du minimum, la deuxième inégalité implique $y < x + (2-x)$, c'est-à-dire $y < 2$.
Donc $y \in]-1,2[$.
Si $r = 2 - x$, on démontre de manière analogue que $y \in]-1,2[$.

L'enseignement de la topologie

Les exercices (3/3)

ANALYSES A PRIORI (ROBERT, 1998) : des analyses qui renseignent sur les connaissances mises en jeu et sur les adaptations à réaliser sur ces connaissances.

L'enseignement de la topologie

Les exercices (3/3)

ANALYSES A PRIORI (ROBERT, 1998) : des analyses qui renseignent sur les connaissances mises en jeu et sur les adaptations à réaliser sur ces connaissances.

L'ensemble des exercices proposés

- met en jeu des connaissances souvent peu disponibles chez les étudiants (inégalités sur $\mathbb{R}$, convergence des suites...) ;
- nécessitent des adaptations complexes et variées : organisation du raisonnement, traductions, mises en relation...
- mobilisent les cadres de la logique, de la théorie des ensembles, de l'analyse sur $\mathbb{R}$;
- ne met pas en jeu de réelles connaissances en topologie.

L'enseignement de la topologie

Les évaluations (1/3)

Restitution des définitions

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Définissez « A est fermé ».

80% des étudiants répondent :

$$\forall x \in A,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$$

L'enseignement de la topologie

Les évaluations (2/3)

Manipulation des définitions

L'ensemble $\{1/n : \; n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ est-il fermé ?

• $\{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé ?

Càd $\forall x_0 \in \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ $\forall r > 0$ $B[x_0, r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \emptyset$?

Soit $x_0 \in \{ \text{—} \}$

càd $x_0 = \frac{1}{n_1}, n_1 \in \mathbb{N}_0$

Soit $r > 0$

A-t-on $B[x_0, r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \emptyset$?

càd $[x_0 - r, x_0 + r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \emptyset$?

càd $[\frac{1}{n_1} - r, \frac{1}{n_1} + r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \emptyset$?

oui car $\frac{1}{n_1} \in [\frac{1}{n_1} - r, \frac{1}{n_1} + r]$ et $\frac{1}{n_1} \in \{ \text{—} \}$

$\Rightarrow$ $\{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé $\Rightarrow$ VRAI

L'enseignement de la topologie

Les évaluations (3/3)

Manipulation des définitions

Montrez que $[0, 1]$ est un ensemble fermé.

1°) soit $x \in \mathbb{R}$;
soit $r > 0$ la place des ( ) est importante !
supposons que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Montrons que $x \in A$, càd $0 \leq x \leq 1$.
si $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ <=> $\exists$ au moins $y \in B(x,r)$ et $y \in A$
Prendre $y = x$, on a $y \in B(x,r)$ car $|y-x|$ ou $|x-x| = |0| = 0 < r$. ok par hyp.
On sait que $y \in A$ càd $0 \leq y \leq 1$. Par le choix de y on a $0 \leq x \leq 1$.
càd $x \in A$ ce qu'on voulait

Diagnostic de l'enseignement de topologie

Caractéristiques de l'enseignement

- Un travail sur les définitions qui ne permet pas de revenir au sens des notions.
- Les étudiants manipulent des symboles qui ne représentent rien pour eux.
- Pas de dynamique productive entre le sens et la technique.

Plan

Objectifs visés

Comment élaborer un enseignement

- susceptible de favoriser les apprentissages des étudiants ?
- qui tient compte des contraintes institutionnelles ?

Cadrage théorique (1/3)

Théorie de l'activité (Vandebrouck et al., 2008)

- Activités des étudiants : ce qu'ils pensent, disent, font... ou pas.
- Ces activités sont l'intermédiaire choisi pour approcher les apprentissages des étudiants en relation avec les choix de conceptualisation et de gestion réalisés par l'enseignant.

→ Importance donnée à la fois aux contenus et aux déroulements.

Cadrage théorique (2/3)

Éléments participant à la conceptualisation en mathématiques

- une prise de sens des notions en tant qu'outil et en tant qu'objet au sens de Douady (1981) ;
  ➙ mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.
  ➙ entraînements techniques.
- une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture.
- l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.

La conceptualisation est une notion relative et n'est jamais achevée. (Robert et Rogalski, 2004).

Cadrage théorique (3/3)

DES ÉLÉMENTS POUVANT AMENER DE LA VARIABILITÉ DANS LES ACTIVITÉS :

- l'introduction des notions et l'ensemble des tâches à proposer aux étudiants ;
- la gestion de la classe par l'enseignant :
  - recours au levier méta ;
  - formes de travail en classe ;
  - interventions de l'enseignant en lien avec le travail des étudiants.

→ des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement ont fourni des pistes (à expérimenter) pour élaborer un enseignement susceptible de développer des activités « favorables » aux apprentissages (Bridoux, 2011).

Quelques caractéristiques du dispositif

Élargissement des notions à enseigner

- intérieur et adhérence d'un ensemble,
- ensemble ouvert, ensemble fermé.

Quelques caractéristiques du dispositif

Élargissement des notions à enseigner

- **point intérieur, point adhérent à un ensemble**,
- intérieur et adhérence d'un ensemble,
- ensemble ouvert, ensemble fermé.

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions (1/2)

POINT INTÉRIEUR, POINT ADHÉRENT À UN ENSEMBLE :

- Tâche d'introduction dans $\mathbb{R}^2$ pour faire émerger une définition en termes de boule à partir d'un travail sur des dessins.
- Recours à l'intuition géométrique.
- Donner du sens aux notions à partir du langage utilisé et en travaillant sur les dessins.
- Absence du registre symbolique.
- Travail en autonomie.

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions (2/2)

Point intérieur

- p est un point intérieur à A si p a un peu de place autour de lui dans A.
- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p, r) \subseteq A$.

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions (2/2)

Point intérieur

- p est un point intérieur à A si p a un peu de place autour de lui dans A.
- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p,r) \subseteq A$.

Intérieur d'un ensemble

- Idée de considérer, pour un ensemble A, l'ensemble des points intérieurs à A.
- $\operatorname{int} A = \{x \in A : \ \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A\}$

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions (2/2)

Point intérieur

- p est un point intérieur à A si p a un peu de place autour de lui dans A.
- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p,r) \subseteq A$.

Intérieur d'un ensemble

- Idée de considérer, pour un ensemble A, l'ensemble des points intérieurs à A.
- $\operatorname{int} A = \{x \in A :\ \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A\}$

Ensemble ouvert

- Idée de considérer des ensembles qui coïncident avec leur intérieur.
- A est ouvert si $A = \operatorname{int} A$.

Quelques caractéristiques du dispositif

L'exemplification

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, est adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

1. $p = 1/3,\ A = [0,1]$
2. $p = -\sqrt{2},\ A = [-2,1]$
3. $p = 1,\ A = [0,1[$
4. $p = 1/2,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
5. $p = 0,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
6. $p = (2,4),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
7. pour $x, y \in \mathbb{R}$, $p = (x, y - r/3),\ A = B_{|.|_\infty}((x,y), r)$

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

1. $[\pi, +\infty[$
2. $]-\infty, -2[$
3. $\{3\}$
4. $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R},\ 3x + 2y = 6\}$

Tâches de manipulation des définitions

Analyses a priori (1/2)

$1/2$ est-il intérieur à $A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$

- Organisation du raisonnement : prouver la négation de l'écriture quantifiée caractérisant un point intérieur : $\forall r > 0,\ B(1/2, r) \not\subseteq A$.
- Existence d'un choix : chercher un réel $y \in B(1/2, r)$ et $y \notin A$.
- Connaissances anciennes à articuler : manipulation d'inégalités, ordre sur $\mathbb{R}$.

$A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ est-il ouvert ?

- Organisation du raisonnement : prouver que $A \not\subseteq \operatorname{int} A$.
- Existence d'un choix : trouver un réel $y \in A$ et $y \notin \operatorname{int} A$.
- On est ramené à l'exercice 1.

Tâches de manipulation des définitions

Analyses a priori (2/2)

Des analyses semblables en termes d'adaptations :

- Les mises en fonctionnement des connaissances nécessitent des adaptations complexes et variées de ces connaissances.
- Des connaissances en logique et en théorie des ensembles sont largement sollicitées.

Tâches de manipulation des définitions

Gestion de l'enseignant

DES GESTIONS DIFFÉRENTES EN CLASSE :

Exercice 1

- une courte recherche individuelle pour lire l'énoncé ;
- une correction prise en charge par l'enseignant :
  - réalisation de dessins au démarrage,
  - insistance sur la langue naturelle,
  - recours au méta pour montrer le travail mathématique attendu,
  - langage symbolique dans sa fonction d'économie d'écriture.

Tâches de manipulation des définitions

Gestion de l'enseignant

DES GESTIONS DIFFÉRENTES EN CLASSE :

Exercice 1

- une courte recherche individuelle pour lire l'énoncé ;
- une correction prise en charge par l'enseignant :
  - réalisation de dessins au démarrage,
  - insistance sur la langue naturelle,
  - recours au méta pour montrer le travail mathématique attendu,
  - langage symbolique dans sa fonction d'économie d'écriture.

Exercice 2

Une longue recherche individuelle suivie d'une correction collective.

De nouveaux exercices

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(p) > 0$. Montrez qu'il existe un ouvert, noté O, contenant p sur lequel la fonction f est strictement positive.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le graphe de f est défini par $\{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}\, f\}$. Le graphe de la fonction f est-il un ensemble fermé ?

Une vue globale

Enseignement initial

- Notions : intérieur, adhérence, ouvert, fermé.
- Introduction immédiate du symbolisme.
- Des notions caractérisées en termes de suites et de boules.
- Tâches de manipulation des caractérisations laissées à la charge de l'étudiant.

Dispositif

- Élargissement aux notions de point intérieur et de point adhérent.
- Introduction appuyée par un travail dans les registres du dessin et de la langue naturelle.
- Le début de l'enseignement ne met en jeu que la notion de boule.
- Tâches de manipulation : exemplifiées, prises en charge par l'enseignant au début de l'enseignement, recours au méta.
- Tâches complexes mélangeant les notions de topologie avec d'autres notions.

Plan

1. Diagnostic d'un enseignement de topologie
2. Élaboration d'un dispositif didactique
3. Apprentissages des étudiants
4. Conclusion

Apprentissages des étudiants

Deux évaluations

- Deux évaluations : juin et août.
- Des questions semblables pour la topologie : une tâche de manipulation et une tâche complexe.
- 23 étudiants.
- Résultats globaux : 80% de réussite sur les tâches de manipulation, 20% de réussite sur les tâches complexes.

Apprentissages des étudiants

Tâche de manipulation

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

1. Définissez « A est un ensemble ouvert ».
2. Définissez « A est un ensemble fermé ».
3. *À partir des définitions précédentes*, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert et/ou fermé.
   - $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$;
   - $E_2 = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$;
   - $E_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$

- Progrès dans la restitution des définitions ;
- Principe du « tout ou rien » : soit l'étudiant réussit très bien la question, soit il est bloqué au démarrage de l'exercice.

Apprentissages des étudiants

Tâche de manipulation : un exemple de production d'étudiant

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$ n'est pas ouvert.

▶ E_1 n'est pas ouvert càd $E_1 \neq \text{int } E_1$
càd $E_1 \not\subset \text{int } E_1$
càd $\forall r>0$ $B((x,y),r) \not\subset E_1$
càd $\forall r>0$ $\exists_{(x,y)} \in B((x,y),r)$ et $y \notin E_1$

on cherche un point de E_1 qui n'est pas dans int E_1.

Soit $r>0$
Prenons $(x,y) = (-1,2) \in \mathbb{R}^2$
$(-1,2) \in B((-1,2),r)$.
mais $(-1,2) \notin E_1$.
~~en effet~~ $0 \not\leq -1 \leq 2$
$0 \leq -1$ tjrs faux.

Or $(-1,2) \notin E_1$.

Apprentissages des étudiants

Tâche complexe

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

1. Définissez l'intérieur de A.
2. Définissez l'adhérence de A.

   On dit d'un ensemble $V \subseteq \mathbb{R}^N$ qu'il est un *voisinage* de $x \in \mathbb{R}^N$ s'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^N$ tel que $x \in O \subseteq V$.

   Soient $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $x \in \mathbb{R}^N$.
3. Montrez que $x \in \operatorname{int} A$ si et seulement s'il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq A$.
4. Montrez que $x \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(\pi) = 0,1$. Montrez qu'il existe un voisinage V de π sur lequel la fonction f est strictement positive.

- Dimension objet des notions de topologie.
- Des difficultés dans la manipulation du symbolisme.

Apprentissages des étudiants

Tâche complexe : des exemples de productions (1/2)

> Montrez que $x \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.

(d) $\Leftarrow$ on a $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \phi$??

prenons $O = B(x, r)$ qui est r ? on a bien que $B(x,r)$ est un ouvert (par def d'une boule ouverte)

de manière à ce que

$O \subseteq V$ (on prend r très petit si il le faut) ??

Comme on sait que $\forall r$ $B(x,r) \cap A \neq \phi$

en particulier on a

$B(x, r') \cap A \neq \phi$

et $B(x, r') \subseteq V$ donc $V \cap A \neq \phi$

Apprentissages des étudiants

Des exemples de productions (2/2)

Montrez que $x \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) on a $\exists$ $\mathcal{O}$ ouvert tq $\forall V$, $\mathcal{O} \subseteq V$ et $V \cap A \neq \emptyset$

on veut que $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$??

~~Soit $\mathcal{O}$ ouvert~~ ..

Soit $r > 0$

Soit $r>0$ - - -

Prenons $V = B(x, \frac{r}{2})$

nous avons que on peut trouver un ouvert inclu dans cette boule (ex $B(x, \frac{r}{2})$)

et on sait par hypothèse que $B(x, \frac{r}{2}) \cap A \neq \emptyset$

comme $B(x, \frac{r}{2}) \subseteq B(x, r)$

nous avons également que

$B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ $\triangleright$

Plan

1. Diagnostic d'un enseignement de topologie
2. Élaboration d'un dispositif didactique
3. Apprentissages des étudiants
4. Conclusion

Conclusion (1/2)

Bilan de la recherche

- Un enseignement qui tient ses promesses sur les tâches de manipulation.
- Limite : un enseignement qui ne prend pas en compte la dimension outil des notions.
  ➙ la question du sens des notions est encore ouverte !
- Des difficultés en logique persistent.
- Une recherche qui montre l'importance de l'inscription des contraintes institutionnelles dans un travail en didactique des mathématiques.

Conclusion (2/2)

Perspectives

- Relations entre les choix de formalisations et les apprentissages des étudiants.
- Point d'entrée : questionner le(s) passage(s) d'un registre d'écriture à un autre (langage naturel, dessins, langage symbolique...) en termes de manques et de valeur ajoutée.