L'implication et ses différents cadres

D.Gardes (CII/Irem de Dijon)

Commission délocalisée Inter-IREM Lycée-Université

13 Janvier 2023

Synthèse

Introduction

Objectifs

- Présenter précisément l'objet « implication » et ses différents cadres.

Introduction

Objectifs

- Présenter précisément l'objet « implication » et ses différents cadres.
- Montrer que ces différents cadres sont indispensables à la bonne appréhension et compréhension de l'implication.

Synthèse

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Résolution de quelques amuse-bouches

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Résolution de quelques amuse-bouches
- **Temps 2** : L'implication et ses différents cadres

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Résolution de quelques amuse-bouches
- **Temps 2** : L'implication et ses différents cadres
- **Temps 3** : Retour sur les amuse-bouches

Synthèse

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Résolution de quelques amuse-bouches
- **Temps 2** : L'implication et ses différents cadres
- **Temps 3** : Retour sur les amuse-bouches
- **Temps 4** : Synthèse

Temps 1 - Quelques amuse-bouches

Exemple 1

1. Démontrer que pour toutes propositions P, Q et R, on a l'équivalence entre $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ et $(P \text{ ET } Q) \Longrightarrow R$.
2. Démontrer que pour toutes propositions P, Q et R :
$$\left.\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ Q \Longrightarrow R \end{array}\right\} \Longrightarrow (P \Longrightarrow R).$$

Temps 1 - Quelques amuse-bouches

Exemple 2

Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la proposition « si n est un nombre pair, alors son successeur est premier »

Temps 1 - Quelques amuse-bouches

Exemple 3

Soit P[*n*] : $\dfrac{3^n}{n!} \leqslant 2^{7-n}$ pour n entier naturel.

Pour quelles valeurs de n entier naturel, a-t-on : P[n] $\Longrightarrow$ P[$n+1$] ?

Temps 1 - Quelques amuse-bouches

Exemple 4

Dans le plan, $ABCD$ est un quadrilatère ayant deux côtés opposés de même longueur. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) sur les diagonales, a-t-on les deux autres côtés parallèles ?

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe de bivalence
  Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe de bivalence
  Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux
- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire
  (P OU non(P)) est vraie

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe de bivalence
  Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux
- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire
  (P OU non(P)) est vraie
- le principe de non-contradiction
  Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en même temps,c'est-à-dire
  (P ET non(P)) est fausse

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe de bivalence
  Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux
- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire
  (P OU non(P)) est vraie
- le principe de non-contradiction
  Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en même temps,c'est-à-dire
  (P ET non(P)) est fausse
- la vérifonctionnalité
  La valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

C'est une phrase mathématique (qui contient un verbe) pour laquelle la question de sa véracité a un sens.

Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

C'est une phrase mathématique (qui contient un verbe) pour laquelle la question de sa véracité a un sens.

Il existe des propositions « ouvertes » avec des variables pour lesquelles il faut préciser leur domaine et leur quantification.

Synthèse

Définition de l'implication

L'implication est un connecteur logique (binaire) qui définit à partir de deux propositions P et Q une nouvelle proposition notée $P \Longrightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

Définition de l'implication

L'implication est un connecteur logique (binaire) qui définit à partir de deux propositions P et Q une nouvelle proposition notée $P \Longrightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

On obtient donc la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pourquoi cette définition ? Raison n°1

Quand on demande à quelqu'un si l'implication suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$$

Pourquoi cette définition ? Raison n°1

Quand on demande à quelqu'un si l'implication suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$$

il répond presque « naturellement » que cette proposition est fausse en donnant le contre-exemple $x = -2$, c'est-à-dire que l'on a P vraie et Q fausse.

Pourquoi cette définition ? Raison n°2

Les deux premières lignes de la table de vérité sont facilement acceptées. Le plus difficile est de comprendre que si P est fausse, alors l'implication est vraie.
Il reste donc 4 cas à étudier pour les deux dernières lignes :

Pourquoi cette définition ? Raison n°2

Les deux premières lignes de la table de vérité sont facilement acceptées. Le plus difficile est de comprendre que si P est fausse, alors l'implication est vraie.
Il reste donc 4 cas à étudier pour les deux dernières lignes :
Premier cas

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

C'est la table du connecteur ET.

Pourquoi cette définition ? Raison n°2

Deuxième cas

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

C'est la table de la proposition Q.

Pourquoi cette définition ? Raison n°2

Troisième cas

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

C'est la table du connecteur EQUIVALENT

Pourquoi cette définition ? Raison n°2

Quatrième cas
Le seul cas qui reste donne le tableau voulu.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Autre définition avec les connecteurs NON et OU

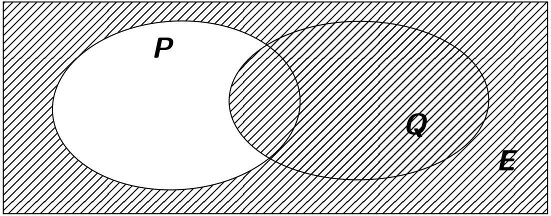
$P \Longrightarrow Q$ peut se définir uniquement avec les connecteurs disjonction et négation.

$(P \Longrightarrow Q)$ est logiquement équivalente à $[(\text{NON}P)$ OU $Q]$.

On retrouve le résultat suivant :
$(P \Longrightarrow Q)$ est fausse dès que P est vraie ET Q est fausse.

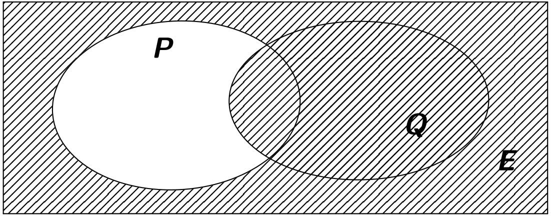
Autre définition dans le cadre ensembliste

On se place dans un ensemble de référence E.
Soit P le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété P.
Soit Q le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété Q.
L'implication P[x] $\Longrightarrow$ Q[x] n'est fausse que pour les éléments qui appartiennent à P et qui n'appartiennent pas à Q



Autre définition dans le cadre ensembliste

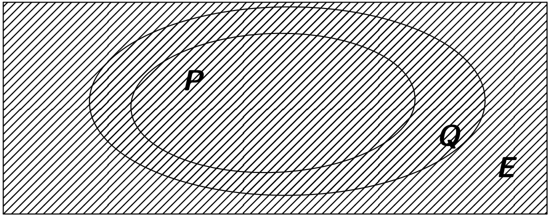
On se place dans un ensemble de référence E.
Soit P le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété P.
Soit Q le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété Q.
L'implication P$[x] \Longrightarrow$ Q$[x]$ n'est fausse que pour les éléments qui appartiennent à P et qui n'appartiennent pas à Q



Ainsi l'implication P$[x] \Longrightarrow$ Q$[x]$ est vraie uniquement pour les éléments de $\complement P \cup Q$.

Autre définition dans le cadre ensembliste

Si l'implication P$[x]$ $\Longrightarrow$ Q$[x]$ est vraie pour tout x de E alors on a la représentation suivante :



Autre définition dans le cadre ensembliste

Cette définition n'est opérationnelle que pour les énoncés contingents $\mathrm{P}[x] \Longrightarrow \mathrm{Q}[x]$.

Synthèse

Autre définition dans le cadre ensembliste

Cette définition n'est opérationnelle que pour les énoncés contingents $\mathsf{P}[x] \Longrightarrow \mathsf{Q}[x]$.

Elle a peu d'intérêt pour les propositions simples comme :
« 3 impair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »

Synthèse

Autre définition dans le cadre ensembliste

Cette définition n'est opérationnelle que pour les énoncés contingents $\mathsf{P}[x] \Longrightarrow \mathsf{Q}[x]$.

Elle a peu d'intérêt pour les propositions simples comme :
« 3 impair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Dans ce cas, la représentation serait l'univers inclus dans l'univers.

Autre définition dans le cadre ensembliste

Cette définition n'est opérationnelle que pour les énoncés contingents P$[x] \Longrightarrow$ Q$[x]$.

Elle a peu d'intérêt pour les propositions simples comme :
« 3 impair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Dans ce cas, la représentation serait l'univers inclus dans l'univers.
« 3 pair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Ici la représentation serait l'ensemble vide inclus dans l'univers.

Synthèse

Autre définition dans le cadre ensembliste

Cette définition n'est opérationnelle que pour les énoncés contingents $\mathsf{P}[x] \Longrightarrow \mathsf{Q}[x]$.

Elle a peu d'intérêt pour les propositions simples comme :
« 3 impair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Dans ce cas, la représentation serait l'univers inclus dans l'univers.
« 3 pair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Ici la représentation serait l'ensemble vide inclus dans l'univers.
« 3 pair » $\Longrightarrow$ « 4 impair »
Ici la représentation serait l'ensemble vide inclus dans l'ensemble vide.

Autre définition dans le cadre ensembliste

Cette définition n'est opérationnelle que pour les énoncés contingents P$[x] \Longrightarrow$ Q$[x]$.

Elle a peu d'intérêt pour les propositions simples comme :
« 3 impair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Dans ce cas, la représentation serait l'univers inclus dans l'univers.
« 3 pair » $\Longrightarrow$ « 4 pair »
Ici la représentation serait l'ensemble vide inclus dans l'univers.
« 3 pair » $\Longrightarrow$ « 4 impair »
Ici la représentation serait l'ensemble vide inclus dans l'ensemble vide.

De même « 3 impair » $\Longrightarrow$ « 4 impair » est faux car l'univers n'est pas inclus dans l'ensemble vide.

Synthèse

Autre définition dans le cadre ensembliste

Exemple d'utilisation de cette définition :
Déterminer les réels x tels que l'implication $x \geqslant 3 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$ soit vraie.

Autre définition dans le cadre ensembliste

Exemple d'utilisation de cette définition :
Déterminer les réels x tels que l'implication $x \geqslant 3 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$ soit vraie.

Si on note P l'ensemble $[3\ ;\ +\infty[$ et Q l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$.
L'implication est vraie pour les réels x appartenant à $\complement P \cup Q$.

Autre définition dans le cadre ensembliste

Exemple d'utilisation de cette définition :
Déterminer les réels x tels que l'implication $x \geqslant 3 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$ soit vraie.

Si on note P l'ensemble $[3\ ;\ +\infty[$ et Q l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$.
L'implication est vraie pour les réels x appartenant à $\complement P \cup Q$.
Or $\complement P =]-\infty\ ;\ 3[$.
Comme $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1), Q =]-\infty\ ;\ -1] \cup [4\ ;\ +\infty[$

Ainsi l'implication est vraie pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 3[\cup [4\ ;\ +\infty[$.

Synthèse

L'implication et le raisonnement déductif

La principale règle de raisonnement liée à l'implication est celle du *modus ponens* (ou de détachement) :

en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ P \quad \text{Vraie}\end{array}\right\} \text{DONC} \quad Q \quad \text{Vraie.}$$

Synthèse

L'implication et le raisonnement déductif

La principale règle de raisonnement liée à l'implication est celle du *modus ponens* (ou de détachement) :

en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ P \;\; \text{Vraie}\end{array}\right\} \text{ DONC } \; Q \; \text{ Vraie.}$$

en logique des prédicats :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \; (P[x] \Longrightarrow Q[x]) \text{ Vraie} \\ P[a] \;\; \text{Vraie}\end{array}\right\} \text{ DONC } \; Q[a] \; \text{ Vraie.}$$

L'implication et le raisonnement déductif

On remarque que l'on utilise une implication vraie avec la prémisse vraie.

Le cas où la prémisse est fausse n'est pas présent.

L'implication et le raisonnement déductif

On remarque que l'on utilise une implication vraie avec la prémisse vraie.

Le cas où la prémisse est fausse n'est pas présent.

Cela risque de créer la propriété en acte suivante :
Quand une implication est vraie, cela signifie que la prémisse est vraie. et que si la prémisse est fausse, l'implication est fausse.

Synthèse

L'implication et le raisonnement déductif

Le fait de ne travailler l'implication que dans le cadre du raisonnement déductif renforce l'idée causale de l'implication.

« Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors (AB) et (CD) sont parallèles »

C'est parce qu'$ABCD$ est un parallélogramme que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

L'implication et le raisonnement déductif

Le fait de ne travailler l'implication que dans le cadre du raisonnement déductif renforce l'idée causale de l'implication.
« Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors (AB) et (CD) sont parallèles »
C'est parce qu'$ABCD$ est un parallélogramme que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Cela amène alors à penser qu'on ne peut pas avoir d'implication entre deux propositions indépendantes (propositions pour lesquelles il n'existe pas un cheminement sémantique pour passer de la première à la deuxième).

L'implication et le raisonnement déductif

Le fait de ne travailler l'implication que dans le cadre du raisonnement déductif renforce l'idée causale de l'implication.
« Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors (AB) et (CD) sont parallèles »
C'est parce qu'$ABCD$ est un parallélogramme que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Cela amène alors à penser qu'on ne peut pas avoir d'implication entre deux propositions indépendantes (propositions pour lesquelles il n'existe pas un cheminement sémantique pour passer de la première à la deuxième).

Ainsi se forge la propriété en acte que dans le cas de deux propositions indépendantes soit l'implication n'a pas de sens ou soit l'implication est fausse.

L'implication et le raisonnement déductif

Le fait de ne travailler l'implication que dans le cadre du raisonnement déductif renforce l'idée causale de l'implication.
« Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors (AB) et (CD) sont parallèles »
C'est parce qu'$ABCD$ est un parallélogramme que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Cela amène alors à penser qu'on ne peut pas avoir d'implication entre deux propositions indépendantes (propositions pour lesquelles il n'existe pas un cheminement sémantique pour passer de la première à la deuxième).

Ainsi se forge la propriété en acte que dans le cas de deux propositions indépendantes soit l'implication n'a pas de sens ou soit l'implication est fausse.

« si 2 est pair alors tout carré a ses diagonales perpendiculaires. »

L'implication et le raisonnement déductif

Le fait de ne travailler l'implication que dans le cadre du raisonnement déductif renforce l'idée causale de l'implication.
« Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors (AB) et (CD) sont parallèles »
C'est parce qu'$ABCD$ est un parallélogramme que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Cela amène alors à penser qu'on ne peut pas avoir d'implication entre deux propositions indépendantes (propositions pour lesquelles il n'existe pas un cheminement sémantique pour passer de la première à la deuxième).

Ainsi se forge la propriété en acte que dans le cas de deux propositions indépendantes soit l'implication n'a pas de sens ou soit l'implication est fausse.

« si 2 est pair alors tout carré a ses diagonales perpendiculaires. »

« si $2+1=3$ alors $\sqrt{2}$ est irrationnel ».

L'implication et la logique naturelle

Synthèse

L'implication et la logique naturelle

L'implication se traduit très souvent par les expressions « si … alors » , « on a … si … », « il faut que … pour que … » ou « … entraîne … » …

Synthèse

L'implication et la logique naturelle

L'implication se traduit très souvent par les expressions « si ... alors » , « on a ... si ... », « il faut que ... pour que ... » ou « ... entraîne ... » ...

« Si tu manges ta soupes, alors tu auras un dessert »

« 15 % de réduction si achat de trois articles »

L'implication et la logique naturelle

L'implication se traduit très souvent par les expressions « si … alors » , « on a … si … », « il faut que … pour que … » ou « … entraîne … » …

« Si tu manges ta soupes, alors tu auras un dessert »

« 15 % de réduction si achat de trois articles »

Cela correspond bien à l'implication mathématique dans le cas où la prémisse est vraie mais laisse sous-entendre d'autres implications mathématiquement fausses comme :
« si tu ne manges pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert »
ou
« il faut acheter au-moins trois articles pour avoir 15 % de réduction »

Synthèse

L'implication et la logique naturelle

Exemple de réponse d'élèves de seconde :

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? O
S'il ne la mange pas ? N

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) Oui car s'il ne la mange pas on NPPS du fait que elle n'impose pas la condition comme précédemment : si — alors —. Là on trouve : si seulement, ce qui nous avance pas sur ; si non.

L'implication et la logique naturelle

En logique naturelle l'implication est vue comme cause - conséquence et introduit ainsi une temporalité.

La cause se produit avant la conséquence.
« S'il pleut, alors je sors mon parapluie ».

Ceci rend difficile la compréhension de l'équivalence avec la contraposée :
« Si je ne sors pas mon parapluie, alors il ne pleut pas. »

L'implication et la logique naturelle

En logique naturelle, le principe du maximum d'informations est souvent pratiqué.

« si j'ai 50 euros d'économie, je m'achète ... » signifie « dès que j'ai 50 euros d'économie, je m'achète ... ». On donne l'information maximale.

L'implication et la logique naturelle

En logique naturelle, le principe du maximum d'informations est souvent pratiqué.

« si j'ai 50 euros d'économie, je m'achète ... » signifie « dès que j'ai 50 euros d'économie, je m'achète ... ». On donne l'information maximale.

Cela empêche de bien appréhender la notion d'inclusion :
on ne dira jamais : « cette nappe est rectangulaire si elle est carrée »

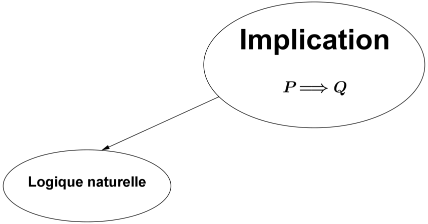
Les différents cadres

Implication

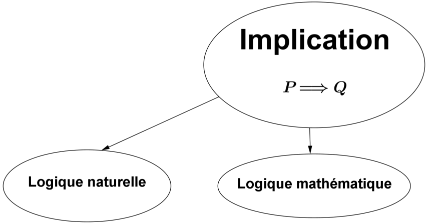
$$P \Longrightarrow Q$$

Synthèse

Les différents cadres

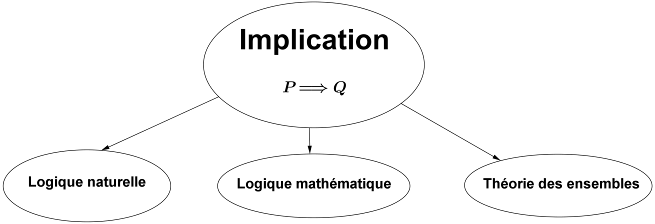


Les différents cadres

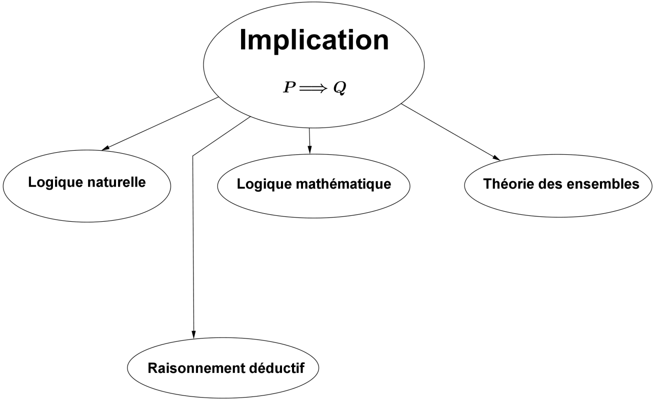


Synthèse

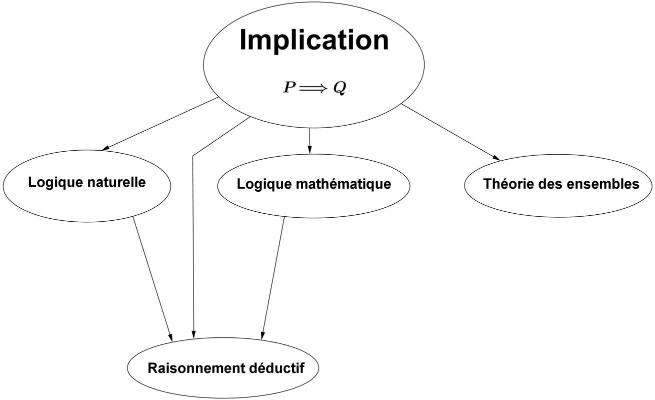
Les différents cadres



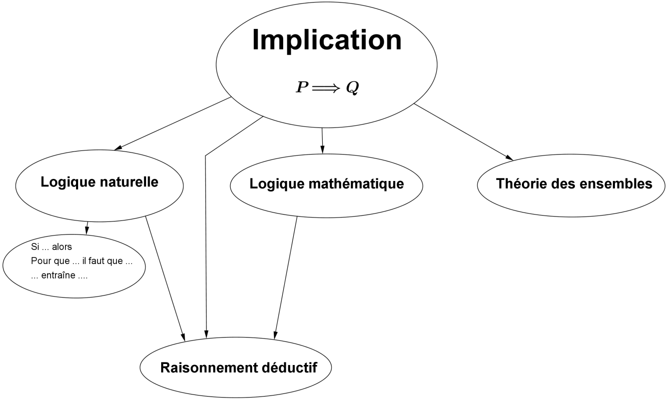
Les différents cadres



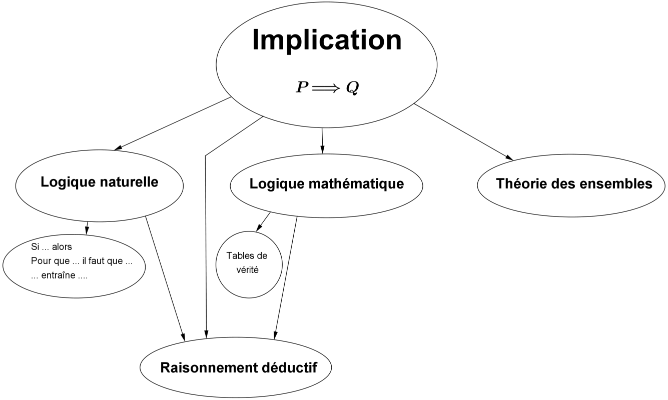
Les différents cadres



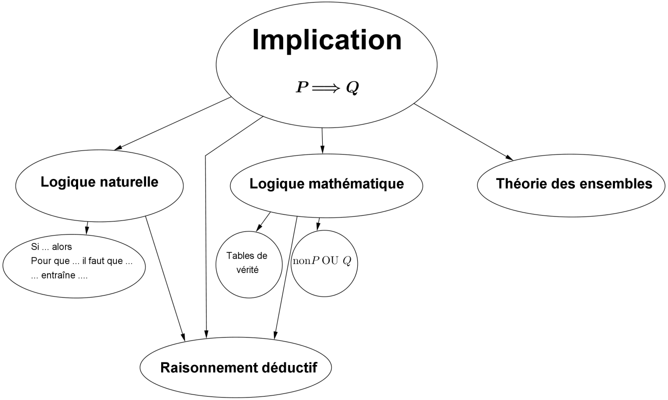
Les différents cadres



Les différents cadres

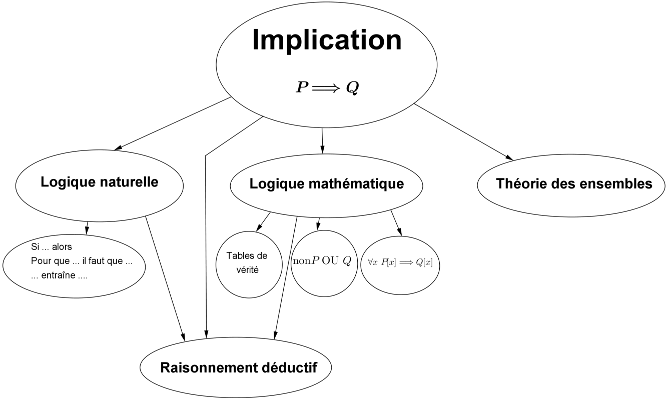


Les différents cadres

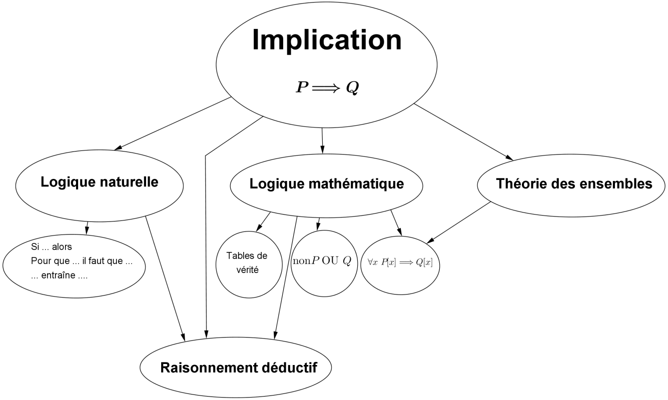


Synthèse

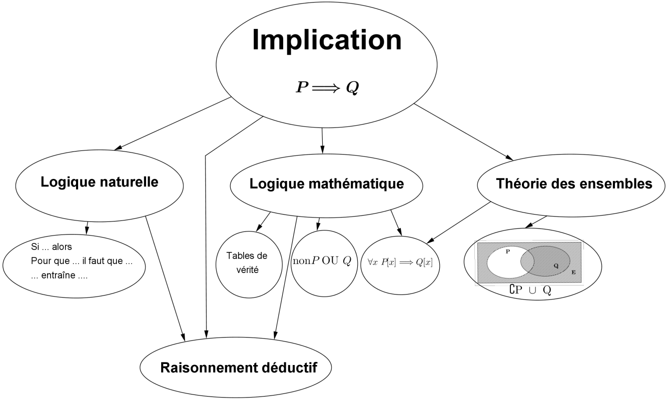
Les différents cadres



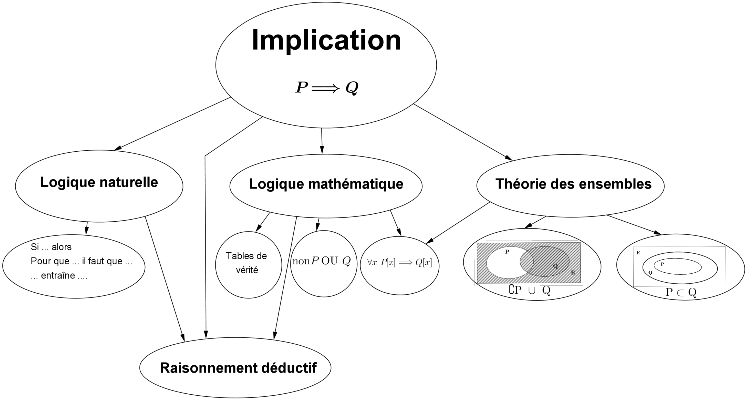
Les différents cadres



Les différents cadres

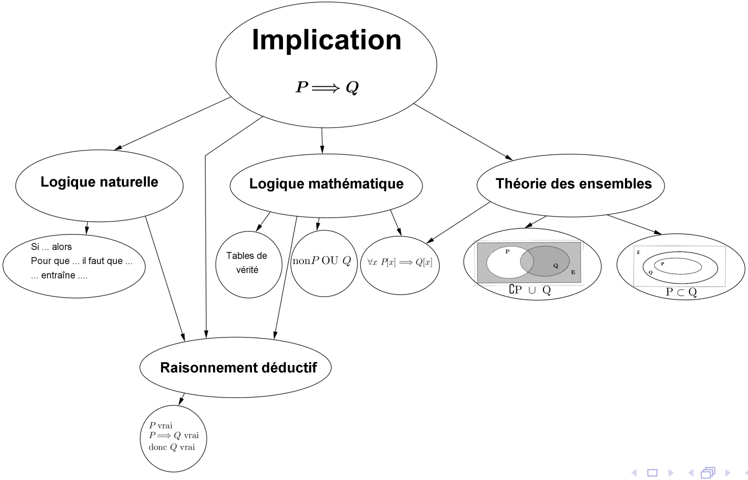


Les différents cadres

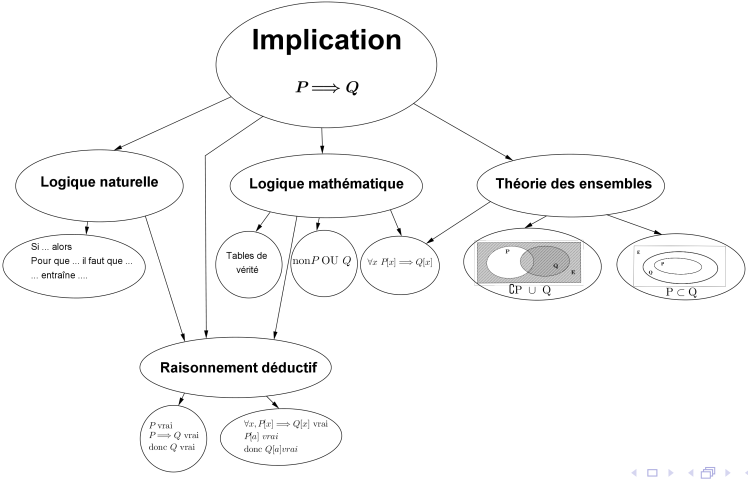


Synthèse

Les différents cadres



Les différents cadres



Exemple 1

Exemple 1
Démontrer que pour toutes propositions P, Q et R, on a l'équivalence entre $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ et $(P \text{ ET } Q) \Longrightarrow R$.

Exemple 1

Solution 1 avec les tables de vérité

P	Q	R	Q ==> R	P ==> (Q ==> R)	P et Q	(P et Q) ==> R
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Exemple 1

Solution 2 avec les connecteurs NON et OU

$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ est successivement équivalent à :

NON P OU $(Q \Longrightarrow R)$
NON P OU (NON Q OU R)
NON P OU NON Q OU R

$(P$ ET $Q) \Longrightarrow R$ est successivement équivalent à :

NON (P ET Q) OU R
(NON P OU NON Q) OU R
NON P OU NON Q OU R

Exemple 1

Solution 3 en examinant les cas où l'implication est fausse

$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ n'est faux que si :

P est vrai et $(Q \Longrightarrow R)$ est faux
P est vrai et (Q est vrai et R est faux)
P est vrai et Q est vrai et R est faux

$(P$ ET $Q) \Longrightarrow R$ n'est faux que si :

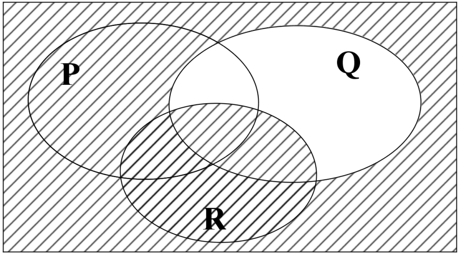
(P et Q) est vrai et R est faux
(P est vrai et Q est vrai) et R est faux
P est vrai et Q est vrai et R est faux

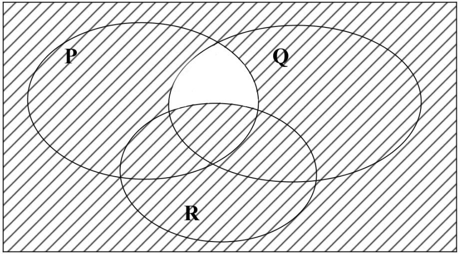
Exemple 1

Solution 4 dans le cadre ensembliste :

$Q \implies R$ correspond à $\complement Q \cup R$

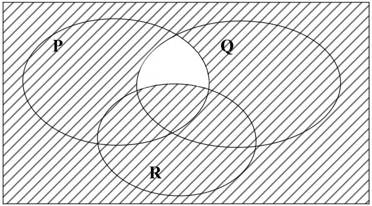
Si on note T l'ensemble $\complement Q \cup R$,
$P \implies (Q \implies R)$ correspond à $\complement P \cup T$





Exemple 1

D'autre part $(P \text{ ET } Q) \Longrightarrow R$ correspond à $\complement(\mathsf{P} \cap \mathsf{Q}) \cup \mathsf{R}$.



Exemple 2

Exemple 2

Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la proposition « si n est un nombre pair, alors son successeur est premier »

Exemple 2

Solution 1 (tables de vérité)

n	*P[n]*	*Q[n]*	*P[n] ==> Q[n]*
1	F	V	V
2	V	V	V
3	F	F	V
4	V	V	V
5	F	F	V
6	V	V	V
7	F	F	V
8	V	F	F
.	.	.	.
.	.	.	.
14	V	F	F
15	F	F	V
16	V	V	V
17	F	F	V
18	V	V	V
19	F	F	V
20	V	F	F

Exemple 2

Solution 2 (NON P OU Q)

On note $P[n]$: n est pair et $Q[n]$: $n+1$ est premier.

Ainsi NON $P[n]$: n est impair, c'est-à-dire $n \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19\}$.

$Q[n]$: $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 10 ; 12 ; 16 ; 19\}$

Ainsi on obtient les entiers de

$\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19\}$.

Exemple 2

Solution 3 (en examinant les cas où l'implication est fausse)

On note $P[n]$: n est pair et $Q[n]$: $n+1$ est premier.

$P[n] \Longrightarrow Q[n]$ est faux seulement si $P[n]$ est vrai et $Q[n]$ est faux

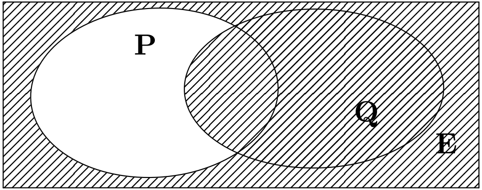
n	2	4	6	**8**	10	12	**14**	16	18	**20**
$n+1$	3	5	7	**9**	11	13	**15**	17	19	**21**

Exemple 2

Solution 4 (dans le cadre ensembliste)

On note $P[n]$: n est pair et $Q[n]$: $n+1$ est premier.

$P[n] \Longrightarrow Q[n]$ est faux seulement si $n \in \mathsf{P} \setminus (\mathsf{P} \cap \mathsf{Q})$



$\mathsf{P} \cap \mathsf{Q} = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 16\ ;\ 18\}$
Donc $\mathsf{P} \setminus (\mathsf{P} \cap \mathsf{Q}) = \{8\ ;\ 14\ ;\ 20\}$.

Exemple 3

Exemple 3

Soit P[n] : $\dfrac{3^n}{n!} \leqslant 2^{7-n}$ pour n entier naturel.

Pour quelles valeurs de n entier naturel, a-t-on :

P[n] $\Longrightarrow$ P[$n+1$] ?

Exemple 3

Soit n tel que $P[n]$ vraie, c'est-à-dire $\dfrac{3^n}{n!} \leqslant 2^{7-n}$.

Nous en déduisons $\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{3^n}{n!} \times \dfrac{3}{n+1} \leqslant \dfrac{3}{n+1} \times 2^{7-n}$.

Pour obtenir $\dfrac{3}{n+1} \times 2^{7-n} \leqslant 2^{6-n}$, il suffit que $\dfrac{3}{n+1} \times 2^{7-n} \leqslant 2^{6-n}$ ce qui équivaut à $n1 \geqslant 3 \times 2$ soit $n \geqslant 5$.

Par conséquent, nous pouvons déjà affirmer que la proposition « pour tout $n \geqslant 5, P[n] \Longrightarrow P[n+1]$ » est vraie.

Exemple 3

La démonstration précédente ne permet pas de conclure pour $n < 5$. Pour cela, examinons $P[0], P[1], ..., P[5]$.

$P[0]$: « $1 \leqslant 2^7$ » est vraie $P[1]$: « $3 \leqslant 2^6$ » est vraie $P[2]$: « $\dfrac{9}{2} \leqslant 2^5$ » est vraie

$P[3]$: « $\dfrac{9}{2} \leqslant 2^4$ » est vraie $P[4]$: « $\dfrac{27}{8} \leqslant 2^3$ » est vraie $P[5]$: « $\dfrac{81}{40} \leqslant 2^2$ » est vraie

Ces 6 propositions étant vraies, nous pouvons en déduire que les 5 implications $P[n] \Longrightarrow P[n+1]$ pour n dans l'ensemble $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ sont vraies (implications matérielles).

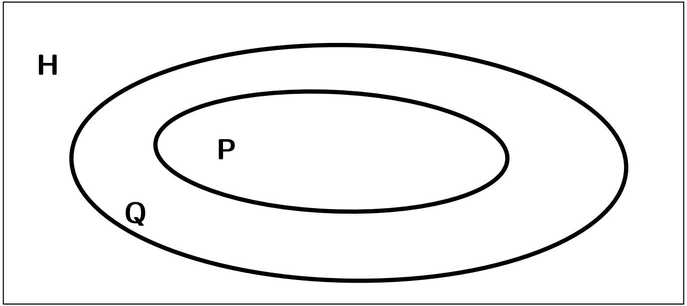
Nous avons démontré que « pour tout entier naturel n, $P[n] \Longrightarrow P[n+1]$ » est vraie.

Exemple 4

Exemple 4
Dans le plan, $ABCD$ est un quadrilatère ayant deux côtés opposés de même longueur. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) sur les diagonales, a-t-on les deux autres côtés parallèles ?

Exemple 4

On note H l'ensemble des quadrilatères ayant 2 côtés opposés de même longueur et Q le sous-ensemble de H des quadrilatères ayant les 2 autres côtés parallèles.
On cherche donc un sous-ensemble P de H tel que P est inclus dans Q.



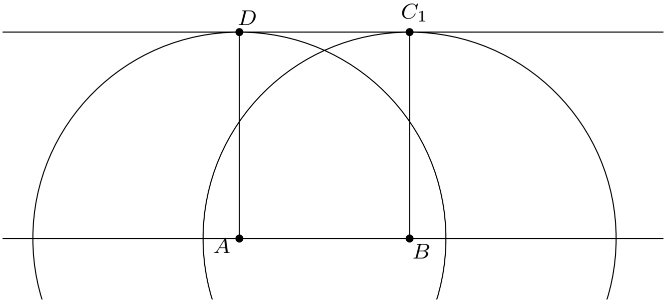
Exemple 4

On va caractériser l'ensemble Q et regarder les conditions que l'on obtient sur les diagonales des éléments de Q.

Soit $ABCD$ un quadrilatère de Q ($AD = BC$ et (AB) et (CD) parallèles)
Le point C appartient à la parallèle à (AB) passant par D et au cercle de centre B et de rayon AD.
Plusieurs cas se présentent :

Exemple 4

Cas 1 : la parallèle à (AB) passant par D est la tangente en D au cercle de centre A et de rayon AD.

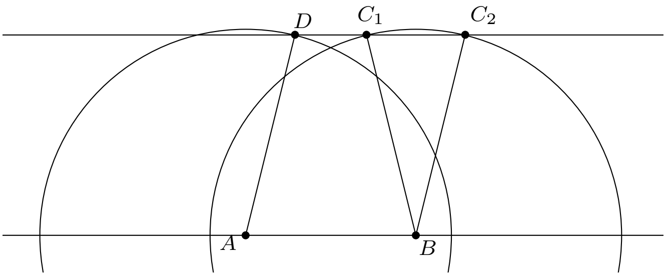


On obtient un rectangle.

Exemple 4

Cas 2 : la parallèle à (AB) passant par D coupe le cercle de centre A et de rayon AD en deux points. Deux sous-cas se présentent :

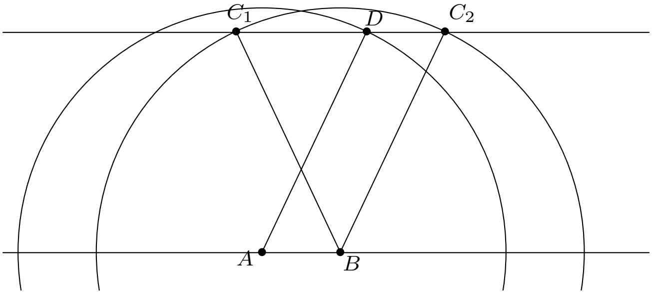
1. Les points D, C_1 et C_2 sont rangés dans cet ordre



On obtient un parallélogramme et un trapèze (convexe) isocèle.

Exemple 4

2. Les points C_1, D et C_2 sont rangés dans cet ordre



On obtient un parallélogramme et un trapèze croisé isocèle

Exemple 4

Ainsi l'ensemble Q est l'union de l'ensemble des parallélogrammes, de l'ensemble des trapèzes isocèles convexes et de l'ensemble des trapèzes croisés isocèles.

Dans cet ensemble, les diagonales se coupent leur milieu ou les diagonales sont de même longueur. C'est donc un ensemble P.

Synthèse

L'implication se place dans plusieurs cadres :

- cadre de la logique naturelle
- cadre de la logique formelle
- cadre ensembliste
- cadre du raisonnement déductif.

Il est clair que se placer uniquement dans le cadre de la logique naturelle ne permet pas de bien appréhender l'implication mathématique.
Les phrases de la vie courante comportent trop d'implicites et amènent à confondre une implication avec sa réciproque.

Synthèse

Exemple de l'activité des « astronautes » de l'IREM de Grenoble

Une réunion de cosmonautes du monde entier à lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.
Répondre aux questions suivantes en justifiant :
1) À l'aéroport, on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
2) À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?
3) Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
4) Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-il- une chemise rouge ?

Synthèse

Utiliser l'implication uniquement dans le cadre du raisonnement déductif conforte la conception causale de l'implication.

Implication

Une implication est une assertion prenant la forme d'une **relation de cause à effet** entre deux assertions.
On explicite cette relation en l'écrivant sous la forme « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ ».

Extrait Variations Seconde Hatier 2019

Synthèse

Cela pousse à ne considérer que le cas où la prémisse est vraie.

8 Implication

La proposition P implique la proposition Q signifie que : si P est vraie, alors Q est vraie.

On la note cette implication : $P \Rightarrow Q$.

Extrait Transmath Seconde Nathan 2019

Synthèse

On favorise la propriété en acte suivante :
$P \Longrightarrow Q$ n'a aucun intérêt si P est faux

$P \Longrightarrow Q$ est faux si P est faux

Synthèse

On favorise la propriété en acte suivante :
$P \Longrightarrow Q$ n'a aucun intérêt si P est faux

$P \Longrightarrow Q$ est faux si P est faux

Pourtant le cas où la prémisse est fausse est bien présent dans l'activité mathématique (raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence par exemple).

Synthèse

1. $P[0]$ est vraie et $\forall n \geqslant 2\ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

Vrai, $P[n]$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 2$.

2. $P[2]$ est vraie et $\forall n \geqslant 0\ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

Vrai, $P[n]$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $P[2]$ est fausse, $P[5]$ est vraie et $\forall n \geqslant 4\ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

$P[n]$ est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

Synthèse

Le cadre de la logique formelle est nécessaire pour montrer que l'implication est un connecteur logique binaire (donc 4 cas distincts) et qu'il est nécessaire de donner une valeur de vérité à $P \Longrightarrow Q$ si la prémisse est fausse.

Synthèse

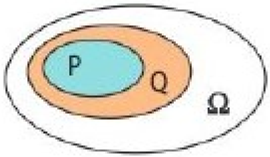
Le cadre de la logique formelle est nécessaire pour montrer que l'implication est un connecteur logique binaire (donc 4 cas distincts) et qu'il est nécessaire de donner une valeur de vérité à $P \Longrightarrow Q$ si la prémisse est fausse.

C'est également un excellent outil de contrôle.
A-t-on l'équivalence suivante :
« $((A \Longrightarrow C)$ OU $(B \Longrightarrow C)) \iff ((A$ OU $B) \Longrightarrow C)$ » ?

Synthèse

Le cadre ensembliste est trop souvent absent de l'enseignement et n'apparaît seulement qu'avec la condition $P \subset Q$, c'est-à-dire quand l'implication est vraie pour tout élément de l'univers.

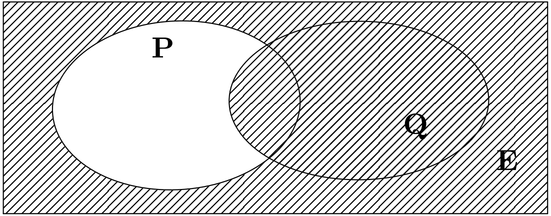
La traduction dans le langage des probabilités de l'implication (P) $\Longrightarrow$ (Q) est :
« si P est réalisé, alors Q est réalisé » ou encore
$P \subset Q$.



Extrait Première CQFD Bordas 2019

Synthèse

Ce schéma est indispensable et permet de bien prendre en compte les cas où l'implication est fausse.



Synthèse

Le cadre ensembliste est approprié pour étudier une implication entre énoncés contingents. On cherche l'ensemble des x pour lesquelles $P[x] \Longrightarrow Q[x]$ est vraie

Synthèse

Le cadre ensembliste est approprié pour étudier une implication entre énoncés contingents. On cherche l'ensemble des x pour lesquelles $P[x] \Longrightarrow Q[x]$ est vraie

alors que le cadre du raisonnement déductif est approprié pour démontrer une implication universellement quantifiée :

$$\forall x \in E \quad P[x] \Longrightarrow Q[x]$$

.

MERCI !

Pour me contacter :
denis.gardes@wanadoo.fr