Comment le changement de cadre ou de registre peut amener les élèves à mieux comprendre une notion ? Exemple du second degré.

D. BERNARD G. FRANÇOIS

Strasbourg, 13 janvier 2023

irem — lycée

Changement de registre et second degré :

1. Premier exemple

2. Un peu de théorie

3. Dans nos classes

4. Comment travailler ces changements de registre

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{x-2} = 4 - x$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique.

Deux méthodes de résolution possibles en effectuant des calculs algébriques :

- soit par équivalences (*est en général mal écrite*),
- soit par analyse-synthèse.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique - Par équivalence

$$\sqrt{x-2} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (4-x)^2 \\ 4 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

En effet, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ si et seulement si a et b sont de même signe or ici $\sqrt{x-2} \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} = 4 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 18 = 0 \\ x \leqslant 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = 6 \\ x \leqslant 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique - Par analyse-synthèse

Analyse ou raisonnement par conditions nécessaires :

Nécessairement, toutes les expressions figurant dans l'équation doivent être définies, c'est-à-dire ici $x - 2 \geqslant 0$ soit nécessairement $x \geqslant 2$. L'ensemble de définition de cette équation est $[2; +\infty[$.

Supposons x solution de $\sqrt{x-2} = 4 - x$ et $x \geqslant 2$ alors $x - 2 = (4 - x)^2$ d'où $x^2 - 9x + 18 = 0$.

Cette équation est une équation du second degré que l'on sait traiter dans le registre algébrique ; elle admet deux solutions 3 et 6 toutes deux dans $[2; +\infty[$.

Si x est solution alors nécessairement $x \in \{3; 6\}$.

L'ensemble des solutions est inclus dans $\{3; 6\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique - Par analyse-synthèse

Synthèse ou conditions suffisantes :

A-t-on $\{3; 6\}$ inclus dans l'ensemble solution ?
$\sqrt{3-2} = 4 - 3$ est vraie puisque $\sqrt{1} = 1$ donc 3 est solution.
$\sqrt{6-2} = 4 - 6$ est fausse puisque $\sqrt{4} \neq -2$ donc 6 n'est pas solution.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique - Par analyse-synthèse

Synthèse ou conditions suffisantes :
A-t-on $\{3; 6\}$ inclus dans l'ensemble solution ?
$\sqrt{3-2} = 4 - 3$ est vraie puisque $\sqrt{1} = 1$ donc 3 est solution.
$\sqrt{6-2} = 4 - 6$ est fausse puisque $\sqrt{4} \neq -2$ donc 6 n'est pas solution.

Conclusion : l'équation $\sqrt{x-2} = 4 - x$ admet une solution unique $x = 3$.
L'ensemble solution est $\{3\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique - Par analyse-synthèse

Analyse ou raisonnement par conditions nécessaires :
Nécessairement, toutes les expressions figurant dans l'équation doivent être définies, c'est-à-dire ici $x - 2 \geqslant 0$ soit nécessairement $x \geqslant 2$. L'ensemble de définition de cette équation est $[2; +\infty[$.

La recherche de l'ensemble de définition est-elle indispensable ?

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre algébrique - Par analyse-synthèse

Analyse ou raisonnement par conditions nécessaires :
Nécessairement, toutes les expressions figurant dans l'équation doivent être définies, c'est-à-dire ici $x - 2 \geqslant 0$ soit nécessairement $x \geqslant 2$. L'ensemble de définition de cette équation est $[2; +\infty[$.

La recherche de l'ensemble de définition est-elle indispensable ?
Si vous devez résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x-3}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Pourquoi trouve-t-on deux solutions dont une ne convient pas ? D'où vient ce faux candidat solution ?

Pour résoudre $\sqrt{A(x)} = B(x)$ en élevant au carré chaque membre on résout $A(x) = B(x)^2$ et l'on fait apparaître des « fausses solutions ».

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Pourquoi trouve-t-on deux solutions dont une ne convient pas ? D'où vient ce faux candidat solution ?

Pour résoudre $\sqrt{A(x)} = B(x)$ en élevant au carré chaque membre on résout $A(x) = B(x)^2$ et l'on fait apparaître des « fausses solutions ».

C'est le cas dans l'exemple : $\sqrt{x-2} = 4 - x$ qui en élevant les deux membres au carré devient $x - 2 = (4 - x)^2$, une équation du second degré.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Pourquoi trouve-t-on deux solutions dont une ne convient pas ? D'où vient ce faux candidat solution ?

Pour résoudre $\sqrt{A(x)} = B(x)$ en élevant au carré chaque membre on résout $A(x) = B(x)^2$ et l'on fait apparaître des « fausses solutions ».

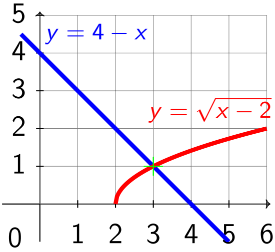
C'est le cas dans l'exemple : $\sqrt{x-2} = 4 - x$ qui en élevant les deux membres au carré devient $x - 2 = (4 - x)^2$, une équation du second degré.

Dans le registre graphique, cette équation du second degré se ramène à l'étude de points d'intersection entre une parabole d'équation $y = (4 - x)^2$ et une droite d'équation $y = x - 2$.
Or l'étude de l'intersection d'une parabole et d'une droite peut conduire selon les cas à 1, 2 ou aucun point d'intersection. Dans notre cas il y a deux points d'intersection :

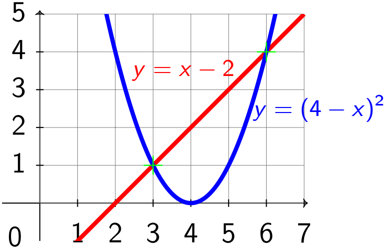
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Pourquoi trouve-t-on deux solutions dont une ne convient pas ? D'où vient ce faux candidat solution ?

Résolution graphique de $\sqrt{x-2} = 4 - x$:



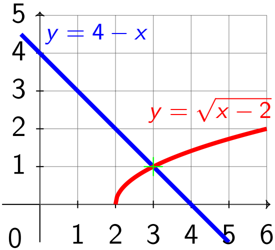
Résolution graphique de $x-2 = (4-)^2x$:



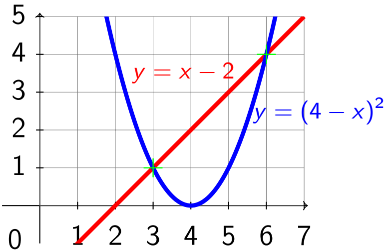
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Pourquoi trouve-t-on deux solutions dont une ne convient pas ? D'où vient ce faux candidat solution ?

Résolution graphique de $\sqrt{x-2} = 4 - x$:



Résolution graphique de $x - 2 = (4-)^2 x$:



En s'appuyant sur ce registre graphique, il est alors possible de « fabriquer » des équations n'ayant aucune solution...

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre fonctions et représentations graphiques

Soient les fonctions :

- $f : x \mapsto \sqrt{x-2}; x \in [2; +\infty[$
- $g : x \mapsto 4 - x; x \in \mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre fonctions et représentations graphiques

Soient les fonctions :

- $f : x \mapsto \sqrt{x-2}; x \in [2; +\infty[$
- $g : x \mapsto 4 - x; x \in \mathbb{R}$

En passant au registre graphique, résoudre cette équation, c'est chercher les abscisses des points d'intersection des deux courbes représentatives de f et g.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre fonctions et représentations graphiques

Soient les fonctions :

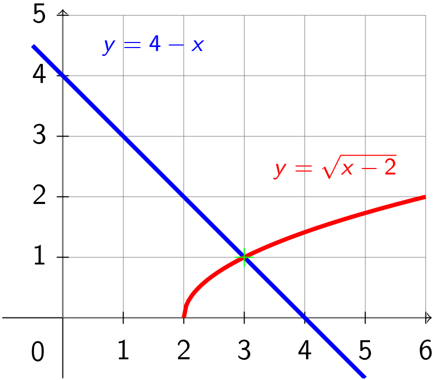
- $f : x \mapsto \sqrt{x-2}; x \in [2; +\infty[$
- $g : x \mapsto 4 - x; x \in \mathbb{R}$

En passant au registre graphique, résoudre cette équation, c'est chercher les abscisses des points d'intersection des deux courbes représentatives de f et g.

On peut passer du registre écriture algébrique au registre représentation graphique à l'aide d'un logiciel...

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

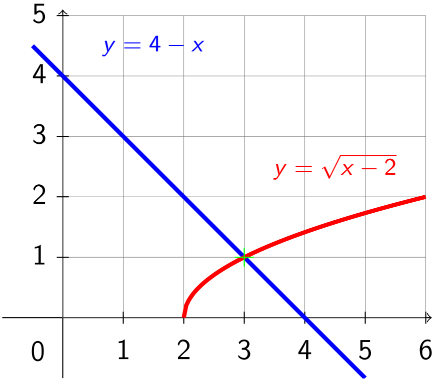
Registre fonctions et représentations graphiques



Le registre graphique permet de « montrer » qu'il y a une solution facilement identifiable, ici $x = 3$ et que cette solution semble unique. Comment passer à une démonstration ?

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-2} = 4 - x$

Registre fonctions et représentations graphiques



Après avoir démontrer que $f(3) = g(3)$, il faut démontrer que 3 est l'unique solution... Retour vers le registre algébrique, avec les définitions des fonctions croissantes et décroissantes.

Changement de cadre et de registre.

Définitions.

Un cadre selon Douady (1986), « est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations »

La notion de registre sémiotique introduit par Duval (1993) est associée à l'hypothèse que la conceptualisation mathématique passe par la capacité d'identifier un concept dans diverses représentations sémiotiques et qu'elle nécessite un travail spécifique sur l'articulation de ces registres.

Changement de cadre et de registre.

Définitions.

Le second degré traverse plusieurs cadres : algébrique, numérique, géométrique.

Al-Khawārizmi

فأما الأموال والجذور التى تعدل العدد فمثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أى مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه[٢] أن تنصف الأجذار وهى فى
هذه المسئلة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة .

Changement de cadre et de registre.

Définitions.

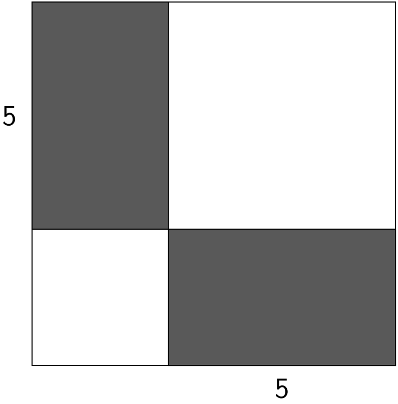
Un bien et dix de ses racines égalent trente-neuf

Quant aux biens et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams.
Sa signification est que tout bien, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines [est tel que] cela atteindra trente-neuf.
Son procédé de résolution consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors racine qui est huit et tu en retranches la moitié [du nombre] des racines qui est cinq. Il reste trois et c'est la racine que tu cherches et le bien est neuf.

Changement de cadre et de registre.

Définitions.

Voici la figure d' Al-Khawārizmi qui illustre le texte :

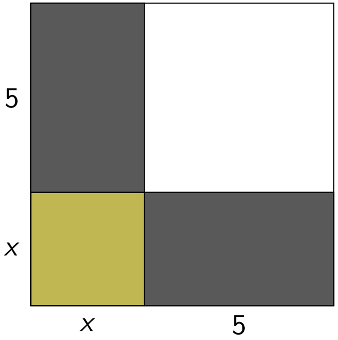


Changement de cadre et de registre.

Définitions.

Avec les notations algébriques actuelles, On veut résoudre :

$$x^2 + 10x = 39$$



L'aire du carré jaune et des deux rectangles gris vaut : $x^2 + 10x$, donc 39.
On ajoute le carré blanc d'aire 25, on obtient 64.
donc le coté du grand carré vaut 8 qui est $x + 5$.
Ainsi $x = 3$

Changement de cadre et de registre.

Définitions.

Il admet aussi plusieurs registres de représentation : le langage naturel, les expressions algébriques, des équations et des solutions, des courbes, des tableaux de variations, etc. Duval parle de registre sémiotique.
Le travail dans un même cadre peut faire appel à un plusieurs registres de représentation et le changement de cadres implique nécessairement des passages entre registres.

Changement de cadre et de registre.

Définitions.

Douady (86) :« On peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeu de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions. »

Dans nos classes

En début de seconde

Année 2002-2003 (34 élèves d'une même classe de seconde)

Une personne veut louer une voiture. Elle a le choix entre trois contrats.
Au contrat A : la personne paie un forfait de 80 € et 0,12 € par kilomètre parcouru.
Au contrat B : la personne paie un forfait de 60 € et 0,15 € par kilomètre parcouru.
Au contrat C : la personne paie un forfait de 150 €.
Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des contrats A, B, C.

$f_1(x)=150x$; $f_2(x)= 60 +0{,}15x$; $f_3(x)= 80x + 0{,}12$; $f_4(x)= 80{,}12x$;
$f_5(x)= 80 +0{,}12x$; $f_6(x)=150$.

Fréquences des réponses en pourcentage

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Contrat A	0	3	3	3	**97**	0
Contrat B	0	**97**	0	0	3	0
Contrat C	9	0	0	0	0	**94**

»

Dans nos classes

En début de seconde

Année 2004-2005 (trois classes de seconde, environ 90 élèves)

Trois voyageurs de commerce : Adrien, Marie, Simon ont élaboré un programme pour calculer leur rémunération : la rémunération d'Adrien est fixe, celle de Marie est proportionnelle au montant des ventes et celle de Simon comporte une partie fixe à laquelle s'ajoute une partie proportionnelle au chiffre d'affaire réalisé. Retrouver parmi les fonctions suivantes celle qui permet de calculer la rémunération de chacun des trois voyageurs :

$f_1(x)=685 + 0{,}045x$; $f_2(x)= 0{,}15x^2$; $f_3(x)= 1370$; $f_4(x)= (0{,}15 / x) + 780$;
$f_5(x)= 0{,}075x$; $f_6(x)= 0{,}05x^2+780x$.

Fréquences des réponses en pourcentage

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Adrien	1	0	**74**	0	2	3
Marie	6	8	1	6	**49**	8
Simon	**57**	0	1	14	0	6

Dans nos classes

En début de seconde

Dans le premier exercice :

- Abstraction du cadre des grandeurs vers le cadre numérique.
- la lettre x désigne un nombre de kilomètres variable.

Dans nos classes

En début de seconde

Dans le deuxième exercice :

- Abstraction du cadre des grandeurs vers le représentant d'une situation.
- la lettre x joue un rôle de « marque-place » au sein d'une syntaxe.

Dans nos classes

En début de seconde

Conclusion : La formule ne joue pas le même rôle dans les deux exercices

- Exercice 1 : formule arithmétique (résumé d'un programme de calcul).
- Exercice 2 : formule algébrique (représente une classe de situation).

Dans nos classes

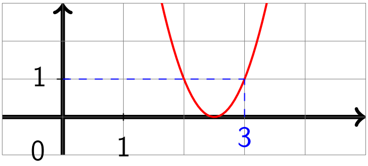
En 1ère Spécialité Mathématiques

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse :

Énoncé 1 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $(2x-5)^2 = 1$ alors $x = 3$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x = 3$ alors $(2x-5)^2 = 1$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x-5)^2 = 1$ équivaut à $x = 3$

Énoncé 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)^2$ dont nous avons représenté la courbe ci-dessous :



1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $(2x-5)^2 = 1$ alors $x = 3$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x = 3$ alors $(2x-5)^2 = 1$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x-5)^2 = 1$ équivaut à $x = 3$

Dans nos classes

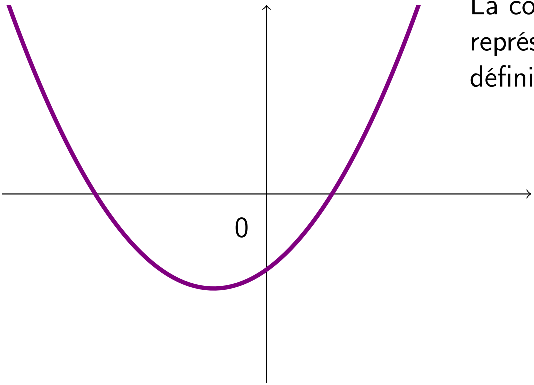
En 1ère Spécialité Mathématiques

Analyse :

- Les élèves qui avaient la représentation graphique n'ont pas mieux réussi.
- Parmi ceux qui avaient la représentation graphique, 62,5% ne l'ont pas utilisé et 37,5 % l'on utilisé.
- Parmi ceux qui l'ont utilisé, 66% ont répondu correctement.

Dans nos classes

Comment travailler le changement de registre ?

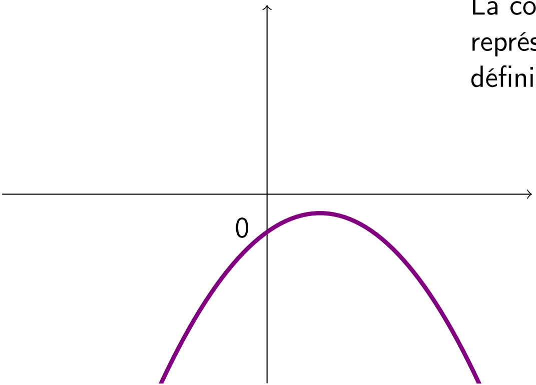


La courbe ci-contre est la courbe représentative de la fonction f définie par :

- ☐ $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
- ☐ $f(x) = 5x - 4$
- ☐ $f(x) = x^2 + 2x + 6$
- ☐ $f(x) = x^2 + 2x - 4$

Dans nos classes

Comment travailler le changement de registre ?



La courbe ci-contre est la courbe représentative de la fonction f définie par :

- ☐ $f(x) = -x^2 + 2x - 2$
- ☐ $f(x) = x^2 + 2x - 2$
- ☐ $f(x) = -x^2 + 6x - 2$
- ☐ $f(x) = -x^2 - 2x - 4$

Dans nos classes

Comment travailler le changement de registre ?

Vrai ou Faux :

1. P_1 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x > 0 \Rightarrow x^2 \geqslant x\right)$.
2. P_2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(n > 0 \Rightarrow n^2 \geqslant n\right)$.

Fin

Merci

guillaume.francois@ac-nantes.fr