Les registres de représentation en probabilités dans la transition secondaire-supérieur

Commission Inter-IREM groupes Lycée et Université

Vendredi 13 janvier 2023

Camille Doukhan
Université de Strasbourg, LISEC équipe AP2E
camille.doukhan@espe.unistra.fr

Motivations et contexte institutionnel

- Probabilités présentes au lycée mais aussi dans de nombreuses filières de non-spécialistes à l'Université : en biologie, en économie, etc.
- Faible taux de réussite en L1 dans les filières de non-spécialistes.
- Nombreuses difficultés en mathématiques en début d'Université. Cause d'abandon chez les étudiants non-spécialistes (Gueudet et Thomas, 2019).
- Intérêt des probabilités dans la formation des biologistes par exemple :
  - ↪ modélisation de processus biologiques et liens avec la statistique

Sommaire

1 | Registres de représentation en probabilités

Registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993)

Représentation mentale ≠ représentation sémiotique

Un registre de représentation sémiotique est un **système sémiotique** permettant les 3 **activités cognitives** suivantes :

- la **formation** d'une représentation identifiable selon des règles de conformité propres au registre dans lequel la représentation est faite (activité de production ou de reconnaissance),

  Ex : l'arbre de probabilités et ses règles de construction

- la **transformation** d'une représentation dans le même registre où elle a été formée, et donc en se pliant aux règles qui y sont données (activité de traitement),

  Ex : un calcul dans le registre symbolique numérique

- la **conversion** d'une représentation en une représentation d'un autre registre. Cette transformation permet de conserver une partie ou l'intégralité du contenu de la représentation initiale.

  Ex : passage d'une formulation en langue naturelle à une écriture en langage symbolique probabiliste

Registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993)

Points de vigilance (Duval, 1993, 1995) :

« le point fondamental dans l'activité mathématique n'est pas l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques mais la capacité à passer d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre » (Duval, 1995)

Il est important de pouvoir :

- distinguer l'objet mathématique de la représentation
- disposer de plusieurs représentations différentes pour un même objet
- choisir un registre plutôt qu'un autre
- utiliser simultanément plusieurs registres sémiotiques de représentation

Exemples de registres dans le cas des probabilités

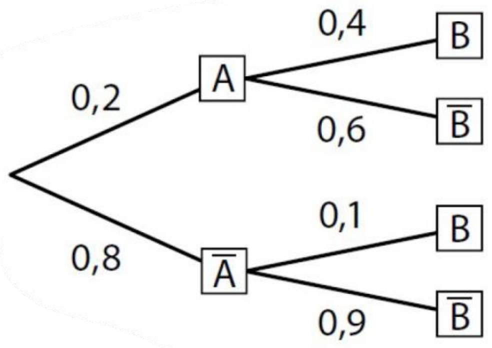
- registre symbolique probabiliste ou de l'intégrale (formules mathématiques)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \qquad E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- registre du langage naturel

Si le test du patient est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

- registre de représentations :
  - arbres de dénombrement (ou arbres des possibles)
  - arbres de probabilités (ou arbre pondéré)



Manuel Indice Mathématiques Spécialité Tle S (2012)

Les arbres de probabilités possèdent les caractéristiques (règles de traitement et de conversion) d'un registre de représentation (Parzysz, 2011)

Exemples de registres dans le cas des probabilités

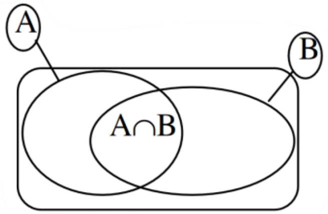
- tableaux à doubles entrées (ou tableau croisé)

Les tableaux de probabilités sont des registres de représentation (Nechache, 2016)

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			

Manuel Indice Mathématiques Spécialité Tle S (2012)

- diagrammes de Venn



Ressources pour la classe de seconde Probabilités et Statistiques - Eduscol (2009)

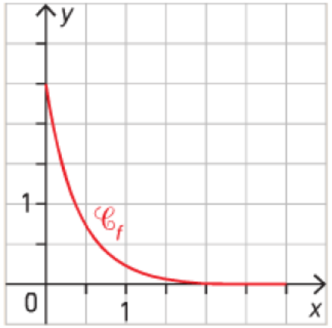
- tableaux de loi d'une variable aléatoire discrète

43 X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	2	4	7	9
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

12 La fonction f représentée ci-dessous est une densité de loi exponentielle.

- représentations graphiques



Manuel Maths Symbole TaleS (2012)

- …

2 | Quelques résultats de la recherche

Concernant l'enseignement des probabilités

« *Le domaine [...] des probabilités met en jeu des représentations variées qui constituent non seulement des illustrations des situations étudiées, mais surtout peuvent – à l'instar des dessins en géométrie – devenir des outils de résolution des problèmes, à condition de les munir de règles leur conférant un caractère opératoire* » (Parzysz, 2011)

- La capacité à articuler des registres et à choisir une représentation plutôt qu'une autre, en fonction de la situation, témoigne d'une bonne maitrise du concept (Dupuis & Rousset-Bert, 1996)

- L'utilisation de plusieurs registres de représentations (tableaux, graphiques, arbres, boites, etc.) ne doit pas empêcher de construire du sens ni d'apprendre à les articuler (Parzysz, 2011)

Concernant l'enseignement des probabilités conditionnelles

Modélisation

- Représentations permettent de traduire des situations concrètes en pseudo-concrètes et ont une influence sur la compréhension des problèmes par les étudiants (Martignon & Wassner, 2002).

Indépendance

- Représentations (arbres et tableaux) et aides à la résolution de problèmes de probabilités → étudiants qui produisent des représentations dans les situations adaptées, réussissent mieux (Dupuis & Rousset-Bert, 1998).

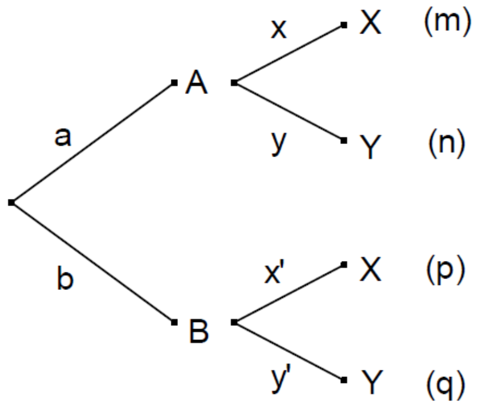
- Le concept d'indépendance peut être illustré au travers de représentations → donner du sens à un concept difficile (Dupuis & Rousset-Bert, 1998).

Concernant l’enseignement des probabilités conditionnelles

A propos des arbres de probabilités :

- Diaz & De la Fuente (2007) recommandent d’enseigner les probabilités conditionnelles en utilisant des arbres de probabilités → permettrait meilleure compréhension des phénomènes aléatoire

- L’arbre de probabilités permet de faire apparaitre d’avantage d’informations que le tableau :



	A	B	Somme
X	m	p	m+p
Y	n	q	n+q
Somme	m+n	p+q	1

(Parzysz, 2011)

Concernant l'enseignement des probabilités conditionnelles

Exemple d'un problème de type bayesien :

- Totohasina (1992) : représentation de type tableau

  → difficultés (confusion entre probas conditionnelles et probas d'intersection)

« *le tableau à double entrée apparaît ici comme un piège de l'intuition alors qu'à sa place l'arbre de probabilités joue un rôle à la fois descriptif et heuristique* »

- Martignon & Wassner (2002) : arbres de probabilités avec des effectifs

  → meilleure réussite que ceux utilisant d'autres représentations

- Parzysz (2011) : tableau plus efficace car interchangeabilité des lignes/colonnes, les règles de retournement de l'arbre sont plus couteuses.

Concernant l'enseignement des probabilités conditionnelles

Congruence sémantique

Deux représentations sont **congruentes** si on peut établir une correspondance sémantique biunivoque entre les éléments signifiants de chacune.

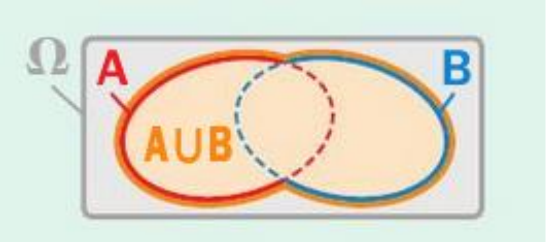
« Toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et d'un registre à l'autre ce ne sont pas forcément les mêmes aspects qui sont représentés. [...] Le cloisonnement des registres chez les sujets est lié à la non-congruence des ces derniers. » (Duval, 1993)

- Nécessité de produire une représentation la plus proche possible de la situation (Parzysz, 2011)

→ congruence sémantique et choix du registre le mieux adapté au problème

3 | Analyse des programmes

Analyse des programmes actuels du lycée



Seconde

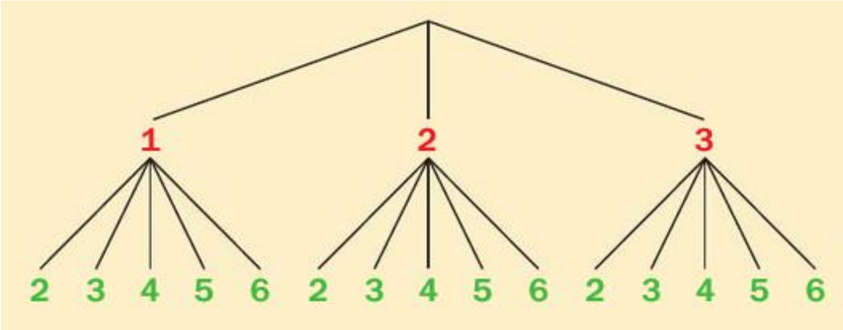
Modéliser le hasard, calculer des probabilités

Contenus. Univers ; événements ; réunion, intersection, complémentaire.
Loi de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
Relation P(A U B) + P(A ∩ B) = P(A) + P(B).
Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

arbre de dénombrement

Capacités. Utiliser des modèles théoriques de ref (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

	R	$\overline{R}$	TOTAL
F			
$\overline{F}$			
TOTAL			1



Variations - Maths 2de - Éd. 2019

Analyse des programmes actuels du lycée

1ère – math spécialité
Probabilités conditionnelles et indépendance

Contenus. Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation P_A(B). Indépendance de deux événements.
Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
Partition de l'univers (systèmes complets d'événements).
Succession de deux épreuves indépendantes,

Capacités. Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.
Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
Distinguer en situation P_A(B) et P_B(A), par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Analyse des programmes actuels du lycée

1ère – math spécialité

Variable aléatoire réelles sur un univers fini

Contenus. Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.

Loi d'une variable aléatoire. Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

Capacités. Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leqslant a)$.

Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.

Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Calculer une espérance, une variance, un écart type.

Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème.

x_i	-2	2	6
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Declic Mathématiques 1re - 2019

Analyse des programmes actuels du lycée

T^{ale} – math spécialité

arbre de dénombrement

Combinatoire et dénombrement

Capacités. Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Contenus. Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue (x1,…,xn) est égale au produit des probabilités des composantes xi. Représentation par un produit cartésien, par un arbre.

Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités. Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.

Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.

Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.

Analyse des programmes actuels du lycée

T^ale^ – math spécialité

Sommes de variables aléatoires

Contenus. Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : E(X + Y) = E(X) + E(Y) et E(aX) = aE(X). Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X,Y et relation d'additivité V(X + Y) = V(X) + V(Y). Relation V(aX) = a2V(X).

Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.

Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste (X1,…,Xn) de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme Sn = X1 + … + Xn et de la moyenne Mn = Sn /n.

Capacités. Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.

Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Concentration, loi des grands nombres

Contenus. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Inégalité de concentration. Loi des grands nombres.

Capacités. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi

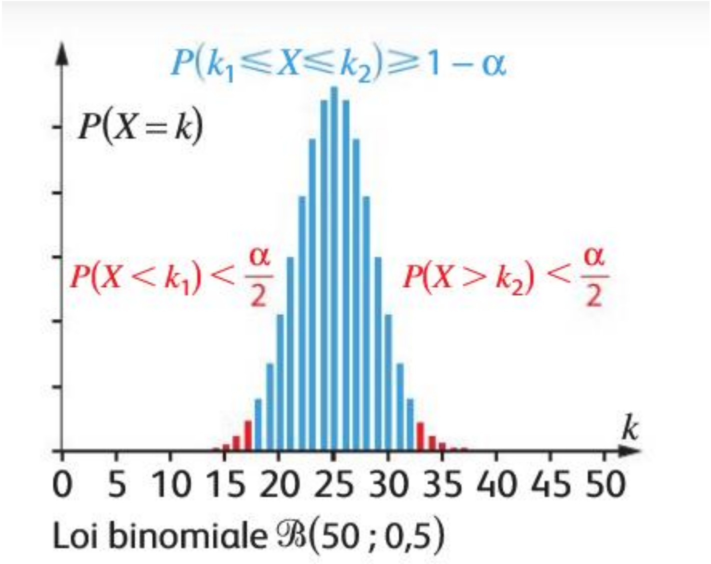
Analyse des programmes actuels du lycée

T[ale] – math complémentaire

Lois discrètes

Contenus. Loi uniforme sur {1,2,...,n}. Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli : définition, espérance et écart type. Schéma de Bernoulli. Représentation par un arbre. Coefficients binomiaux : définition (nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n), triangle de Pascal, symétrie. Variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}$(n,p). Interprétation : nombre de succès dans le schéma de Bernoulli. Expression, espérance et écart type (admis). Représentation graphique.

Loi géométrique : définition, expression, espérance (admise), représentation graphique et propriété caractéristique (loi sans mémoire).



Declic Tle option Maths complementaires - Ed. 2020

Analyse des programmes actuels du lycée

T[ale] **– math complémentaire**
Lois à densité

Contenus. Notion de loi à densité à partir d’exemples. Représentation d’une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leqslant x)$

Espérance et variance d’une loi à densité, expressions sous forme d’intégrales.

Loi uniforme sur [a,b]. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.

Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire

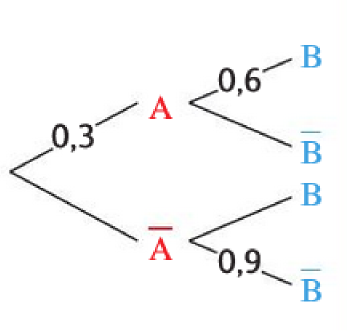
Capacités. Déterminer si une fonction est une densité de probabilité. Calculer des probabilités.

Calculer l’espérance d’une variable aléatoire à densité

Analyse des programmes actuels du lycée

T$^{\text{ale}}$ – math complémentaire
Inférence bayésienne

La question d’intérêt est représentée par un événement A de probabilité P(A), dite probabilité a priori. L’observation d’un événement B conduit à remplacer la probabilité a priori P(A) par la probabilité conditionnelle P_B(A), dite a posteriori.
La formule de Bayes PB(A) = P_A(B)P(A)/P(B) permet d’exprimer la probabilité a posteriori lorsque l’expression du second membre est évaluable. Elle montre la distinction essentielle entre P_B(A) et PA(B). Bien comprendre cette distinction est un objectif majeur.
Problèmes possibles. Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.
Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».
Contenus. Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement, formule de Bayes. Étude de fonction.



Declic Tle option Maths complementaires - Ed. 2020

Synthèse de l'analyse des programmes

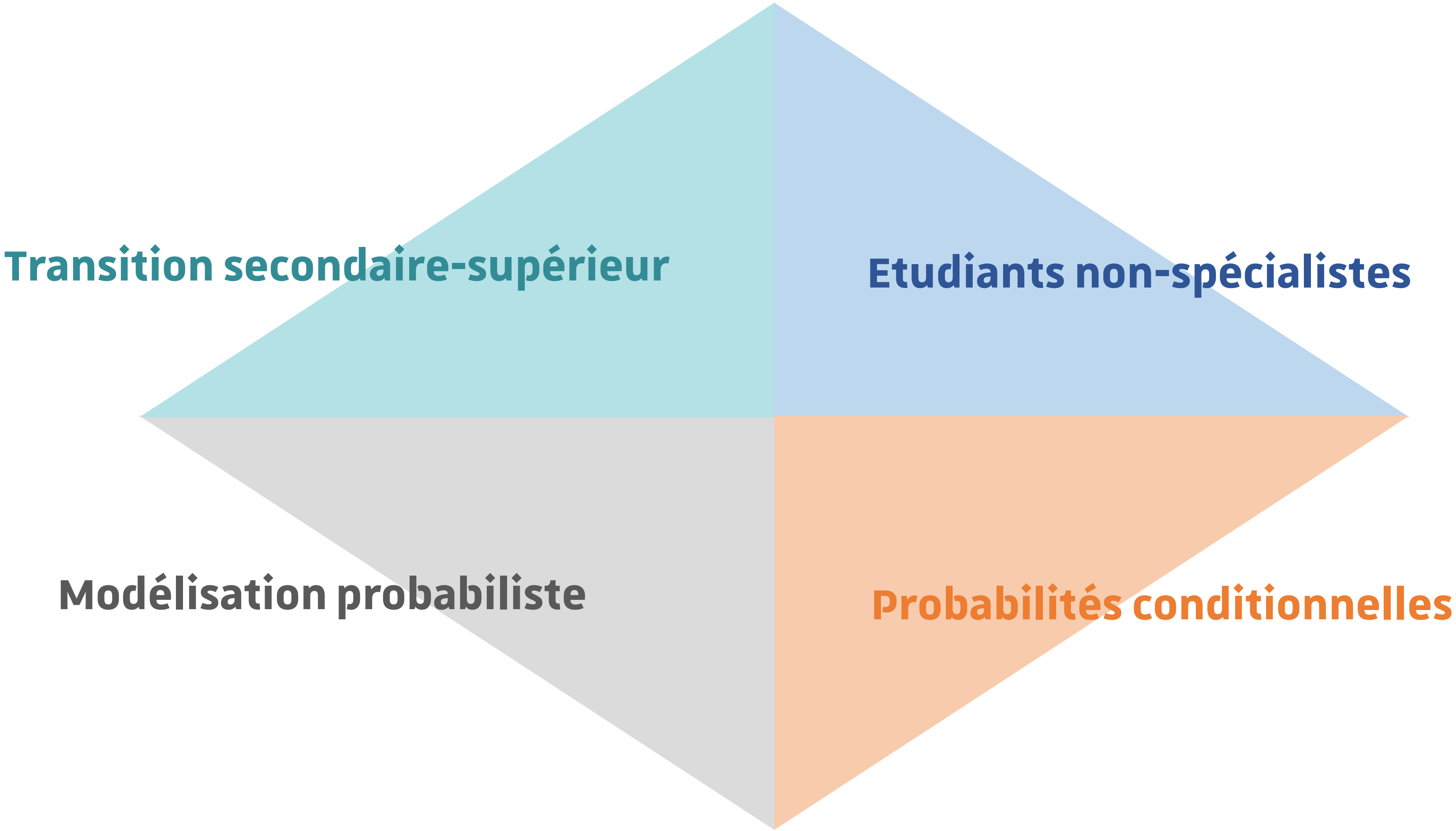
Parmi les compétences mathématiques à travailler « **représenter** : *choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registres* ».

	Seconde	**1ère math spé.**	**Tale math spé.**	**Tale math comp.**
Thèmes	Modélisation de situations aléatoires simples	Probas conditionnelles et VA discrètes	Dénombrement, schéma de Bernoulli, somme de VA, LGN	Lois discrètes, lois continues, inférence bayésienne
Arbre de dénombrement	*Dénombrer*	*Représenter, Construire, utiliser*		
Arbre pondéré			*Représenter, exploiter*	*Représenter*
Langue naturelle		*Passer de l'un à l'autre*		
Registre symbolique				
Tableau croisé		*Construire, utiliser*		
Représentation graphique (diagramme en bâtons)				*X (binomiale et géométrique)*
Représentation graphique de fonction				*Représenter une proba comme une aire*
Autre	*Dénombrer à l'aide de tableau*	*Comment représenter la loi d'une VA ?*	*Dénombrement :utiliser une représentation adaptée (arbre, tableau, diagramme)*	*Représentation graphique (discret), exploiter ou construire ?*

Arbre très présent dans les programmes, également en tant qu'outil de preuve : « *un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve* » (programme 2011-2020)

4 | Un exemple d'analyse didactique de la transition secondaire-supérieur dans le cas des probabilités conditionnelles

Contexte scientifique de la recherche



Contexte scientifique (1)

Transition secondaire-supérieur (Gueudet & Vandebrouck, 2021)

- Difficultés liées aux contenus
- Changement de cultures entre le secondaire et l'université
- Nouvelles attentes de l'institution et des enseignants
- Pratiques des enseignants et moyens d'actions sont différents

Contexte scientifique (2)

Spécificités des étudiants non-spécialistes

- Enseignement des mathématiques déconnecté des attentes et besoins des non-spécialistes (Gonzalez-Martin et al., 2021)
- Activité de modélisation auprès d'étudiants non-spécialistes
→ permet meilleure perception de l'utilité des mathématiques
- Spécificité de la biologie : relations math/bio très fortes, pourtant étudiants éprouvent peu d'intérêt pour les matières quantitatives (Chiel, McManus et Shaw, 2010)

Contexte scientifique (3)

Enseignement des probabilités conditionnelles

- Enseignement basé sur des techniques de dénombrement → difficultés de compréhension des concepts (Amrani & Zaki, 2015)
- Difficultés à interpréter les quantités numériques et à distinguer probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection (Huerta, 2014)
- Difficultés à inverser le conditionnement si conception « temporelle » de la probabilité conditionnelle systématisée (Diaz & De la Fuente, 2007)
- Conception « cardinaliste » est une cause de difficulté (Totohasina, 1993 ; Parzysz, 2011) → préférer des situations où il est impossible d'avoir recours aux effectifs

Méthodologie de la recherche

Période de la recherche : 2018-2020

Choix du thème et des terrains : lois continues et probabilités conditionnelles

→ Secondaire :

- une classe de terminale série scientifique, effectif : 29 élèves
- enseignante experte du point de vue didactique
- 6 séances dont 1 séance de TP (8h au total)

→ Supérieur :

- une L1 de biologie dans une Université de taille moyenne, effectif : environ 600 étudiants
- enseignants d'Université : MCF en mathématiques pures
- 2 séances : 1 CM et 1 TD (4h au total)

Méthodes d'analyse retenues : analyse épistémologique et curriculaire du savoir ; analyse des supports (manuel, fascicule d'exercices, diapositives de cours) et analyse de séances

Doukhan, 2022

Méthodologie - Dans le cadre de cet exposé :

- Comparaison des deux épisodes, l'un au lycée, l'autre à l'université
- Lycée - épisode n°3 de la séance n°4 -*Travail en autonomie sur un extrait de sujet de baccalauréat*

Date	Durée	Thème principal	Présence	Film	Synopsis
08/10/2018	1h	Séance 1 : cours (partie I : Probabilités conditionnelles)	non	non	non
15/10/2018	2h	Séance 2 : cours (partie II : Arbres pondérés) + exercices	oui	non	oui
16/10/2018	2h	TP	x	x	x
05/11/2018	2h	Séance 3 : cours (partie III : Indépendance de deux évènements)	non	non	non
19/11/2018	1h	Séance 4 : extraits de sujets de baccalauréat	oui	oui	oui
26/11/2018	1/4h	Séance 5 : extraits de sujets de baccalauréat	oui	oui	oui

Observations en classe de Terminale scientifique – Probabilités conditionnelles

n° de l'épisode	Thème de l'épisode
1	Exercice sur les nombres complexes à préparer en dehors de la classe et présenté par un élève.
2	Questions succinctes et posées oralement par l'enseignante sur le cours de la fois précédente : rappeler la formule de Poincaré qui donne la probabilité d'une union, rappeler le critère d'indépendance de deux évènements, rappeler la formule des probabilités totales.
3	Travail en autonomie sur un extrait de sujet de baccalauréat
4	Travail en autonomie sur un extrait de sujet de baccalauréat

- Université - épisode n°4 de la séance de TD - *Exercice 7 : calcul d'une probabilité conditionnelle à partir d'un énoncé en langage naturel*

Date	Durée	Thème principal	Présence	Film	Synopsis
01/02/2019	2h	Cours magistral (CM2) sur les probabilités conditionnelles	oui	non	oui
05/02/2019	2h	Séance de travaux dirigés (TD2) sur les probabilités conditionnelles	oui	non	oui

Observations en L1 de biologie – module de probabilités

n° de l'épisode	Thème de l'épisode
1	Exercice 1 : étudier l'indépendance d'évènements dans une configuration d'équiprobabilité
2	Exercice 3 : calculs d'intersection d'évènements et de probabilités conditionnelles
3	Exercice 5 : associer les valeurs numériques d'un énoncé à des probabilités et calcul d'une probabilité conditionnelle
4	Exercice 7 : calcul d'une probabilité conditionnelle à partir d'un énoncé en langage naturel

Doukhan, 2022

Analyse de la séance de lycée

En amont de cet épisode n°3 il y a eu un moment de questions permettant de remobiliser des connaissances.

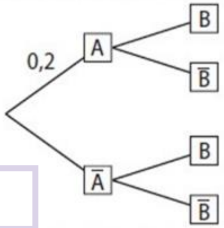
(1.a) Type de tâches : compléter un arbre de probabilités, présentant les variations :

- *à partir d'un énoncé en langage naturel*
  - →impacte l'activité de l'élève dans le traitement de la tâche car induit une conversion de registres
- *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte.*
  - → l'organisation du raisonnement est impactée, l'élève n'a pas à identifier les évènements en jeu
- *les données sont en fréquences relatives.*
  - →impacte l'activité de l'élève dans le traitement : les données sont déjà dans le « bon » format

Sujet D

Capacités mises en œuvre
- *Compléter un arbre de probabilités*
- *Calculer et utiliser des probabilités conditionnelles*
- *Tester l'indépendance de deux événements*

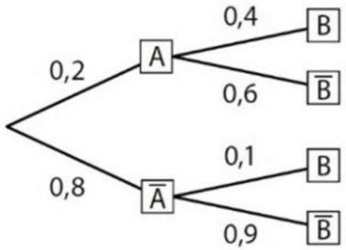
Une revue est proposée en deux versions : papier ou électronique. Il est possible de s'abonner à une seule des deux versions ou de s'abonner simultanément aux deux versions. Un centre d'appel est chargé de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que :
– lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par le centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à la version papier est égale à 0,2 ;
– s'il s'abonne à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à la version électronique est égale à 0,4 ;
– s'il ne s'abonne pas à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne à la version électronique est égale à 0,1. Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par le centre d'appel. On note :
– A : l'événement « la personne s'abonne à la version papier » ;
– B : l'événement « la personne s'abonne à la version électronique ».



1. a. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
b. Donner la probabilité de $\overline{B}$ sachant A et celle de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$.
2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique.
b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à la version électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à la version papier ?

Sujet D

1. a.



b. $P_A(\overline{B}) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}9$.
2. a. $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.
b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}16$.
c. A et B ne sont pas indépendants :
$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}16 = 0{,}032 \neq P(A \cap B)$.
3. $P_B(A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}16} = \dfrac{1}{2}$.

Enoncé du sujet D (à g.) – Corrigé issu du manuel du professeur (à d.)
Extraits du manuel Indice

Doukhan, 2022

Analyse de la séance de lycée

(1.a) Variations déjà rencontrées et traitées par les élèves :

- *à partir d'un énoncé en langage naturel*
- *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte.*
- *les données sont en fréquences relatives.*

[P] : *Faites attention aux mots dans l'énoncé, qu'est-ce qu'on nous demande exactement ?*

[E] : *Reproduire et compléter.*

→ Référence à la transformation de représentation

(1.b) Type de tâches : lire les données présentes sur un arbre, avec variation : *donner la valeur de la probabilité d'un évènement représenté sur l'arbre*

[P] : *C'est donner ceci cela. Donc il n'y a pas de calcul, […] c'est une probabilité conditionnelle.*

→ Elle prend en charge la reconnaissance du type de tâche

Sujet D

Capacités mises en œuvre

- *Compléter un arbre de probabilités*
- *Calculer et utiliser des probabilités conditionnelles*
- *Tester l'indépendance de deux événements*

Une revue est proposée en deux versions : papier ou électronique. Il est possible de s'abonner à une seule des deux versions ou de s'abonner simultanément aux deux versions. Un centre d'appel est chargé de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que :

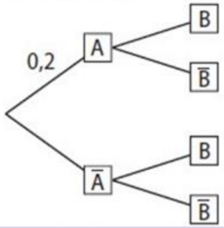
– lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par le centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à la version papier est égale à 0,2 ;

– s'il s'abonne à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à la version électronique est égale à 0,4 ;

– s'il ne s'abonne pas à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne à la version électronique est égale à 0,1. Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par le centre d'appel. On note :

– A : l'événement « la personne s'abonne à la version papier » ;

– B : l'événement « la personne s'abonne à la version électronique ».



1. a. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

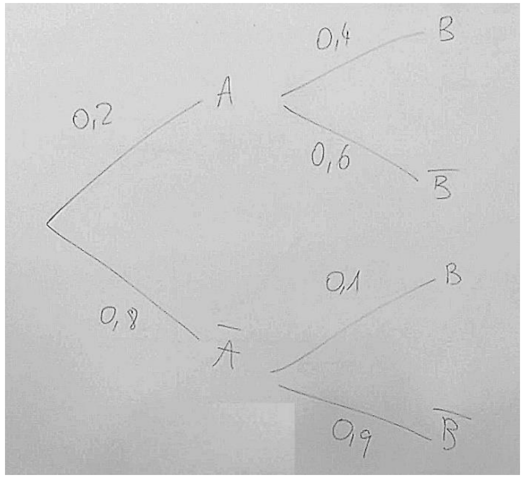
b. Donner la probabilité de $\overline{B}$ sachant A et celle de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$.

2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique.

b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.

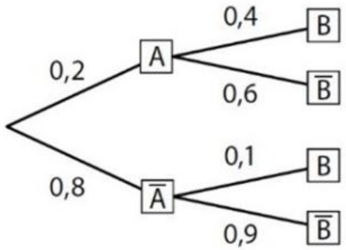
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à la version électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à la version papier ?



Sujet D

1. a.



b. $P_A(\overline{B}) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}9$.

2. a. $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.

b. $P(B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}16$.

c. A et B ne sont pas indépendants :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}16 = 0{,}032 \neq P(A \cap B).$$

3. $P_B(A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}16} = \dfrac{1}{2}$.

Enoncé du sujet D (à g.) – Corrigé issu du manuel du professeur (à d.)
Extraits du manuel Indice

Doukhan, 2022

Analyse de la séance de lycée

(2.a) Type de tâches : calculer la probabilité d'une intersection, présentant la nouvelle variation :

- *étant donné que la situation a déjà été représentée par un arbre*
  - → impacte l'organisation du raisonnement et le traitement

(2.b) Type de tâches : calculer la probabilité d'un évènement simple, présentant les mêmes variations.

(2.c) Type de tâches : étudier l'indépendance de deux évènements, présentant les mêmes variations.

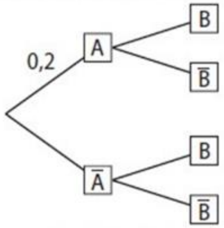
Types de tâches et variations déjà rencontrés par les élèves.

Sujet D

Capacités mises en œuvre

- *Compléter un arbre de probabilités*
- *Calculer et utiliser des probabilités conditionnelles*
- *Tester l'indépendance de deux événements*

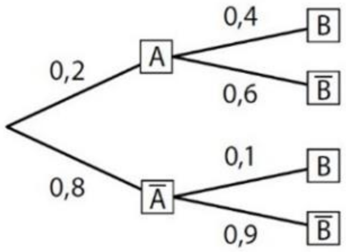
Une revue est proposée en deux versions : papier ou électronique. Il est possible de s'abonner à une seule des deux versions ou de s'abonner simultanément aux deux versions. Un centre d'appel est chargé de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que :
– lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par le centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à la version papier est égale à 0,2 ;
– s'il s'abonne à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à la version électronique est égale à 0,4 ;
– s'il ne s'abonne pas à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne à la version électronique est égale à 0,1. Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par le centre d'appel. On note :
– A : l'événement « la personne s'abonne à la version papier » ;
– B : l'événement « la personne s'abonne à la version électronique ».



1. a. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
b. Donner la probabilité de $\bar{B}$ sachant A et celle de $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$.
2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique.
b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à la version électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à la version papier ?

Sujet D

1. a.



b. $P_A(\bar{B}) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,9$.
2. a. $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.
b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,08 + 0,08 = 0,16$.
c. A et B ne sont pas indépendants :
$$P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,16 = 0,032 \neq P(A \cap B).$$
3. $P_B(A) = \dfrac{0,08}{0,16} = \dfrac{1}{2}$.

Enoncé du sujet D (à g.) – Corrigé issu du manuel du professeur (à d.)
Extraits du manuel Indice

Doukhan, 2022

Analyse de la séance de lycée

(3) Type de tâches : calculer une probabilité conditionnelle présentant les nouvelles variations :

- *sans que l'évènement apparaisse sur l'arbre.*
  → impacte la reconnaissance et le traitement : calcul et non lecture d'une branche de l'arbre
- *étant donné que les probabilités qui apparaissent dans la formule ont déjà été calculées.*
  → impacte le traitement : allègement du calcul

Type de tâches et variation déjà rencontrés par les élèves.

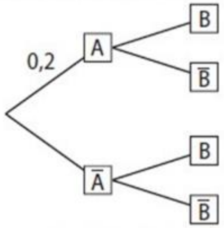
La reconnaissance du type de tâche (quel calcul dois-je faire ?) prise en charge par l'enseignante

Sujet D

Capacités mises en œuvre

- *Compléter un arbre de probabilités*
- *Calculer et utiliser des probabilités conditionnelles*
- *Tester l'indépendance de deux événements*

Une revue est proposée en deux versions : papier ou électronique. Il est possible de s'abonner à une seule des deux versions ou de s'abonner simultanément aux deux versions. Un centre d'appel est chargé de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que :
– lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par le centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à la version papier est égale à 0,2 ;
– s'il s'abonne à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à la version électronique est égale à 0,4 ;
– s'il ne s'abonne pas à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne à la version électronique est égale à 0,1. Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par le centre d'appel. On note :
– A : l'événement « la personne s'abonne à la version papier » ;
– B : l'événement « la personne s'abonne à la version électronique ».

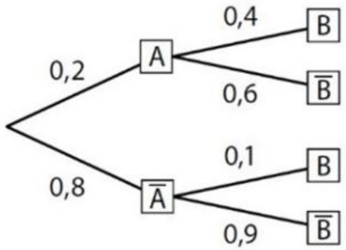


1. a. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
b. Donner la probabilité de $\bar{B}$ sachant A et celle de $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$.
2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique.
b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à la version électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à la version papier ?

C'est une structure particulière de phrase, c'est même deux phrases et j'ai quelque chose qui est certain. On me dit que... C'est classique, c'est une conditionnelle mais qui n'est pas lisible sur l'arbre, il faut ...

Sujet D

1. a.



b. $P_A(\bar{B}) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,9$.
2. a. $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.
b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,08 + 0,08 = 0,16$.
c. A et B ne sont pas indépendants :
$$P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,16 = 0,032 \neq P(A \cap B).$$
3. $P_B(A) = \dfrac{0,08}{0,16} = \dfrac{1}{2}$.

Enoncé du sujet D (à g.) – Corrigé issu du manuel du professeur (à d.)
Extraits du manuel Indice

Doukhan, 2022

Analyse de la séance de TD – Université

Seule séance de TD sur le thème des probabilités conditionnelles

Dernier exercice de la séance, les types de tâches déjà rencontrés durant le TD sont les suivants :

- *étudier l'indépendance de deux évènements*
- *calculer la probabilité d'une union d'évènements*
- *calculer une probabilité conditionnelle*
- *associer les valeurs de l'énoncé à des probabilités d'évènements*
- *calculer, à partir de la probabilité d'un évènement, la valeur de la probabilité de son évènement contraire*

Registres utilisés depuis le début de la séance : registre symbolique probabiliste et langage naturel

Exercice 7 – Problème de Bayes :

Exercice 7. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés. En plus, parmi les vaccinés il y a une personne sur 12 qui tombe malade. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice issu de la feuille de TD du cours de probabilités de première année de biologie

Doukhan, 2022

Analyse de la séance de TD – Université

Une seule et unique question : calcul d'une probabilité conditionnelle

Modélisation laissée à la charge de l'étudiant

- *à partir d'un énoncé en langage naturel.*
  → impacte la reconnaissance du type de tâche (ie. associer la tâche prescrite à un type de tâches pour lequel une technique est connue)
- *sans que les évènements n'aient été décrits ni nommés dans le texte.*
  → influe sur l'organisation du raisonnement
- *les données sont en fréquences naturelles.*
  → impacte le traitement : transformer les données en un format plus manipulable

Exercice 7. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés. En plus, parmi les vaccinés il y a une personne sur 12 qui tombe malade. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Doukhan, 2022

Exercice issu de la feuille de TD du cours de probabilités de première année de biologie

Analyse de la séance de TD - Université

Type de tâches présentant les variations : *à partir d'un énoncé en langage naturel ; sans que les évènements n'aient été décrits/nommés ; les données sont en fréquences naturelles.*

- L'enseignant prend en charge l'identification des évènements et leur donne un nom

  On considère deux évènements :

  M = le patient est malade   V = le patient est vacciné

- L'enseignant prend en charge les conversions (registre langue naturelle → registre symbolique probabiliste)

  On dispose des informations suivantes : $P(V) = \frac{1}{4}$; $P(M|V) = \frac{1}{12}$; $P(V|M) = \frac{1}{5}$

- La reconnaissance de la tâche (on cherche à déterminer $P\left(M|\overline{V}\right)$) est laissée à la charge des étudiants. L'enseignant prend en charge l'organisation et le traitement

Exercice 7. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés. En plus, parmi les vaccinés il y a une personne sur 12 qui tombe malade. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice issu de la feuille de TD du cours de probabilités de première année de biologie

Doukhan, 2022

Comparaison

Type de tâches commun aux deux exemples : **calculer une probabilité conditionnelle**

Lycée	Université
Dernière question ; utilisation résultats des questions précédentes • Réduction de l'organisation et du traitement	Nouvelle variation : il s'agit de la seule et unique question • Impacte l'organisation et le traitement. • Tâche complexe (Robert & Vandebrouck, 2014)
En commun : énoncé de la question en langage naturel ; l'évènement n'apparait pas explicitement dans l'énoncé ni sur l'arbre	
Reconnaissance (quel calcul dois-je faire ?) à la charge des élèves mais rapidement prise en charge par l'enseignante Traitement laissé à la charge des élèves	Reconnaissance de la tâche laissée à la charge des étudiants Organisation prise en charge par l'enseignant Traitement pris en charge en partie par l'enseignant
Ingrédients de la technique : -identifier l'évènement dont on cherche à déterminer la probabilité -utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ -remplacer les deux termes par les valeurs préalablement calculées	Ingrédients de la technique : -identifier les évènements en jeu -associer les valeurs de l'énoncé à des probabilités d'évènements -identifier l'évènement dont on cherche à déterminer la probabilité -utiliser la formule de Bayes pour obtenir une expression de celle-ci -exprimer chacun des termes en fonction des données de l'énoncé -résoudre une équation algébrique d'inconnue la probabilité recherchée

Doukhan, 2022

Eléments caractéristiques de la transition secondaire-supérieur en probabilités

En ce qui concerne les registres de représentations

- A l'Université pendant les déroulements, les conversions de registres sont très souvent prises en charge par l'enseignant (langue naturelle ↔ registre symbolique)

  ⟶ Les techniques associées ont-elles été suffisamment mises en fonctionnement dans le secondaire pour être désormais disponibles ?

- Une nouvelle notation apparaît à l'Université, pour une notion qui existait déjà :

$$P(A\,|B) \text{ au lieu de } P_B(A)$$

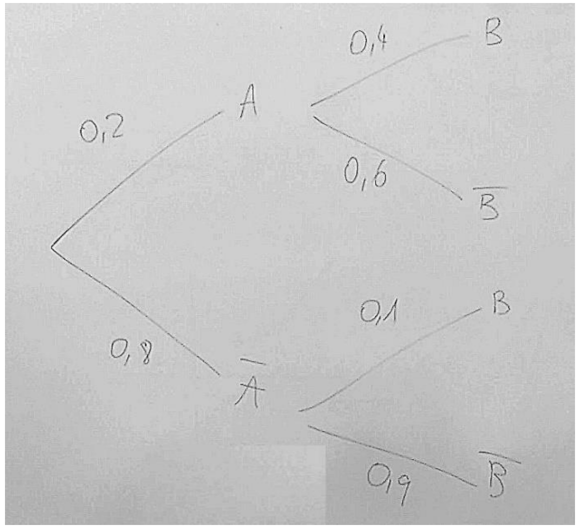
  ⟶ Nouvelle notation motivée par l'enseignant en charge du cours

Doukhan, 2022

Eléments caractéristiques de la transition secondaire-supérieur en probabilités

Pour le cas particulier des arbres de probabilités

- Disparition du registre de représentation sémiotique *arbres de probabilités* là où il a une place majeure dans le secondaire en tant que :
  - intermédiaire dans l'activité de modélisation *(ex : T-CompletArb)*
  - aide procédurale dans l'activité de traitement *(ex : T-LirArb)*
  - ingrédient de la technique *(ex : T-CalcInter)*



- Désormais modélisation se fait dans le registre symbolique probabiliste.

Doukhan, 2022

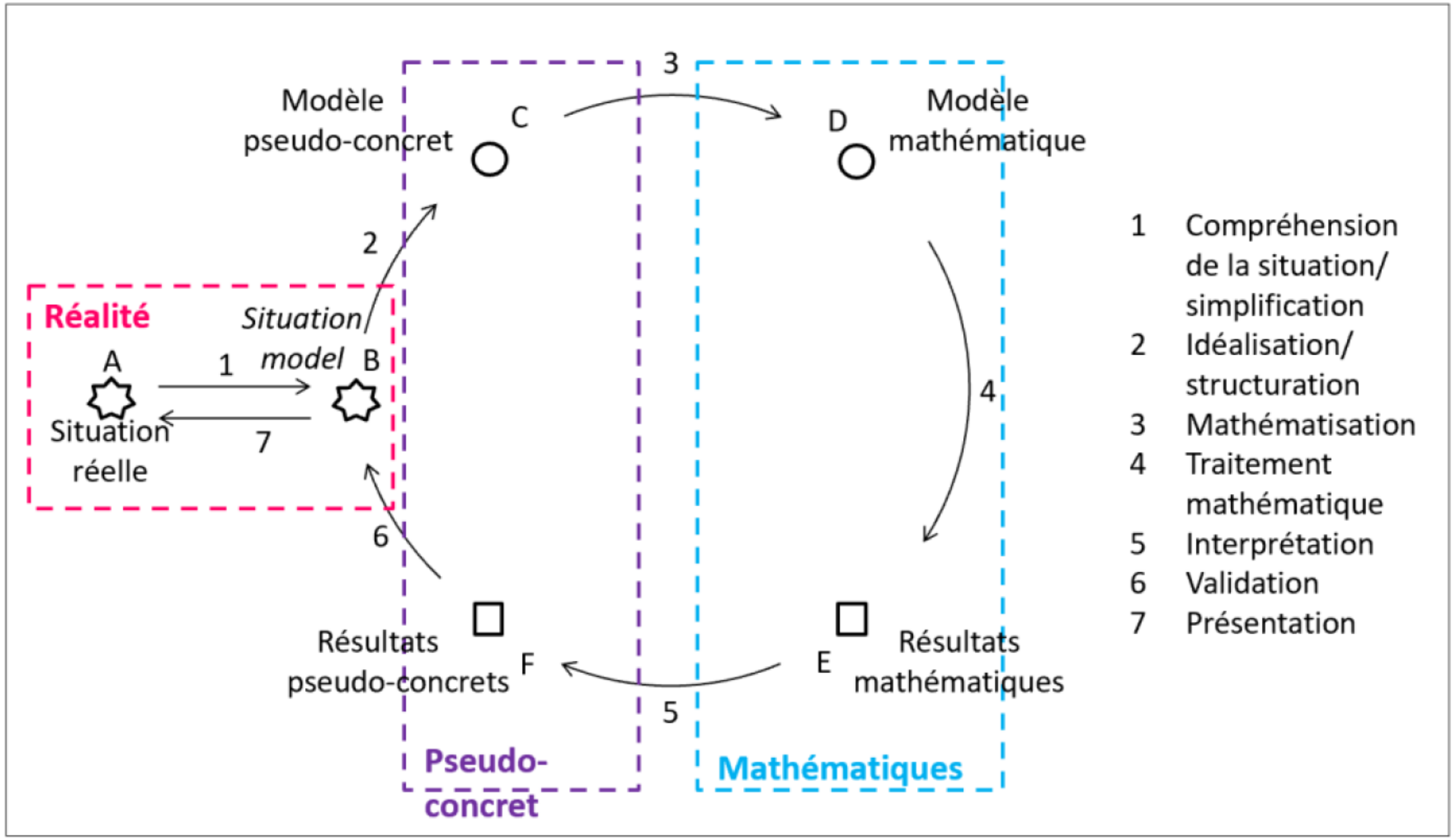
5 | Le cas particulier de la modélisation

Enseignement des probabilités et modélisation

Quelques résultats de la recherche

- Les probabilités devraient être enseignées comme outils de modélisation de phénomènes réels (Bakker et al., 2018)
- L'engagement des étudiants en biologie dans les activités de modélisation est un outil de motivation (Viirman & Nardi, 2018)
- Etude de Chiel et al. (2010) : les étudiants habituellement les plus en difficultés en math sont ceux qui progressent le plus dans la construction et l'utilisation de modèles (math) de systèmes biologiques.

Modélisation probabiliste



Cycle de modélisation (Derouet, 2022)

Mathématisation (3) fait intervenir différents registres de représentation sémiotique

Traitement math (4) et utilisation de différents registres

Analyse de l'exercice d'un test

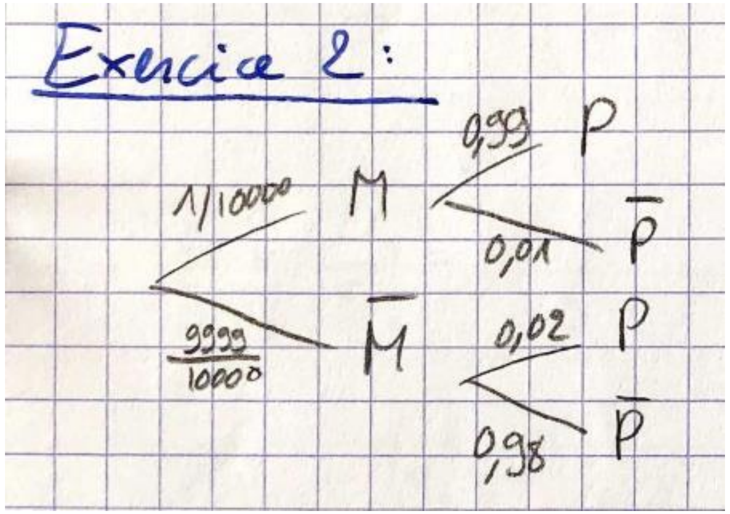
Analyse a priori

- Test composé de 3 exercices sur le thème des probabilités conditionnelles
- Test proposé à des élèves de terminale en fin d'année scolaire et à des étudiants de première année de biologie
- L'exercice 2 présente un certain travail de modélisation probabiliste (situation réelle, identification de l'expérience aléatoire, choix de l'univers, qu'est-ce qu'un bon test…)

Vous êtes directrice ou directeur du cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Le responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99% ; si une personne n'est pas malade, le test est négatif à 98%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Doukhan, 2021

Analyse de l'exercice d'un test



Quelques résultats

- Probabilité la plus souvent calculée : $P\,(M \cap T)$
- 65% identifie correctement les évènements en jeu
- 53% représente spontanément la situation par un arbre
- Aucune autre représentation n'est proposée
- Tous ceux qui représentent la situation par un arbre réussissent les premières étapes de la mathématisation (identification des évènements, des valeurs numériques)

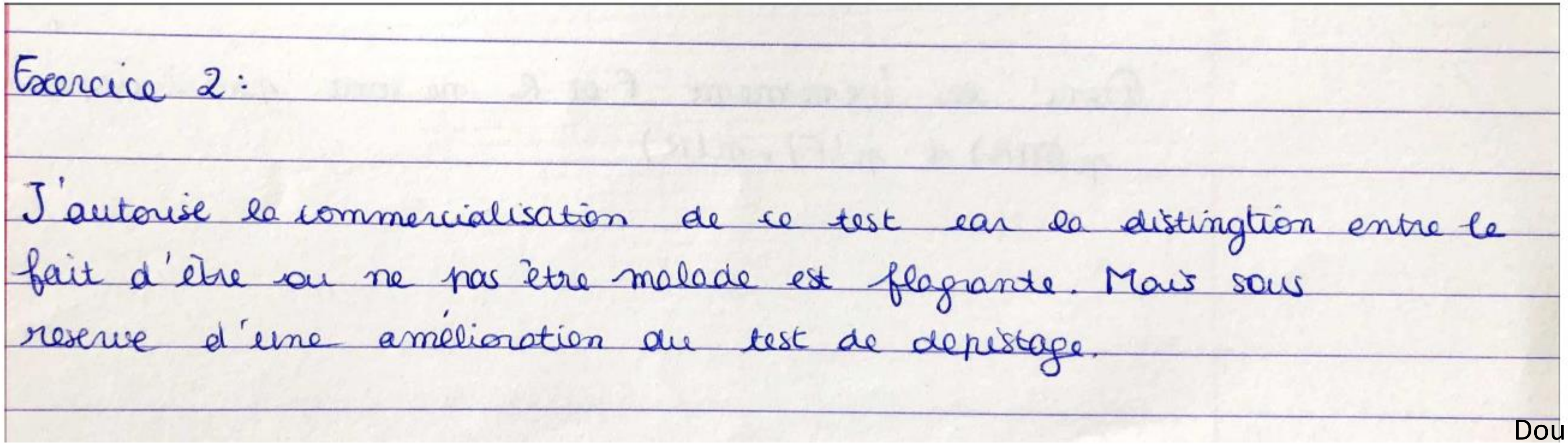
Exercice 2	élèves	étudiants	TOTAL
l'exercice est traité	27	22	**49**
la réponse est correcte	0	1	**1**
identification des évènements en jeu	18	14	**32**
T-Assoc et T-CalcBar correctement accomplis	13	13	**26**
représentation de la situation par un arbre	13	13	**26**

Doukhan, 2021

Analyse de l'exercice d'un test

84% ont proposé une réponse en langage naturel, parmi eux :

- 19 se sont appuyés sur leurs calculs
- 8 ont répondu en se basant uniquement sur leur représentation arbre
- 16 répondent sans calcul ni arbre


Exercice 2 :

J'autorise la commercialisation de ce test car la distingtion entre le fait d'être ou ne pas être malade est flagrante. Mais sous reserve d'une amélioration du test de depistage.

Doukhan, 2021

Merci de votre attention

Contact

Camille Doukhan

Maîtresse de conférences en didactique des mathématiques

camille.doukhan@espe.unistra.fr

Université de Strasbourg

lisec UR 2310

Amrani, H., & Zaki, M. (2015). Student's conceptual difficulties with respect to the notion of random variable. International Journal of Education, Learning and Development, 3(9), 65–81.
Bakker, A., Hahn, C., Kazak, S., & Pratt, D. (2018). Research on probability and statistics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, K. Ruthven (Ed.), Developing Research in Mathematics Education : twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe (pp. 46–59). Abingdon, UK : Routledge.
Chiel, H. J., McManus, J. M., & Shaw, K. M. (2010). From biology to mathematical models and back : Teaching modeling to biology students, and biology to math and engineering students. CBE-Life Sciences Education, 9(3), 248–265.
Diaz, C., & De la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. International Electronic Journal of Mathematics Education, 2(3), 128–148.
Derouet, C. (2022). Caractérisation de démarches de modélisation probabiliste. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *27*, 89-131.
Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In R. Duval (Ed.), Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 5, pp. 37–65). France : IREM de Strasbourg.
Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Berne : Peter Lang.
Doukhan, C. (2022). Comment l'articulation entre théorie de l'activité et théorie anthropologique éclaire la transition secondaire-supérieur : le cas des probabilités conditionnelles. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *27*, 133-167. https://journals.openedition.org/adsc/1432
Doukhan, C. (2021). *Modèles praxéologiques dans la transition secondaire-supérieur : le cas des probabilités en filière biologie* [thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03632311/document
Dupuis, C. (1996). *Arbres et tableaux de probabilité : analyse en termes de registres de représentation.* (Repères-IREM, N°22. p. 51-72.), IREM et IRMA de Strasbourg, https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR97152/IWR97152.pdf 20
Dupuis, C., Rousset-Bert, S., (1998). Annales de didactique et de sciences cognitives, *De l'influence des représentations disponibles sur la résolution de problèmes élémentaires de probabilité et sur l'acquisition du concept d'indépendance*, (pp. 67-87), IREM de Strasbourg, https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST98004/IST98004.pdf
Gonzalez-Martin, A., Gueudet, G., Barquero, B., & Romo-Vázquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling : advances and challenges. Research and Development in University Mathematics Education, 169–189.
Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2022). Transition secondaire-supérieur: Ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *ÉpiDEMES, 1*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03225490v2/document
Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. In E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), Probabilistic Thinking. Adances in Mathematics Education (pp. 613–639). Netherlands : Spinger.
Martignon, L., & Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. In B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Cape Town, South Africa: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education.
Nechache, A. (2016). La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire (Thèse). Université Diderot Paris 7.
Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. In A. Kuzniak & F. Pluvinage (Eds.), Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 16, pp. 127–147). IREM de Strasbourg.
Totohasina, A. (1992). Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle (Thèse). Université Rennes 1.