Les rapports de nombres des Grecs anciens à la Renaissance

Sylviane R. Schwer

Département de Mathématiques & LIPN (CNRS UMR 7030) & IREM Paris Nord
Institut Galilée, Université paris 13
Université Sorbonne Paris Cité
schwer@lipn.univ-paris13.fr, schwer@math.univ-paris13.fr

Ecole Elémentaire Ormeteau
Aulnay-sous-Bois
jeudi 16 mars 2017

FAIRE LA PAGE MULTIPLE SUPERPARTICULIER

1. **Qu'est-ce qu'un nombre ?**
   - Un peu d'histoire

2. **caractères des nombres**

3. **les rapports entre les nombres**
   - selon la taille
   - Rapport d'égalité ou de supériorité

Antiquité grecque

Les mathématiques ont une histoire. En France, nous avons hérité des mathématiques grecques antiques, à travers les traducteurs latins et arabes.

Usuellement

- Ils correspondent au pluriel des noms de la grammaire
- Ils répondent à la question Combien ? de façon déterminée
- 1 n'est pas un nombre, c'est un singulier, une unité
- 2, 3, 4, . . . sont des nombres
- *plusieurs*, *beaucoup* ne sont pas des nombres, ils répondent à la question Combien ? de manière indéterminée.
- 0 n'existe pas

Définition dans *les Eléments* d'Euclide (env. 300 av. EC)

- Le nombre est une collection d'unités.
- L'unité n'est pas un nombre, c'est le générateur des nombres.
- Tout ce qui est mesurable mais qui n'est pas composé d'unités est une grandeur (longueur, aire, ?)

philosophiquement : Platon, Pythagore

- Le nombre représente la structure intelligible du monde.
- Les nombres sont des objets – abstraits – qui ont une identité, des propriétés et qui entretiennent des relations entre eux.

Pour les Grecs, il ne suffit pas de savoir compter et calculer, il faut donc comprendre les nombres en eux-mêmes, comme les plantes, les animaux …

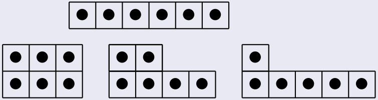
La transmission

Ce sont les moines qui enseignent majoritairement, en latin. Les nombres sont écrits en chiffres romains jusqu'au XII^{eme} siècle au moins.

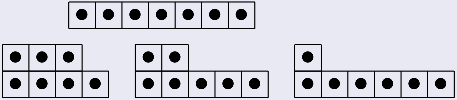
L'usage du zéro et les chiffres indo-arabes vont s'imposer dès le XIII^{eme} siècle chez les mathématiciens, les calculateurs.
L'on enseigne toujours la classification des nombres et les rapports des nombres jusqu'à la Renaissance, voire jusqu'au XVII ^{eme} siècle.
Ensuite, la technique l'emporte pour la résoudre des calculs de plus en plus sophistiqués. On va alors étendre la notion de nombre, en introduisant les nombres fractionnaires, les nombres décimaux, les nombres négatifs, et bien d'autres.
Toute grandeur devient un nombre, ainsi que 1.

selon le pair et l'impair

6 est pair



7 est impair



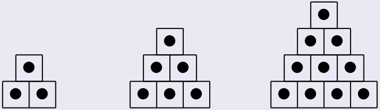
propriétés ou théorèmes

+	pair	impair
pair	pair	impair
impair	impair	pair

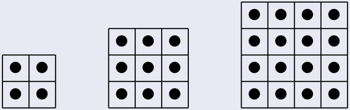
$\times$	pair	impair
pair	pair	pair
impair	pair	impair

selon des formes géométriques

3, 6, 10 sont des nombres triangulaires

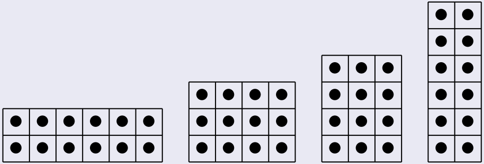


4, 9, 16 sont des nombres carrés



k^2 est la somme de l'unité et de $k-1$ premiers nombres impairs.

12 est un nombre rectangulaire



nombres premiers

Un nombre premier est un nombre qui n'est pas rectangulaire.
Il n'est le multiple d'aucun nombre plus petit que lui.

les comparaisons de taille

On se donne deux nombres (nombre1, nombre2) et l'on pose la question : comment est le nombre1 par rapport au nombre2 ?
Pour répondre à la question comment ? il faut avoir un contexte, un critère.

première différenciation : d'égalité ou d'inégalité ?

- rapport d'égalité : $nombre1 = nombre2$
  comme (2,2), (3,3), (4,4), . . .
- rapport d'inégalité : $nombre1 \neq nombre2$
  comme (3,2) ou (2,3)

une seule égalité, deux types d'inégalité

seconde différenciation

Dans un rapport d'inégalité, les rôles des deux nombres sont bien différenciés : l'un est le plus grand, l'autre est le plus petit.

rapport d'inégalité de supériorité

nombre1 plus grand que *nombre2* ($nombre1 > nombre2$)
comme (3,2), (8,3), (8,4), ...

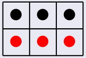
rapport d'inégalité d'infériorité

nombre1 plus petit que *nombre2* ($nombre1 < nombre2$)
comme (2,3), (3,8), (4,8), ...

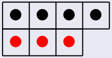
Ce sont deux relations contraires, comme :
plus haut/plus bas
plus chaud/plus froid
plus vieux/plus jeune
plus récent/plus ancien ...

Rapport d’égalité ou de supériorité

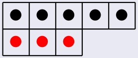
égalité



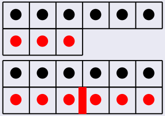
superparticulier : reste égal à 1



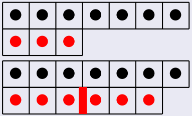
superpartiens : reste plus grand que 1



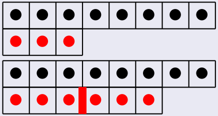
multiple



multiple superparticulier



multiple superpartiens



Inégalité d’infériorité : la classe **multiple**, est appelée **sous-multiple**, pour les autres, on remplace **super** par **sous**.

nommer chaque rapport : les multiples

$\boxed{\text{nombre1=mult fois nombre2}}$ $\boxed{\frac{nombre1}{nombre2} = \text{mult}}$

- nombre1=2 fois nombre2 ; le rapport est double : $\frac{nombre1}{nombre2} = 2$
- nombre1=3 fois nombre2 ; le rapport est triple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 3$
- nombre1=4 fois nombre2 ; le rapport est quadruple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 4$
- nombre1=5 fois nombre2 ; le rapport est quintuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 5$
- nombre1=6 fois nombre2 ; le rapport est sextuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 6$
- nombre1=7 fois nombre2 ; le rapport est septuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 7$
- nombre1=8 fois nombre2 ; le rapport est octuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 8$
- nombre1=9 fois nombre2 ; le rapport est nonuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 9$
- nombre1=10 fois nombre2 ; le rapport est décuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = 10$
- …
- nombre1=mult fois nombre2 le rapport est multuple : $\frac{nombre1}{nombre2} = mult$

nommer chaque rapport irréductible : les superparticuliers

nombre1=(1 fois) nombre2 plus 1

$$\frac{nombre1}{nombre2} = 1 + \frac{1}{nombre2}$$

- le rapport de 3 à 2 est un rapport sesquialter : $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$
- le rapport de 4 à 3 est un rapport sesquitierce : $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
- le rapport de 5 à 4 est un rapport sesquiquart : $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$
- le rapport de 6 à 5 est un rapport sesquiquint : $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$
- le rapport de 7 à 6 est un rapport sesquisixième : $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$
- le rapport de 8 à 7 est un rapport sesquiseptième : $\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7}$
- le rapport de 9 à 8 est un rapport sesquioctave : $\frac{9}{6} = 1 + \frac{1}{8}$
- le rapport de 10 à 9 est un rapport sesquineuvième : $\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$
- le rapport de 11 à 10 est un rapport sesquidixième : $\frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10}$
- ...
- le rapport de n+1 à n est un rapport sesquinième : $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

nommer chaque rapport irréductible : les multiples superparticuliers

les multiples superparticuliers irréductibles (nombre1 ; nombre2)
mult fois nombre2 $\leq$ nombre1 $<$(mult +1) fois nombre2 ;

$\boxed{\text{nombre1}=\text{mult}\times\text{nombre2}+1}$ $\boxed{\dfrac{\textit{nombre1}}{\textit{nombre2}}=\text{mult}+\dfrac{1}{\textit{nombre2}}}$

- (16 ; 3) $5\times 3 \leq 16 < (5+1)\times 3$
  $16 = 5\times 3 + 1$, c'est un rapport quintuple supersesquitierces ou quintuple sesquitierces.
  $\dfrac{16}{3}=5+\dfrac{1}{3}$
- (13 ; 4) $3\times 4 \leq 13 < (3+1)\times 4$
  $13 = 3\times 4 + 1$, c'est un rapport triple sesquiquartes.
  $\dfrac{13}{4}=3+\dfrac{1}{4}$

Nommer chaque rapport irréductible : les superpartiens

Les superpartiens irréductibles (nombre1 ; nombre2)

(1 fois)nombre2 $\leq$ nombre1 $<$ 2 fois nombre2

$\boxed{\text{nombre1} = \text{nombre2} + \text{reste}}$

$$\boxed{\frac{nombre1}{nombre2} = 1 + \frac{reste}{nombre2} = 1 + reste \times \frac{1}{nombre2}}$$

- (5 ; 3) $\quad 3 \leq 5 < 2 \times 3$

  5 = 3 + 2, c'est un rapport superbipartienstierces ou superbitierces.

  $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$
- (7 ; 4) $\quad 4 \leq 7 < 2 \times 4$

  7= 4 + 3, c'est un rapport supertriquartes

  $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$

On utilise la série bi, tri, quadri, quinti, sexti, septi- pour dire le reste

On utilise la série ancienne (ou musicale) tierces, quartes, quintes, sixtes, septièmes, octaves, neuvièmes pour dire nombre2 au pluriel, qui est en combien de parts égales l'unité est divisée.

nommer chaque rapport irréductible : les multiples superpartiens

Les multiples superpartiens irréductibles (nombre1 ; nombre2)
mult fois nombre2 $\leq$ nombre1 $<$(mult +1) fois nombre2 ;

$\boxed{\text{nombre1}=\text{mult}\times\text{nombre2}+\text{reste}}$ $\boxed{\frac{\textit{nombre}1}{\textit{nombre}2}=\text{mult}+\frac{\textit{reste}}{\textit{nombre}2}}$

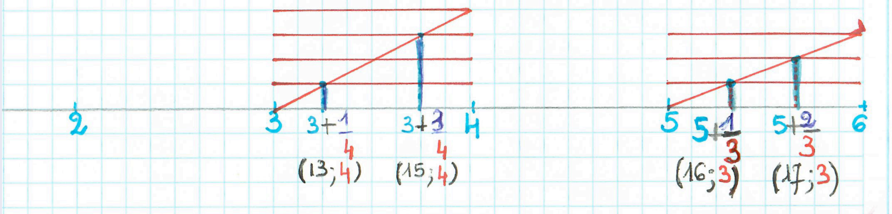
- (17 ; 3) $5\times 3 \leq 17 < (5+1)\times 3$
  $17 = 5\times 3 + 2$, c'est un rapport quintuple superbipartienstierces ou quintuple superbitierces. $\frac{17}{3}=5+\frac{2}{3}$
- (15 ; 4) $3\times 4 \leq 15 < (3+1)\times 4$
  $15 = 3\times 4 + 3$, c'est un rapport triple supertriquartes. $\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$

On utilise la série double, triple, quadruple, quintuple, sextuple, septuple, . . . -uple pour dire le nombre de fois entière que nombre2 est dans nombre1.

On utilise la série bi, tri, quadri, quinti, sexti, septi- pour dire le reste.

On utilise la série ancienne (musicale) tierces, quartes, quintes, sixtes, septièmes, octaves pour dire nombre2 au pluriel, qui est en combien de parts égales l'unité est divisée.

situer les rapports



BRAVO ET MERCI POUR VOTRE ECOUTE ET A VOUS DE JOUER ! ! !