La *Théorie des Champs Conceptuels* et le modèle de *Conception* en didactique des mathématiques

Denise GRENIER
Institut Fourier et IREM
Université Grenoble-Alpes

Qu’est-ce qu’un concept ?

Dictionnaire de l’Académie Française, 9ème édition (1992) :
ÉPISTÉMOLOGIE

En mathématiques, notion rigoureusement définie qui sert de fondement ou de principe. *Le concept de cercle, de triangle, de nombre, d'ensemble, de sous-ensemble*. Dans les sciences expérimentales, idée explicative découlant d'une théorie générale et que l'on vérifie par l'expérimentation. *Les relations entre les concepts de pesanteur, d'énergie, de masse*.

Théorie des Champs Conceptuels Vergnaud (1980)

Hypothèses

– L’acquisition du sens d’un concept se fait à partir de la confrontation à des problèmes qui mettent en jeu ce concept, dans un « processus d’élaboration pragmatique ».

Rôle central des problèmes

– Un concept scientifique n'est jamais isolé, il est rattaché à d'autres concepts qui permettent de l'aborder, de le comprendre et de le préciser.

Nécessité de considérer les concepts « voisins »

Théorie des Champs Conceptuels Vergnaud (1980, 1996)

Hypothèses (suite)

– « Faute de faire suffisamment la distinction entre le concept et sa représentation, c'est-à-dire entre le signifié et le signifiant, il arrive fréquemment qu'on prenne les symboles et les opérations sur ces symboles pour l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématiques, alors que cette connaissance et cette activité se situent principalement au plan conceptuel. »

Activité / conceptualisation
Représentations et Techniques / Théorisation
Signifiant / Signifié

Théorie des Champs Conceptuels
Vergnaud (1980, 10996, 10097)

« […] une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. » (1996)

Théorie des Champs Conceptuels Vergnaud (1996)

Schème *:* ce qui décrit « l'organisation invariante de la conduite [d'une personne] pour une classe de problèmes donnés ».

« C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. »

– Règles de l'action, prise d'information, contrôle
  (règle de type 'si… alors…)
– Invariants opératoires

Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud 1996)

Invariants opératoires

Théorème-en-acte : « […] propriétés des relations saisies ou utilisées par l'élève en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est capable pour autant de les expliciter ou de les justifier »

Proposition vraie ou fausse qui permet de décrire une procédure, une réponse

« en acte », car pas forcément formulable par celui qui l'utilise

Règle-en-acte

Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud 1996)

Invariants opératoires (suite)

Fonction propositionnelle :
propriétés et relations attribuées à un concept, qui participent à la construction des propositions et théorèmes

concept-en-acte, catégorie-en-acte

Argument : objet (nombre, figure), symbole

Théorie des Champs Conceptuels

Caractéristiques d’une règle-en-acte, d’un théorème-en-acte, d’une propriété-en-acte :

Domaine d’application : ensemble des données (numérique, algébriques, géométriques, …) pour lesquelles la règle est applicable.

Domaine de validité : ensemble des données pour lesquelles la règle donne une réponse juste.

Exemple 1
Ordre dans D (Grisvard & Léonard 1981)

Une *règle-en-acte* très répandue :

« Lorsque les parties entières sont égales, on compare les parties décimales. Le nombre qui a le plus grand « entier » est le plus grand. »

exemples : $12,8 > 12,4$ car $8 > 4$
$7,219 > 7,19$ car $219 > 19$
$12,113 > 12,4$ car $113 > 4$

Domaine d'application : D, avec des adaptations de la règle lorsque les premières décimales sont des zéros.

Domaine de validité : tous les ensembles D*k* (décimaux à *k* chiffres significatifs après la virgule).

Exemple de fonctions propositionnelles

propriétés-en-acte

« Si l'on multiplie (resp. divise) un nombre par un autre, il augmente (resp. diminue) »

« Le carré d'un nombre est plus grand que le nombre. »

« La racine carrée d'un nombre est plus petite que le nombre. »

« Pour tout nombre, il existe un nombre situé juste avant lui. »

Théorème-en-acte : **généralisation aux nombres réels des propriétés des nombres entiers**.

Exemple 2. Un exemple historique Newton (1642-1727)
Mouvement instantané et méthode des fluxions

« Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités décroissant sans limite s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près que tout différence donnée, mais qu'ils ne peuvent jamais dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment. »

(De quadratura Curvarum Op. Omnia, I, 251)

Un exemple historique Newton (1642-1727)
Mouvement instantané et méthode des fluxions

« Voici un exemple de rapport ultime :
Si on change x en x+0, quel est le "taux de variation" de x^n ? On a :

$(x+0)^n - x^n = n\ 0\ x^{n-1} + (n(n-1))/2\ 0\ x^{n-2} + \ldots$

Le rapport du taux de variation de x^n à celui de x est alors :

$((x + 0)^n - x^n) / 0 = n\ x^{n-1} + (n(n-1))/2\ 0\ x^{n-2} + \ldots$

Ensuite, en faisant devenir 0 très petit, on obtient le rapport $n\ x^{n-1}$. »

Réponse de Georges Berkeley à Newton

« Ce raisonnement ne semble pas juste ni probant. Car lorsqu'on dit que les incréments s'annulent, c'est-à-dire que les incréments ne sont plus rien, ou qu'il n'y a plus d'incréments, la supposition précédente que les incréments étaient quelque chose, ou qu'il y ait des incréments, est détruite, et cependant une conséquence de cette supposition est retenue.

C'est une faute de raisonnement. Il est certain que lorsqu'on suppose que des incréments s'annulent, nous devons supposer que leurs rapports, leurs expressions, et tout ce qui découle de la suppression de leur existence s'annule avec eux ». (the Analyst, 1734)

Walton (professeur de maths à Dublin) répond à Berkeley

« Dans la méthode des fluxions, on ne s'intéresse pas à la grandeur des incréments ou des décréments instantanés des quantités, mais à leur premier rapport ou à leur rapport ultime, c'est-à-dire la proportion dans laquelle elles commencent ou cessent d'exister […]

Jurin (1684-1750)

« Il ne s'agit pas que l'incrément soit rien, mais qu'il s'évanouisse, ou qu'il soit sur le point de s'évanouir.[...] Il y a un rapport dernier d'incréments qui s'évanouissent.[...] »

« Un incrément naissant est un incrément qui commence à exister à partir de rien, ou qui commence à être généré, mais qui n'a pas encore atteint une grandeur que l'on peut assigner, aussi petite soit-elle. […] »

Propriété-en-acte : « Un incrément – une quantité – qui tend vers zéro, quand elle devient trop petite, ne peut être mesurée, n'a pas de grandeur ».

Que nous montrent ces échanges ?

Newton annule, dans un calcul, une quantité supposée non nulle (sinon ce développement n'aurait aucun sens).

Théorème-en-acte de Newton (repris par Walton) :

Pour calculer la limite de $[(f(x+\varepsilon)-f(x))/\varepsilon]$ quand ε tend vers 0, on « simplifie » l'expression du rapport et on la calcule pour $\varepsilon=0$.

Théorème-en-acte de Berkeley :

La limite de $f(\varepsilon)/g(\varepsilon)$ tels que $f(\varepsilon)$ et $g(\varepsilon)$ tendent vers 0 quand ε tend vers 0, est égale à 0. ($0/0=0$)

À quoi sert de modéliser en « théorème-en-acte », « règle-en-acte », propriété-en-acte, etc..

Formuler – pour comprendre – ce qui sous-tend les raisonnements, affirmations, procédures, réponses.

Les décontextualiser pour étudier leur *domaine d'application* et leur *domaine de validité*.

Étudier des modifications – quand c'est possible – pour en faire des affirmations, procédures, théorèmes « vrais ».

Statut de l'erreur

Erreur : résultat obtenu par l'application d'une règle-en-acte hors de son domaine de validité.

Exemple 3

Règles-en-acte très répandues :

$$a/b+c/d = (a+c)/(b+d)$$

$$|a+b| = |a|+|b|$$

$$(a+b)^2 = a^2+b^2$$

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$ln(a+b)=ln(a)+ln(b)$$

Un théorème-en-acte

Pour tout f, x , y, k, $(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(k.x)=k.f(x)$

propriété de linéarité attribuée à un ensemble très large de fonctions et d'opérateurs.

Pour tout f, x , y, a, b, $f(ax+by) = af(x)+bf(y)$

Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud 1996)

Champ conceptuel : « un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. »

Ce point de vue permet de :
- replacer un concept dans un ensemble de concepts qui lui sont voisins ;
- préciser les classes de problèmes où ce concept et ses voisins sont outils de résolution (donc préciser leurs significations).

Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud 1996)

Concept : un « **triplet** C={S, I, S}

S : ensemble des situations qui donnent du sens au concept,

I : ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié),

S : ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

Conception : un modèle didactique (Artigue (1990)

analogue du côté du sujet du triplet C={S, I, S) qui décrit un concept.

double objectif :
– mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même concept, les modes de traitement associés, leur adaptation à la résolution de telle classe de problèmes ;
– différencier le savoir que l'enseignant veut transmettre des connaissances construites par l'élève.

Conception : un modèle didactique (Artigue (1990)

« un triplet :
- la classe des situations-problèmes qui donnent du sens au concept ;
-l'ensemble des signifiants associés (images mentales, représentations, expressions symboliques) ;
- les outils (règles d'action, théorèmes-en-acte, algorithmes) dont on dispose pour manipuler le concept. »

Exemple : le concept de nombre décimal

S : situations qui donnent du sens au concept

- Partages, opérations, subdivisions (d'entiers)
- comparaison (ordre), encadrement
- mesurages, systèmes métriques, échelles, monnaie
- pourcentages, graduations
- Changements de bases
- approximations d'un nombre, suites

I : invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (signifié)

- Définitions, propriétés, théorèmes
- Opérations, Ordre dans D, fraction décimale,
- Notions de chiffre, nombre, base, etc..
- Anneau unitaire, intègre, dense, etc.

Exemple du concept de nombre décimal (suite)

S : formes langagières, non langagières, représentations symboliques des propriétés

Écritures : positionnelle avec virgule, $n=a.10^p$, fractionnaire, signes + ou – , développement décimal (fini, impropre),
Symboles ensemblistes (**N, Z, D, Q, R**)
Graphiques : repérages sur une droite graduée
Langages associés : partage, subdivision, quotient d'entiers, système métrique, approximation par excès, par défaut

Walton (professeur de maths à Dublin) répond à Berkeley

« Dans la méthode des fluxions, **on ne s'intéresse pas à la grandeur des incréments ou des décréments instantanés des quantités, mais à leur premier rapport ou à leur rapport ultime, c'est-à-dire la proportion dans laquelle elles commencent ou cessent d'exister […]**

Il y a des limites fixées vers lesquelles ces proportions tendent perpétuellement, et dont elles s'approchent plus que toute différence assignée, mais qu'elles n'atteignent jamais avant que les quantités elles-mêmes soient infiniment diminuées, ou avant l'instant où elles s'évanouissent et deviennent rien. »

Jurin (1684-1750)

« Il ne s'agit pas que l'incrément soit rien, mais qu'il s'évanouisse, ou qu'il soit sur le point de s'évanouir.[...]
Il y a un rapport dernier d'incréments qui s'évanouissent.[...]
Un incrément naissant est un incrément qui commence à exister à partir de rien, ou qui commence à être généré, mais qui n'a pas encore atteint une grandeur que l'on peut assigner, aussi petite soit-elle. […]
Qu'une quantité ou un rapport atteigne sa limite ou ne l'atteigne pas dépend uniquement de ce qu'on suppose à propos du temps pendant lequel la quantité ou le rapport est considéré comme tendant vers ou s'approchant de sa limite.

Exemple d’une propriété-en-acte pour la symétrie axiale (Grenier, 1988)

Construction à main levée du symétrique d’un segment

« Le symétrique d'un point est à égale « distance » de l'axe que le point donné, cette distance étant prise le long de l'horizontale dans la feuille ».

Domaine d’application

Domaine de validité

N. Balacheff (cours à l'Ecole d'été de didactique d'août 2003)

conception C :

« un quadruplet (P, R, L, ∑) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ;
- R est un ensemble d'opérateurs ;
- L est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de P et de R ;
- ∑ est une structure de contrôle, elle assure la non-contradiction de C. En particulier, un problème p de P est résolu s'il existe r de R et s de ∑ tel que s(r(p)) = vrai. »