L’entrée dans l’analyse à la transition entre le lycée et l’université

Fabrice Vandebrouck

Université Paris Diderot

UFR de mathématiques

Laboratoire André Revuz

Avec la commission inter IREM université

CI2U

- Jean Yves Boyer, IREM de Bordeaux
- Vivianne Durand Guerrier, IREM de Montpellier
- Patrick Frétigné, IREM de Rouen
- Denise Grenier, IREM de Grenoble
- Nicolas Grenier-Boley, IREM de Rouen
- Gwenola Madec, IREM de Paris Nord
- Marc Rogalski, IREM de Paris 7
- Fabrice Vandebrouck, IREM de Paris 7

Plan

1) Des spécificités de la transition et de la démarche d'analyse du lycée à l'université
2) L 'évolution des programmes, des manuels et des pratiques, en fin de lycée, **en France**
3) Des sujets du baccalauréat Français jusqu'en juin 2009
4) Les attentes au début de l'université
5) Le profil de nos étudiants arrivant à l'université
6) *Les évolutions actuelles dans le secondaire*

1) Des travaux sur la transition entre lycée et université

- Deux nombreux travaux sur le sujet, en France :
  - M. Artigue, I Bloch, V. Durand Guerrier, G. Gueudet, **A Robert**…

- Retenons de façon générale
  - De **nouveaux types de notions** mathématiques (typiquement les espaces vectoriels)
  - Des différences dans les **niveaux de conceptualisation** des notions (qu'elles soient anciennes ou nouvelles) avec de nouvelles exigences en terme de **formalisme** et de **preuve**
  - Une **complexification des exercices** demandés
  - Une **accélération** du temps didactique et **un éventail d'exercices plus large** qui rend la routinisation beaucoup plus difficile
  - Un nouvel équilibre entre **général** et **particulier**
  - De nouvelles exigences en terme d'**autonomie** des étudiants
  - Des différences plus macroscopiques (amphi / TD, modularisation…)

Le domaine de l'analyse

- Des objets de base qui sont complexes

  nombres réels (limite), suites numériques, fonctions numériques

- L'exemple des **fonctions numériques**
  - De multiples **cadres** d'apparition (géométrique, physique, économique…)
  - De multiples **registres de représentations** (numérique, graphique, algébrique, symbolique, formel)
  - Une double fonctionnalité (comme **outil** ou comme **objet**)
  - Plusieurs niveaux de conceptualisation (théorie APOS de Dubinsky)
    - **Processus** ($x \rightarrow f(x)$, conception dynamique)
    - **Objet** (la fonction *f* et ses propriétés : parité, croissance… conception statique)
    - Schéma (ensemble de fonctions, vérifiant des propriétés similaires, comparaison de fonctions …)
  - Différents **points de vue** possibles sur l'objet *f*
    - Ponctuel (très relié au niveau de conceptualisation processus)
    - Global (caractéristique des études globales du lycée)
    - Local (nécessaire pour entrer dans la démarche d'analyse)

La démarche de l’analyse

Un fonctionnement qui s’oppose à la démarche algébrique :

- approximation des nombres (**la notion de base en analyse est celle de limite**, notion spécifique de l’égalité entre deux nombres réels…)
- approximation des suites et des fonctions (équivalence, négligeabilité, formules de Taylor, développements limités…)

→ **Majorer, minorer, encadrer** (à partir d’un certain rang, à epsilon près, jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires)

→ Un fonctionnement qui ne doit pas pour autant sacrifier les **démarches algébriques simplificatrices** (algèbre des limites…)

2) Évolution des programmes du point de vue de l’usage des limites

- Avant 1982 en France : emploi précoce du langage formalisé souvent hermétique aux élèves (maths modernes)
- Réforme majeure en 1982 :
  - Mise en avant de **méthodes numériques et graphiques pour motiver** le travail formalisé
  - Apparition des suites et fonctions de référence pour l’étude des limites, **majorations, minorations, encadrements** sur des intervalles
  - Et des problèmes sortant du champ d’application de ces méthodes pour comprendre l’intérêt d’un passage du quantitatif au qualitatif et à **la formalisation** qui reste définie pour des limites en 0.

1985 : l’invasion des fonctions de références

- Introduites dès la seconde et étudiées globalement, leurs convergences sont ensuite **admises par intuition** (numérique, graphique)
- **Définition de la limite** par critère suffisant à partir des fonctions de références (**disparition de la formalisation**)
- Parallèlement**, l’algèbre des limites disparaît des programmes**.
  - Le recours à l’approximation est donc imposé. Du point de vue technique, les majorations, minorations, encadrements (et le théorème des gendarmes) deviennent des outils essentiels
  - Des aberrations dans les manuels et les pratiques effectives en classe…

Exemple de Transmath 1985

Exemple 2 : **f est la fonction $h \longmapsto h^3+h^2+1$.**

On a tout lieu de penser que si h est proche de 0, alors h^3 et h^2 le sont aussi, donc que $f(h)$ est proche de 1. D'où la conjecture : f a pour limite 1 en 0.
Pour le montrer, écrivons que $f(h)-1=h^3+h^2=h^2(h+1)$.
Ainsi, pour tout réel h,

$$|f(h)-1|=|h^2(h+1)|=|h^2|\,|h+1|.$$

Pour arriver à une écriture du type : $|f(h)-1|\leqslant\lambda|h^2|$, il suffit de trouver un réel λ et un intervalle I de centre 0 tel que pour tout h de I on ait $|h+1|\leqslant\lambda$.
Choisissons par exemple $\mathrm{I}=]-1;1[$; $h+1$ est alors dans $]0;2[$ et donc : $|h+1|<2$.
Donc, pour tout réel h tel que $|h|<1$, on a :

$$|f(h)-1|\leqslant 2\,|h^2|$$

et d'aprés l'affirmation du paragraphe **a.** (cas où $\lambda=2$ et $n=2$) :

$$f \text{ a pour limite 1 en 0} \quad \text{et} \quad \lim_{0}\,(h \longmapsto h^3+h^2+1)=1.$$

Cependant :

- Un gain pour les élèves, reconnu par les enseignants
  - Apprendre à **minorer, majorer, encadrer**
  - Apprendre à **choisir des fonctions de références** raisonnables pour la comparaison
  - Apprendre à **approximer**
  - Apprendre à utiliser la **valeur absolue**
  - Apprendre à **« coincer » la variable** sur un intervalle judicieux autour de la valeur considérée
  - Apprendre à repérer les **termes algébriques prépondérants**
- **Des procédures qui permettent au point de vue local de vivre (algébriquement, graphiquement, numériquement) qui préparent à la définition formalisée tout en étant moins lourdes**

1990 : un juste équilibre entre fonctions de références et algèbre

- Les définitions par conditions suffisantes (par rapport aux seules fonctions de références) disparaissent
- **L'approche intuitive de limite** par le **comportement des fonctions de références** demeure (numérique, graphique)
- **Ré-introduction des rudiments de l'algèbre des limites**

  → La majoration, la minoration, l'encadrement par des fonctions de références ne sont plus le passage technique obligé **mais ils restent utilisés**.

2001 : l’algébrisation débordante

- **Notions intuitives** de limite de suites et de fonctions
- Disparition des **définitions utilisables** mais
  - Des expressions du type « proche de » « de plus en plus proche » « aussi proche que l’on veut », par exemple « Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a »
- Mise en avant de « **règles opératoires** » pour l’algèbre des limites (admises)
- Apparition de la dérivabilité avant la notion de continuité. Seul le *langage de la continuité* est visé. **L’étude de la continuité locale** n’est plus par exemple un objectif du programme.
- Du côté **global**, le théorème des accroissements finis et l’inégalité des accroissements finis disparaissent du programme. On admet donc les résultats sur les variations. Un champ de problèmes classiques disparaît aussi de ce côté là.

3) Au baccalauréat

- Une démarche fortement basée sur la représentation **algébrique** et des **techniques algébriques**
- Des études **globales** de fonctions articulées avec
  - des problèmes **ponctuels** (calcul d'une valeur, d'une solution d'équation fonctionnelle…)
  - des problèmes **pseudo-locaux** (essentiellement des calculs de limites, encapsulés dans de l'algèbre)
- Le registre **graphique** est essentiellement là pour illustrer les résultats algébriques : un statut d'**objet** mais pas d'**outil** pour le cœur d'une activité mathématique
- Du point de vue des tâches elles mêmes, on retrouve les phénomènes de complexification qui dépassent le domaine de l'analyse
  - Tâches découpées, aides nombreuses
  - Organisation routinière, peu d'adaptation en jeu
  - Pas d'autonomie dans les choix de représentations

Les derniers sujets de baccalauréat S en France

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Métropole, baccalauréat juin 2006

EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Métropole, baccalauréat juin 2007

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Métropole, baccalauréat juin 2009

Domaine de travail centré sur l’algébrique en classe de terminale :

RELIEF	**Travail Ponctuel**	**Travail Global**	**Travail Local**
Tables de valeurs	OUI	NON	NON
Formules	OUI	OUI	OUI
Graphes	OUI	OUI	OUI
Tables de variations	NON	OUI	NON

Domaine de travail centré sur l'algébrique en classe de terminale :

	Travail Ponctuel	**Travail Global**	**Travail Local**
Tables de valeurs	OUI	NON	NON
Formules	OUI	OUI	OUI
Graphes	OUI	OUI	OUI
Tables de variations	NON	OUI	NON

2. Considérons la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

La fonction g est continue en tout réel $x \geq 1$ et vérifie $g(1) = 1$ et $g(2) = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

L'inégalité $g(1).g(2) < 0$ implique l'existence d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$ ou encore tel que $f(\alpha) = \alpha$.

D'autre part, la fonction g est dérivable en tout réel $x \geq 1$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - 1$.

On en déduit que g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Par suite, le réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

3. a. L'inégalité $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ est immédiate.

b. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $|f'(t)| \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout réel $t \geq 1$.

On déduit de l'égalité $f(\alpha) = \alpha$ et de l'inégalité des accroissements finis que $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$, pour tout réel x de $[1, +\infty[$.

4. a. La calculatrice donne 2 ;1.7071 ; 1.7654 ; 1.7526 ; 1.7554 ; 1.7548 ; 1.7549 ; 1.7549 .

b. On vérifie facilement que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \geq 1$. Il résulte alors de la question 3.b. que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Travail local (avec usage de la valeur absolue)

c. En utilisant un raisonnement par récurrence, on obtient $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$, $n \in \mathbb{N}$.

Le résultat découle du fait que $u_0 = 2$ et $1 < \alpha < 2$.

d. On trouve $n_0 = 7$.

e. Il suffit de prendre $\alpha = 1.7549$.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$.

Complexité des fonctions en jeu

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

Reconnaissance de la dérivabilité en 0+

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tableau de variation « outil »

Tracer $(\mathscr{C})$. (On précisera la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $]-\infty, 0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Tracer (Γ). (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

Graphique (C) « outil »

Domaine de travail centré sur l'algébrique en France :

- **Travail appauvri** par rapport au « relief » de l'analyse et à l'enjeu de l'analyse au lycée
  - Dialectique **outil / objet** des différentes **représentations**
  - Jeux entre les différents **cadres**, les différents **points de vue**
  - Passage des **processus** aux **objets** mathématiques
- Perte du **point de vue local**
  - Perte du travail sur **l'approximation numérique**, le calcul d'erreur (en manipulant des **valeurs absolues**)
  - Perte du travail sur des **inégalités (minorer, majorer, encadrer** avec des fonctions de références) qui préparait à la formalisation
  - Perte du **repérage de termes prépondérants** dans les expressions algébriques complexes
  - Pas de **travail graphique** sur les voisinages et les limites

4) L’ analyse au début de l’université en France

- On part de la **complétude de R** (atelier d’Imène Ghedamsi)
  - Convergence des suites croissantes et majorées *ou*
  - Convergence des suites adjacentes *ou*
  - Convergences des suites de Cauchy …
- Le premier théorème de l’analyse nécessite la **formalisation** de la définition de limite
  - L’image d’une **suite convergente** par une **fonction continue**
- Un jeu entre les deux points de vue **global** et **local**
  - Calculs de limites complexes (de suites et de fonctions)
  - Négligeabilité, équivalents
  - Formules de Taylor, encadrements globaux, développements limités…
- Un nécessaire élargissement vers l’**analyse fonctionnelle** (et le niveau de conceptualisation Schéma dans la théorie APOS)

Arrivée du formalisme

Exercice 10 Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est paire ;
3. f ne s'annule jamais ;
4. f est croissante ;
5. f n'est pas la fonction nulle ;
6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
7. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
8. f est inférieure à g ;
9. f n'est pas inférieure à g.

Exercice 11 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.

Élargissement vers le langage ensembliste et de nouvelles notions attachées

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

La même fonction numérique qu'en terminale mais

- un traitement ensembliste
- de nouvelles notions : injectif, surjectif
- l'étude des variations n'est pas centrale (4.)
- le graphique n'est pas demandé

Un rapport aux représentations graphiques différent

On considère l'application f de R dans R définie par $f(x)=|x|$.

Déterminer les images directes suivantes : $f(\{-1,2\})$; $f([-3,-1])$; $f([-3,1])$.
Déterminer les images réciproques suivantes : $f^{-1}(\{4\})$; $f^{-1}(\{-1\})$; $f^{-1}([-1,4])$.

- Plus un **objet** « sacralisé » dont qui doit être construit précisément, complété…
- Mais un **outil** pour des preuves ou des activités

Élargissement vers la généricité

Exercice 9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b}$ l'application

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b. \end{aligned}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a, b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors $a = c$ et $b = d$.
3. *facultatif :* Interpréter la dernière condition en terme d'injectivité d'une certaine application.
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son inverse.

Exercice 12 Soient a et b des nombres réels et soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + b} - x\sqrt{x}.$$

Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

De nouvelles fonctions

Exercice 4. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on définit l'application χ_A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \chi_A(x) & = & 1 & \text{si } x \in A \\ \chi_A(x) & = & 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Dessiner le graphe de la fonction χ_A lorsque A est la partie de $\mathbb{R}$: $A = [1;2[\cup\{3\}$.

Exercice 7. On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,x^2) \end{array}$$

1 Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

2 Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Le point de vue local

Exercice 9. Calculez le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$i)\ f(x) = e^{x+\cos x}$;

$ii)\ g(x) = \sqrt{7 + \sqrt{1+3x}}$.

En termes de notions :
Limites, continuité, dérivabilité…
Équivalents, négligeables, relations de comparaisons locales

Exercice 10. Etudiez le comportement au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[3]{x^3-x}$.

Exercice 11. Calculez les limites suivantes :

$$i)\ \lim_{x,0} \frac{(\cos x - e^x)^2 + \sin^2 x}{(\cos x - e^x) - \sin^5 x};$$

$$ii)\ \lim_{x,0} \frac{(\cos x - e^x)^2 - \sin^2 x}{(\cos x - e^x) + \sin^2 x}.$$

En terme de compétences :
-Recherches des termes prépondérants
- Faire des graphiques localement **pour piloter les calculs algébriques**

5) Un profil de nos étudiants arrivant à l'université

Deux questionnaires à l'entrée à l'université

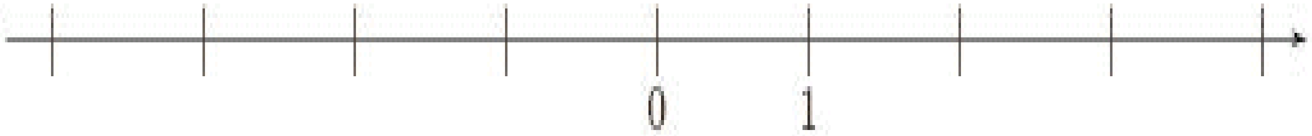
- Université Paris 13, année 2004-2005
  - Sur l'usage de la valeur absolue
- Plusieurs universités, années 2006 à 2008
  - Sur la logique
  - Sur des calculs de limites où l'adoption d'un point de vue est pertinente

Traitement des valeurs absolues

1. a) x est un nombre réel tel que $|x-3| < 1{,}2$.

Traduire cette inégalité à l'aide d'un intervalle : ....

b) Sur la droite des réels ci-dessous, représenter les nombres réels tels que $|x+1| < 0{,}5$.



2. Exprimer au moyen de valeurs absolues les expressions suivantes :

a) $-1 \leqslant x \leqslant 3$ ....

b) $x \in]2;3[$ ....

c) $5{,}5 \leqslant x \leqslant 6{,}5$ ....

Traitement des valeurs absolues

20% BR - 35%NR

1. a) x est un nombre réel tel que $|x-3| < 1{,}2$.

Traduire cette inégalité à l'aide d'un intervalle : ....

b) Sur la droite des réels ci-dessous, représenter les nombres réels tels que $|x+1| < 0{,}5$.

21% BR - 31%NR

2. Exprimer au moyen de valeurs absolues les expressions suivantes :

a) $-1 \leqslant x \leqslant 3$ ....

8% BR - 64%NR

b) $x \in]2;3[$ ....

7% BR - 69%NR

c) $5{,}5 \leqslant x \leqslant 6{,}5$ ....

3,5% BR - 70%NR

Comment alors traiter formellement la notion de limite d'une fonction et les manipulations du type…

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$- \varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$| f(x) - L | < \varepsilon$???

Donner la négation mathématique de chacune des phrases suivantes

1 - Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

2 - Certains nombres entiers sont pairs.

3 - **Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.**

Résultats sur 340 copies analysées

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

NR 98 étudiants (29%)

BR 34 étudiants (10%)

BR signifie être synonyme de “Il existe au moins un entier divisible par 4 ne se terminant pas 4” (sémantique)

155 réponses (45,5%) sont données sous la forme **d’une implication** avec des **positions variées pour la négation** comme dans les exemples suivants :

Si un nombre entier est divisible par 4, **alors** il ***ne*** se termine ***pas*** par 4

Si un nombre entier ***n'***est ***pas*** divisible par 4, **alors** il ***ne*** se termine ***pas*** par 4

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ***ne*** se termine ***pas forcément*** par 4

Si un nombre entier est divisible par 4, ***il est possible*** qu'il *ne* se termine ***pas*** par 4

Pas de contrôle syntaxique,
ni même de contrôle sémantique

Des difficultés prévisibles…

Une suite numérique *u* converge vers le réel *l ssi*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que

$$n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

On montre rapidement en cours que

(1) f est continue en a ssi

(2) pour toute suite (X_n) convergente vers a la suite f(X_n) converge (vers f(a)).

Pour montrer (2) implique (1), on montre que non(1) implique non(2). Quelle est la négation de (2) ???

Il existe une suite (X_n) convergente vers a telle que f(X_n) ne converge pas vers f(a)

Que signifie en premier lieu “*u* ne converge pas vers *l* “ ?

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier naturel N tel que $n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Établir cette négation nécessite d'être capable :

- d'identifier la quantification universelle implicite sur *n* devant l'implication
- de mettre en œuvre la règle sur la négation des phrases quantifiées lorsque les quantificateurs sont en tête de formule, avec ici une alternance de trois quantificateurs : *universel , existentiel, universel.*
- de donner la négation d'une implication

  Les résultats de notre questionnaire montrent que de nombreux étudiants arrivant dans nos universités ne sont pas préparés pour ça.

Parmi ces suites données par leur terme général, quelles sont celles qui ont une limite quand *n* tend vers l'infini ? Précisez cette limite quand elle existe.

- 1-1 : $(-1)^n + 1$
- 1-2 : $\sqrt{n} - n$
- 1-3 **sin(2π*n*)**
- 1-4 **cos(** $\frac{2\pi}{n}$ **)**

Donnez les limites des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ 2-1a Limite quand *x* tend vers plus l'infini :

2-1b Limite quand *x* tend vers en 0 :

2-1c Limite quand *x* tend vers moins l'infini :

$g(x) = x^{10} e^{x}$ 2-2a Limite quand *x* tend vers plus l'infini :

2-2b Limite quand *x* tend vers 0 :

2-2c Limite quand *x* tend vers moins l'infini :

- ***j(x)*= cos(2π*x*)** . 2-3 Limite quand *x* tend vers plus l'infini :
- $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ 2-4a Limite quand *x* tend vers plus l'infini :
  2-4b Limite quand *x* tend vers 2 :

298 réponses analysées

1-1	1-2	1-3	1-4	2-1.a	2-1b	2-1c	2-2a	2-2b	2-2c
48%	46%	18%	41%	78%	9%	67%	87%	71%	55%

2-3	2-4a	2-4b
20%	53%	13%

Nos étudiants sont relativement plus à l'aide **dès que des règles algébriques peuvent être appliquées**, les différences tenant à la complexité de la forme indéterminée.

1-1	1-2	1-3	1-4	2-1.a	2-1b	2-1c	2-2a	2-2b	2-2c
48%	46%	18%	41%	78%	9%	67%	87%	71%	55%

$$l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$$ en x=2

2-3	2-4a	2-4b
20%	53%	13%

Le traitement d'une limite comme un taux de variation (**point de vue local**) est très peu disponible.

$(-1)^n + 1$ $\sqrt{n} - n$ $\sin(2\pi n)$ $\cos(\frac{2\pi}{n})$

1-1	1-2	1-3	1-4	2-1.a	2-1b	2-1c	2-2a	2-2b	2-2c
48%	46%	18%	41%	78%	9%	67%	87%	71%	55%

$\cos(2\pi x)$

2-3	2-4a	2-4b
20%	53%	13%

Les plus mauvais résultats dès que les limites ne portent pas sur des **fonctions où les règles algébriques peuvent être appliquées**

Un essai d'interprétation en terme **d'habilités à adopter des points de vue** (niveau de conceptualisation des étudiants)

Questions	Answers	Total (298)	Global (104)	Punctual (68)	Unknown (126)
1-3 $\sin(2\pi n)$	No limit	35%	**100%**	*******	*******
	0 or 1	23%	*******	**100%**	*******
	NR	27%	*******	*******	**65%**
2-3 $\cos(2\pi x)$	**No limit**	20%	**52%**	4% (*)	3%
	0 or 1	21%	15%	**73%**	**23%**

La procédure utilisée semble être souvent similaire,
que la question concerne une suite définie par une fonction
ou bien une fonction

Un essai d'interprétation en terme
d'habilités à adopter des points de vue
(niveau de conceptualisation des étudiants)

Questions	Answers	Total (298)	Global (104)	Punctual (68)	Unknown (126)
1-3 $\sin(2\pi n)$	No limit	35%	**100%**	*******	*******
	0 or 1	23%	*******	**100%**	*******
	NR	27%	*******	*******	**65%**
2-3 $\cos(2\pi x)$	No **limit**	20%	**52%**	4% (*)	3%
	0 or 1	21%	15%	**73%**	**23%**
	NR	30%	20%	10%	**49%**
1-1 $(-1)^n + 1$	No **limit**	48%	**80%**	**49%**	21%
	If odd/even	5%	3%	**9%**	5%
	NR	17%	0%	9%	**37%**

Un essai d'interprétation en terme **d'habilités à adopter des points de vue** (niveau de conceptualisation des étudiants)

Questions	Answers	Total (298)	Global (104)	Punctual (68)	Unknown (126)
1-3	No limit	35%	**100%**	*******	*******
$\sin(2\pi n)$	0 or 1	23%	*******	**100%**	*******
	NR	27%	*******	*******	**65%**
2-3	**No limit**	20%	**52%**	4% (*)	3%
$\cos(2\pi x)$	0 or 1	21%	15%	**73%**	**23%**
	NR	30%	20%	10%	**49%**
1-1	**No limit**	48%	**80%**	**49%**	21%
$(-1)^n + 1$	If odd/even	5%	3%	**9%**	5%
	NR	17%	0%	9%	**37%**

Bilan des questions sur les limites

- Les résultats confirment
  - les **habiletés des étudiants dans les manipulations algébriques**
  - **la disparition chez les étudiants du point de vue local**, spécifique de l'entrée dans la démarche d'analyse
  - **MAIS AUSSI la dissociation des points de vue ponctuel et global chez les étudiants**
- Il apparaît que
  - seuls quelques étudiants sont capables de passer d'un point de vue à l'autre
  - la majorité des étudiants sont incapables de construire un raisonnement avec l'un de ces deux points de vue, dès lors que les règles algébriques ne peuvent plus être appliquées.
  - Ils n'identifient plus ces deux points de vue possibles. Leur faire identifier les aideraient peut-être à entrer dans le local ?

- Décalages **Ponctuel - Local**
  - Pas de distinction précise entre la limite en un point *a* et la valeur en ce point *a* d'une fonction *f*
  - La limite est atteinte à partir d'un certain moment
  - **Équivalents (nuls ou non nuls) traités comme valeurs ponctuelles (une fonction nulle en zéro est équivalente à zéro)**
  - Passage automatique de Q à R dans les raisonnements par densité
- Décalages **Global - Local**
  - **Développements limités bien manipulés algébriquement mais appliqués globalement**
  - Limites des taux d'accroissement traités algébriquement
  - **Absence de distinction entre théorèmes locaux et globaux (formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange)**

Éléments de conclusion

- L’enseignement de l’analyse au lycée en France s’est trop fortement algébrisé autour de règles opératoires, évacuant un certain **relief des notions de l’analyse**, notamment les fonctions (*registres et points de vue notamment*)
  - Les fonctions semblent n’exister qu’algébriquement
  - Difficile d’utiliser les autres registres comme outils de l’activité
- Ce manque de relief, notamment l’absence du point de vue local dans les pratiques des élèves, semble un fort handicap à l’entrée à l’université
  - La complétude de R (atelier d’Imène Ghedamsi)
  - L’adoption du formalisme
  - Jeu global / local à tous les niveaux (calculs, outils, formules…)

- Les lacunes repérées sur le maniement de la valeur absolue (certainement lié au manque de travail sur des encadrements) et sur la logique n’aident pas

6) Des évolutions depuis 2010

- La réintroduction d’éléments de logique et d’algorithmique dans les programmes de lycée depuis 2010
- Des évolutions dans les sujets de baccalauréat en 2010
- *L’enrichissement des cadres de travail des fonctions avec les nouvelles technologies*

L'introduction de la logique en seconde (programme de 2010)

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulière-

L’introduction de l’algorithmique

Algorithmique (objectifs pour le lycée)

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l’activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d’Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l’aide d’un logiciel. Il s’agit de familiariser les élèves avec les grands principes d’organisation d’un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d’une valeur et mise en forme d’un calcul.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés :
- à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- à en réaliser quelques uns à l’aide d’un tableur ou d’un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- à interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n’est imposé.

L’algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

À l’occasion de l’écriture d’algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Des évolutions au niveau du baccalauréat (juin 2010) - 1

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$$

où k est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$;
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

   b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x + 2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Des évolutions au niveau du baccalauréat (juin 2010) – 2

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

   Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

   Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

   Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

   a. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

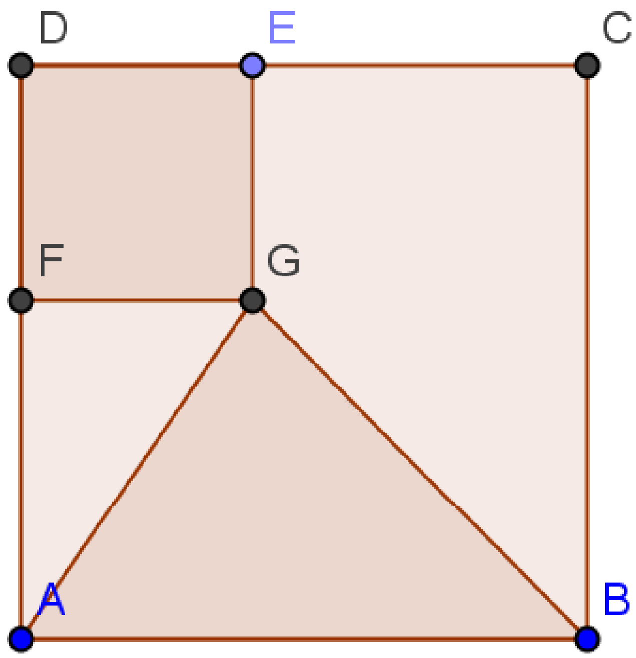
   b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

   c. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entie naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

   Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

Merci beaucoup !



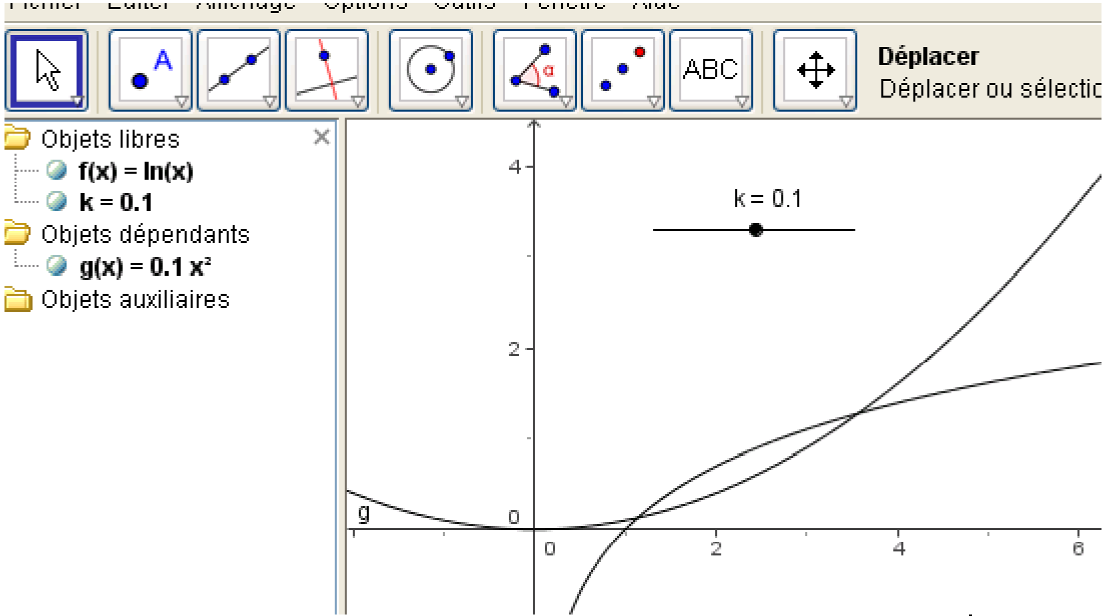
Interaction entre cadres géométrique et fonctionnel

- Une figure géométrique est construite, ici un carré ABCD
- Un point mobile E est considéré sur l'un segment
- Deux surfaces peuvent être considérées, ici le carré DEFG et le triangle GAB
- GéoGébra affiche les valeurs numériques des 2 aires considérées, ce qui permet des conjectures préalables au travail algébrique

Plusieurs questions peuvent être posées aux élèves :

- Le choix d'une variable dont dépendent les aires considérées
- La variation des 2 fonctions ou de leur somme
- Les points réalisant des extremas
- Le point pour lequel les 2 aires sont égales ou dans un certain ratio

Vers une introduction d'une épreuve pratique au baccalauréat : l'accès à la généricité



On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

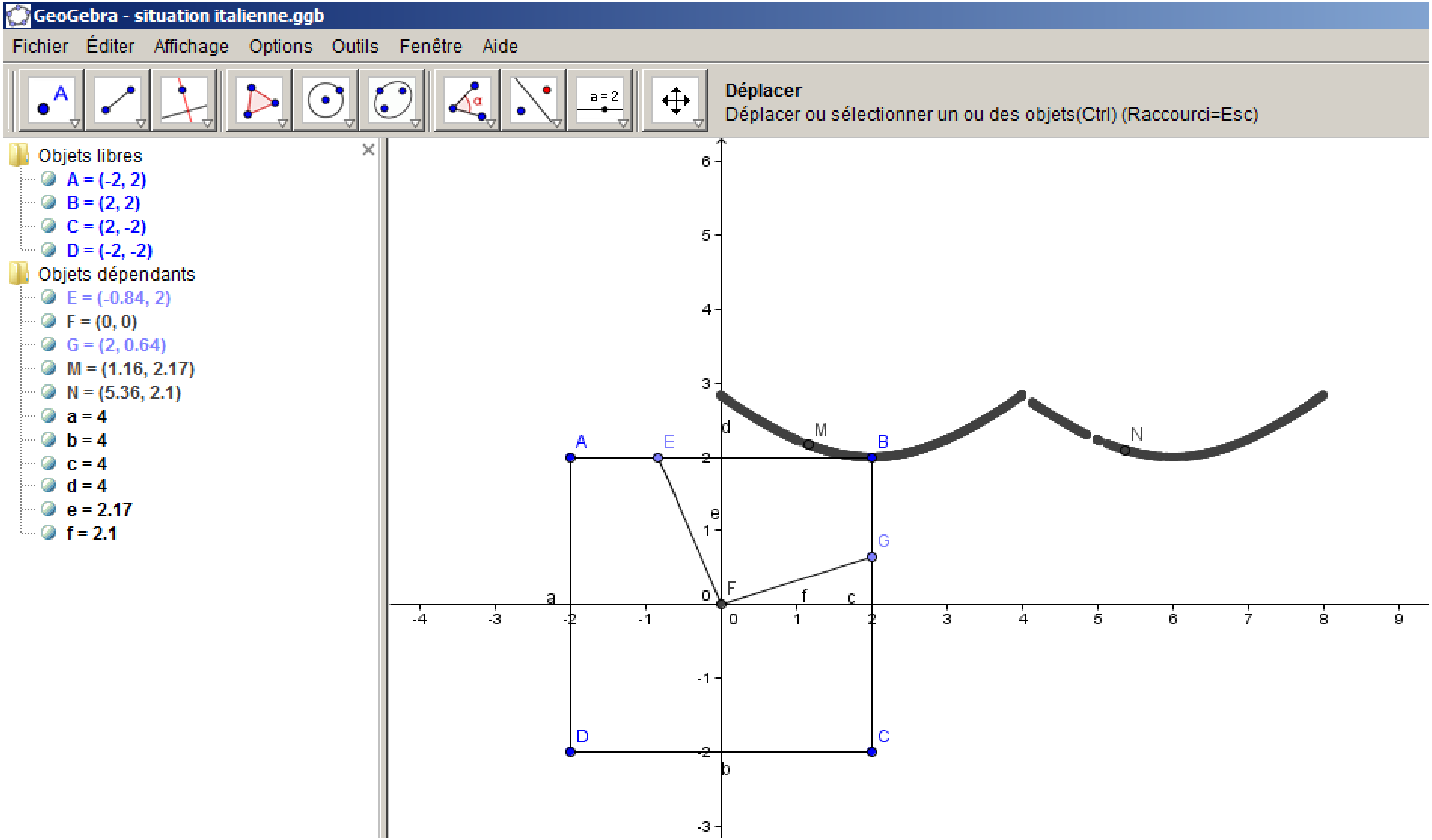
1) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

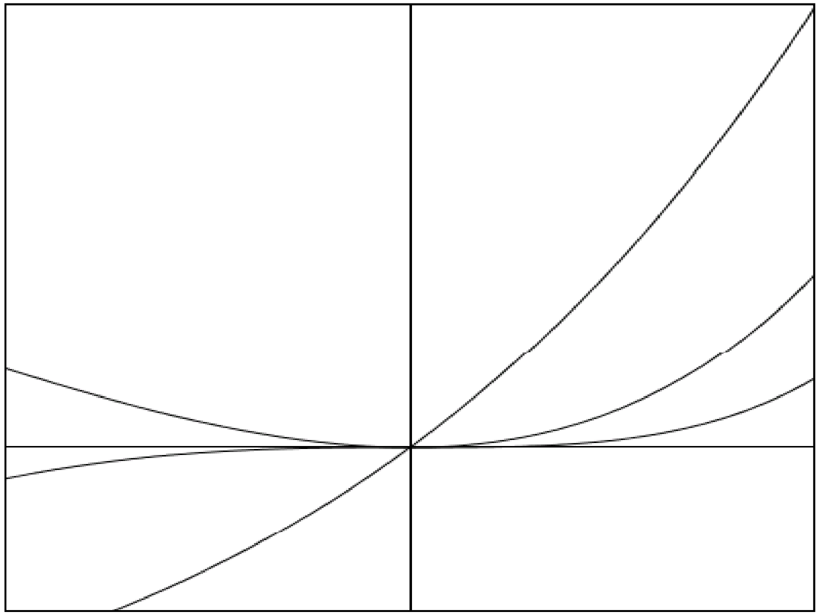
2) Justifier sur votre feuille ces conjectures.

- La valeur de *k* pour laquelle il n'existe qu'une solution est irrationnelle.
- Les étudiants ne peuvent qu'approximer la valeur recherchée
- Le travail algébrique peut être supporté par le travail graphique
- Les valeurs des solutions sont également irrationnelles

D’autres recherches en cours…



Le travail du point de vue local dans le registre graphique



-
-

Reconnaître les représentations graphiques au voisinage de l'origine des trois fonctions
x → x exp(x)
x → x^2 exp(x)
x → x^3 exp(x)
Justifier