Les suites, un objet typique de la transition lycée-université

Stéphanie Bridoux, UMONS (Belgique)
Viviane Durand-Guerrier, Université Montpellier 2

Réunion commune CII lycées / CII université
IREM de Rennes
23 et 24 mai 2014

L'enseignement des suites

Questions

- Comment les suites sont-elles enseignées dans les deux institutions (lycée et université) ?
- Quels obstacles récurrents sont repérés en L1 ?
- Quelles pistes pour tenter de les surmonter ?

OBJECTIF : apporter un éclairage didactique sur l'enseignement d'une notion étudiée en 1re, en terminale et en L1 (et en Prépa).

Plan

Plan

Choix méthodologiques

Vers une comparaison entre les deux institutions :

- Au lycée : programmes, 2 manuels (Maths repères et Transmath) ;
- À l'université (et en Prépa) : manuels, polycopiés, expérience personnelle.
- Focus sur les définitions, les propriétés étudiées et les exercices proposés.

Au lycée

Une vue globale

L'enseignement des suites

- En première :
  - notion de suite, représentation graphique, croissance ;
  - accent sur les suites arithmétiques et les suites géométriques ;
  - approche empirique de la notion de limite.
- En terminale :
  - consolider les notions précédentes ;
  - suite majorée/minorée ;
  - formalisation de la notion de convergence.

Objectif des programmes : « *doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets* ».

Au lycée

L'objet « suite »

- **Définition écrite dans la langue naturelle :**
  Une suite est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.
- **Un lien très fort avec les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:**
  - Modes de génération d'une suite (*Maths Repères*) :
    - Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant 6$ par $u_n = \sqrt{n-6}$. Alors (u_n) est définie de façon explicite et la fonction associée est $f(x) = \sqrt{x-6}$ pour $x \in [6, +\infty[$.
    - Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 3$. Alors (u_n) est définie par récurrence et la fonction associée est $f(x) = 2x + 5$ pour $x \in \mathbb{R}$.
  - Représentation graphique : on place les points $(n, f(n))$.

Au lycée

L'objet « suite »

❖ **Des tâches calculatoires portant sur les premiers éléments de la suite ou sur la mise en relation d'un terme avec le précédent :**

- *Transmath, ex 47*
  Trouvez la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$, et calculez les termes de u_0 à u_5.
  1. $u_n = 2n + 5$
  2. $u_n = n^2 + 2n - 5$
- *Maths repères, ex 40*
  Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 4$.
  1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
  2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Au lycée

Les notions associées

Variations d'une suite

- Méthode (Maths repères) : pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie la fonction f lorsque l'on peut pour donner ses variations ou on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Appui sur le comportement des premiers termes pour conjecturer :
  Maths repères, exercice 37
  Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
  1. Donner l'expression de la fonction f vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
  2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-1, 5]$. On pourra prendre 1 unité pour 3cm.
  3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).
  4. Quelle conjecture peut-on émettre sur la monotonie de la suite (u_n) ?

Au lycée

Les notions associées

❖ Suites arithmétiques et suites géométriques

- La croissance est établie à partir du signe de la raison et du premier élément pour les suites géométriques.
- De nombreuses tâches calculatoires (calculer un terme de rang donné, calculer la somme de termes consécutifs, vérifier qu'une suite est arithmétique ou géométrique...).
  ➙ appui sur des formules et des méthodes à appliquer.
- Construction d'un herbier de suites monotones.
- Résolution de problèmes.

Au lycée

La notion de limite, en 1^{re}

- **Notion abordée à partir de la question :**

  « vers quoi semble se rapprocher u_n quand n tend vers $+\infty$? »

- **Des exercices qui relèvent de conjectures à formuler**
  - à partir d'observations graphiques ;
  - en observant l'évolution des valeurs en les générant avec un tableur.
- **Un vocabulaire pour les suites divergentes qui peut amener certaines conceptions erronées :**
  - en évoquant un phénomène de dispersion des termes.
  - en évoquant un phénomène d'oscillation des termes.
  - une suite qui ne converge pas vers un réel est divergente.

Au lycée

La notion de limite, en Terminale

- **Définition en termes d'intervalles :**

  u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]a, b[$ contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

- **Peu ou pas de manipulation explicite de la définition.**
- **Les calculs de limites mettent souvent en jeu des quotients polynomiaux et des suites arithmétiques/géométriques.**

  1. $u_n = \frac{-2n^2+2n+1}{n^2-3n+4}$
  2. $u_n = \frac{3^{n+1}-4^{n+2}}{3^{n-1}-4^n}$

  ➙ Technique (non justifiée) : mettre le plus haut degré en évidence.

- **Le théorème des gendarmes est principalement utilisé lorsque des fonctions trigonométriques sont présentes dans les suites.**

Au lycée

La notion de limite, en Terminale

- **Étude de la convergence d'une suite :**
  C'est le théorème de convergence monotone qui est principalement utilisé. Un majorant est souvent indiqué dans l'énoncé.

  Maths repères, exercice 92
  Soit (u_n) la suite vérifiant $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{2}u_n}$.

  1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
  2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
  3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
  4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

À l'université

L'objet « suite »

- **Définition :**

  une suite est une fonction $u : \{n_0,\ n_0+1,\ n_0+2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ pour un certain entier $n_0 \geqslant 0$.

- **La question du domaine :**

  Quel est le domaine des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{\ln(n-2)}{n-5}$ et $v_n = \sqrt{n^2 - 10}$?

  ➙ connaissances sur les fonctions de référence, sur les inégalités.

À l'université

La notion de limite

- **Introduction de la définition formelle sous des formes variées assez tôt dans le cours :**
  - $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  - pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N ayant la propriété suivante : $n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
- **Un travail d'interprétation :**
  - graphique : dessin avec l'idée d'une bande délimitée autour de ℓ.
  - dans le vocabulaire : « à partir d'un certain rang », « les éléments finissent par rentrer dans la bande ».
  - des objets : reformuler la définition en termes d'intervalles et passer d'une caractérisation à l'autre.

À l'université

La notion de limite

❖ Des questions de logique :

- variation des quantifications pour obtenir des caractérisations équivalentes :« $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ », les inégalités peuvent être strictes ;
- la définition est équivalente à $|u_n - \ell| \to 0$.

➙ l'objet suite est d'emblée un objet générique.
➙ des questions de nature conceptuelle sur l'objet.

À l'université

La notion de limite

Manipulation de la définition pour démontrer quelques propriétés classiques :

- unicité de la limite, limites d'inégalités, règles de calculs : utilisation « outil » de la définition où on particularise ε (« prenons $\varepsilon = \ldots$ ») ;
- exemples, utilisation « objet » de la définition qui doit être vérifiée quel que soit le réel $\varepsilon > 0$ (« soit $\varepsilon > 0$ »).
  Résultats classiques : $1/n^k \to 0$ si $k > 0$, $a^n \to 0$ si $|a| < 1$, $a^n/n! \to 0$.

➙ la valeur absolue et les inégalités sont omniprésentes.
➙ raisonnements sur les nombres.

À l'université

Notions associées

- **La croissance est souvent travaillée à partir de la définition :**
  Exemple : étudier la croissance de la suite (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_0 = 2$, et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_n \geqslant x_{n+1}$ ssi $x_n^2 \geqslant 2$ et on démontre cette dernière inégalité par récurrence.
- **Suite majorée/minorée/bornée :**
  - Théorème de convergence monotone pour étudier des suites définies par récurrence : le candidat majorant/minorant n'est pas donné dans l'énoncé.
  - Exemple de suite étudiée : $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$
  - Une suite est bornée ssi elle est majorée et minorée.
- **Sous-suites, suites de Cauchy.**

À l'université

Notions associées

❖ **Mise en relation des notions avec la notion de convergence :**

- Liens suite convergente / suite bornée.
- Liens suite croissante / suite majorée.
- Liens convergence de la suite / convergence des sous-suites.
- Liens suite convergente / suite de Cauchy (complétude de l'ensemble des nombres réels).
- Liens suite croissante / suite convergente (vers un réel, vers $+\infty$).

À l'université

Notions associées

❖ **Des énoncés classiques dont on étudie la véracité :**

- Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0.
- Toute suite qui diverge vers $+\infty$ n'est pas majorée.
- Si les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge également vers ℓ.

➙ manipulation des définitions du cours.
➙ nécessité d'un répertoire d'exemples pour se prononcer sur la véracité des énoncés.
➙ les définitions sont des outils pour démontrer et questionner les relations entre les objets.

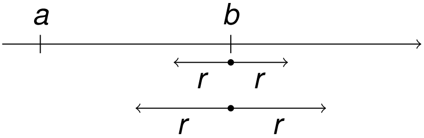
À l'université

La notion de limite : un outil dans certaines élaborations théoriques

Un outil pour caractériser : la notion de point adhérent

Considérons l'ensemble $A = [a, b[$.

b est un point adhérent à A car tout intervalle ouvert de centre b coupe A.



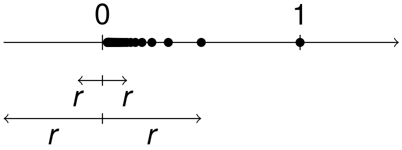
À l'université

La notion de limite : un outil dans certaines élaborations théoriques

Définition

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. On dit que p est adhérent à A si
$\forall r > 0,\ [p-r, p+r] \cap A \neq \varnothing$.

Considérons maintenant l'ensemble $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.
INTUITION : 0 est adhérent à A. En effet, on peut trouver dans A des éléments aussi proches qu'on veut de 0 puisque la suite $(1/n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.



À l'université

La notion de limite : un outil dans certaines élaborations théoriques

Puisque tout intervalle de centre p coupe l'ensemble A, nous pouvons considérer les intervalles de rayon $1/n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel x_n tel que $x_n \in [p-1/n, p+1/n]$ et $x_n \in A$.
Nous avons donc construit une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to x$.

Nouvelle caractérisation

p est adhérent à A si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers p.

À l'université

La notion de limite : un outil dans certaines élaborations théoriques

Un outil pour démontrer : le théorème des valeurs intermédiaires

Énoncé

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a).f(b) < 0$. Alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi) = 0$.

DÉMONSTRATION

Nous pouvons supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
Considérons l'algorithme suivant :

- Pas initial : $a_0 = a, b_0 = b$.
- Pas récursif : si on connait a_n et b_n on définit a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante. Posons $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
  - Si $f(x_n) < 0$, alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$;
  - Si $f(x_n) > 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$;
  - Si $f(x_n) = 0$, alors on s'arrête.

À l'université

La notion de limite : un outil dans certaines élaborations théoriques

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

- (a_n) est croissante et majorée par b ;
- (b_n) est décroissante et minorée par a ;
- $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0|$.

Donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to \ell$ et $b_n \to \ell$.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$, nous obtenons par passage à la limite et en utilisant la continuité de f : $f(\ell) \leqslant 0$ et $f(\ell) \geqslant 0$.
Donc ℓ est une racine de la fonction f. Il suffit alors de prendre $\xi = \ell$.

Remarques :

- On peut s'appuyer sur cette même méthode pour démontrer l'existence de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
- Le théorème des suites adjacentes est une des caractérisations de la complétude de $\mathbb{R}$.

Une comparaison entre les deux institutions

Les suites au lycée

- Suite : un objet associé à un travail algébrique (calculer des termes, caluler la raison, calculer un terme en fonction de n).
- Les notions associées sont travaillées à partir de techniques (fonctions d'une variable réelle, le signe de la raison...).
- La notion de limite est travaillée à partir de techniques (règles de calculs, théorème des gendarmes...).

Les suites en L1

- Suite : une collection infinie et ordonnée de réels, un objet générique.
- Les notions sont travaillées à partir de leur définition.
- Ici aussi.

Une comparaison entre les deux institutions

Les suites au lycée

-
-
-
-
-

Les suites en L1

- La notion de limite est travaillée à partir de la définition.
- Des questions sur les relations entre les objets.
- Des quantifications omniprésentes.
- Une utilisation des suites en tant qu'outil.
- Des connaissances supposées disponibles : nombres réels, inégalités, valeur absolue...

➙ des différences importantes entre les deux institutions.

➙ un saut conceptuel probablement important à franchir pour l'élève du lycée qui devient étudiant en L1.

Plan

Quelques exemples en L1

- La représentation d'une suite comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Les seules suites convergentes sont les suites monotones, majorées ou minorées.
  ➙ la limite est atteinte.
- Toute suite croissante converge vers $+\infty$.
- La limite d'une suite convergente n'est jamais atteinte.
- L'obstacle du formalisme : difficulté de faire sentir aux étudiants le besoin de formaliser les notions.
- ...

➙ des ingénieries pour tenter d'y remédier.

Plan

L'ingénierie d'Aline Robert (1983)

Objectifs

- Installer une représentation de la notion de convergence d'une suite numérique à partir d'un travail sur des dessins.
- La nécessité de la formalisation apparait comme un besoin pour pouvoir démontrer une propriété.
- Le scénario prévu alterne les phases de recherche individuelle et les phases d'institutionnalisation.

➝ présentation de l'ingénierie actuelle (suite à une expérimentation en Belgique, février 2014).

La question du milieu

Avant l'expérimentation :

- définir la notion de suite, représentation graphique d'une suite ;
- travailler sur les notions de croissance, suite majorée, suite minorée, suite bornée.

➙ premier répertoire d'exemples.

L'ingénierie et le scénario

Considérons les suites de terme général suivant :

1. $x_n = \dfrac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$, pour $n \geqslant 2$
2. $x_n = \frac{(-1)^n}{20}$
3. $x_n = \frac{1}{n} \cos n$
4. $x_n = \cos n$
5. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$, $x_n = 2$ pour $n \geqslant 5$
6. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$
7. $x_n = \cos(n\frac{\pi}{6})$
8. $x_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
9. $x_n = n^2 + 1$
10. $x_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$, pour $n \geqslant 2$

L'ingénierie et le scénario

Considérons les suites de terme général suivant :

1. $x_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$, pour $n \geqslant 2$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 2 cm)
2. $x_n = \frac{(-1)^n}{20}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)
3. $x_n = \frac{1}{n}\cos n$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 2 cm)
4. $x_n = \cos n$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 5 cm)
5. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$, $x_n = 2$ pour $n \geqslant 5$
6. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)
7. $x_n = \cos(n\frac{\pi}{6})$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 2 cm)
8. $x_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)
9. $x_n = n^2+1$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 0,5 cm)
10. $x_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, pour $n \geqslant 2$ (échelle sur l'axe des ordonnées : 1 unité $=$ 10 cm)

L'ingénierie et le scénario

Question 1

représentez graphiquement chaque suite sur un dessin différent.

- Travail « papier-crayon », utilisation de la calculatrice pour les tableaux de valeurs.
- Travail en petits groupes (3 ou 4 étudiants).
- Répartir les 10 suites dans le groupe.

Objectifs

Les étudiants parlent de leurs dessins. Les tableaux de valeurs et les constructions permettent une réflexion sur les éléments de la suite.

L'ingénierie et le scénario

Question 1

Après avoir dressé un tableau de valeurs permettant de calculer les 10 premiers éléments de chaque suite, représentez graphiquement chaque suite sur un dessin différent.

- Travail « papier-crayon », utilisation de la calculatrice pour les tableaux de valeurs.
- Travail en petits groupes (3 ou 4 étudiants).
- Répartir les 10 suites dans le groupe.

Objectifs

Les étudiants parlent de leurs dessins. Les tableaux de valeurs et les constructions permettent une réflexion sur les éléments de la suite.

L'ingénierie et le scénario

Question 2

Pouvez-vous classer vos dessins ? Expliquez les critères permettant vos classements.

- La croissance et le caractère borné (ou non) devraient émerger (importance du milieu créé pour la séquence).
- Question : émergence du comportement de convergence ?

L'ingénierie et le scénario

Question 2

Pouvez-vous classer vos dessins ? Expliquez les critères permettant vos classements.

- La croissance et le caractère borné (ou non) devraient émerger (importance du milieu créé pour la séquence).
- Question : émergence du comportement de convergence ?

Objectifs

- Les étudiants produisent des classements dans lesquels ils intègrent toutes les suites. Certaines suites peuvent faire débat.
- Si nécessaire, l'enseignant amène les étudiants à discuter du comportement de convergence.

L'ingénierie et le scénario

Phase d'institutionnalisation

- L'enseignant collecte les idées de classements.
- Choix : se centrer, pour la suite de la séquence, sur la question de la convergence des suites.

L'ingénierie et le scénario

Phase d'institutionnalisation

- L'enseignant collecte les idées de classements.
- Choix : se centrer, pour la suite de la séquence, sur la question de la convergence des suites.

Objectifs

Les étudiants se créent une première représentation intuitive de la convergence pour classer les suites mais il faut accepter que les dessins ne montrent pas tout et, en tout cas, on n'est pas capable de prouver les résultats de convergence qui émergent.

L'ingénierie et le scénario

Question 3

Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre réel ℓ et un naturel n^* à partir duquel on a $|x_n - \ell| \leqslant 1/10$.
Expliquez brièvement votre choix.
Même question en remplaçant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$. Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

Objectifs

- Reprise du travail en petits groupes.
- Les dessins permettent de répondre à la question pour $1/10$ mais pas pour $1/100$.
- La suite $\left((-1)^n/20\right)$ vérifie la propriété pour $1/10$ alors qu'elle ne converge pas.
- Il s'agit d'un travail d'observation graphique.

L'ingénierie et le scénario

Question 3

Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre réel ℓ et un naturel n^* à partir duquel on a $\cancel{|x_n - \ell| \leqslant 1/10}$ $\ell - \frac{1}{10} \leqslant x_{n^*} \leqslant \ell + \frac{1}{10}$.
Expliquez brièvement votre choix.
Même question en remplaçant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$. Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

Objectifs

- Reprise du travail en petits groupes.
- Les dessins permettent de répondre à la question pour $1/10$ mais pas pour $1/100$.
- La suite $\left((-1)^n/20\right)$ vérifie la propriété pour $1/10$ alors qu'elle ne converge pas.
- Il s'agit d'un travail d'observation graphique.

L'ingénierie et le scénario

Phase d'institutionnalisation

- Interprétation graphique de la propriété : construction d'une bande autour de ℓ dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang.
- L'enseignant montrent des dessins où on a représenté plus d'éléments de la suite et des bandes de largeurs différentes.
- Correction (facultative) pour les trois premières suites.

L'ingénierie et le scénario

Phase d'institutionnalisation

- Interprétation graphique de la propriété : construction d'une bande autour de ℓ dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang.
- L'enseignant montrent des dessins où on a représenté plus d'éléments de la suite et des bandes de largeurs différentes.
- Correction (facultative) pour les trois premières suites.

Objectifs

- Interprétation graphique de la propriété étudiée.
- Le travail réalisé ne suffit pas encore pour définir la convergence.

L'ingénierie et le scénario

Question 4

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

- Première affirmation : la suite 10 est un contre-exemple.
- Deuxième affirmation : on peut se prononcer sur la véracité de l'affirmation mais on ne peut pas la justifier sans la définition.

L'ingénierie et le scénario

Question 4

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

- Première affirmation : la suite 10 est un contre-exemple.
- Deuxième affirmation : on peut se prononcer sur la véracité de l'affirmation mais on ne peut pas la justifier sans la définition.

Objectifs

Discuter à nouveau sur la largeur des bandes et définir la notion de convergence en $\varepsilon - N$.

Bilan de l'expérimentation

- Une ingénierie qui est encore d'actualité !
- Il est nécessaire, pour l'enseignant, de faire le deuil d'une certaine forme de rigueur (on « voit » sur le dessin) pour développer une représentation de la notion.
- La suite du cours : l'ingénierie ouvre la voie à la démonstration de l'unicité de la limite (et de propriétés où on doit particulariser ε).
- Un passage à négocier : lorsque ε redevient générique.
- Un travail sur la réduction monotone a émergé pendant l'expérimentation.
- D'autres adaptations sont possibles (travail en cours CIIU - groupe sup, LDAR).