

# 2

## Le cube en famille

*Guy Noël, Université de Liège.*

### 2.1 Introduction.

L'utilisation de logiciels de dessin, et en particulier la réalisation de dessins animés ou animables, permet et amène aussi une plus grande structuration des concepts mathématiques rencontrés.

Nous utilisons ici les mots « structure » et « structuration » dans un sens assez informel et plus large que celui qu'on rencontre par exemple dans le traité de Bourbaki. Structurer un ensemble de connaissances, c'est établir des connexions entre elles, ainsi qu'avec d'autres connaissances déjà établies antérieurement. C'est aussi procéder à des classifications, distinguer des caractéristiques de certains sous-ensembles, etc.

Nous inspirant des idées développées par Richard Palais<sup>1</sup>, nous voulons ici attirer l'attention sur l'utilité, pour étudier et structurer une famille d'objets, de commencer par paramétriser cette famille. Si le choix de la paramétrisation est adapté aux propriétés que l'on veut étudier<sup>2</sup>, on pointe alors les objets ayant des propriétés particulières en considérant les valeurs extrêmes des paramètres.

Dans un article antérieur<sup>3</sup>, nous avons illustré l'idée qui vient d'être esquissée en considérant la famille des triangles et une famille de pavages du plan ayant un groupe d'isométries bien déterminés. Nous nous intéresserons ci-dessous à la famille des polyèdres convexes ayant le même groupe de rotations que le cube et dont les sommets constituent une seule

---

<sup>1</sup>R. Palais, *The Visualisation of Mathematics : Towards a Mathematical Exploration*, Notices of the A. M. S., **46**, 6, 647–658, (1999)

<sup>2</sup>Comme le montrent les paradoxes de Bertrand en probabilités, choisir une paramétrisation parmi d'autres peut se révéler délicat.

<sup>3</sup>G. Noël, *Structures, géométrie et informatique, de 7 à 77 ans*, à paraître dans *Mathématique et Pédagogie*.

orbite pour ce groupe. Nous tenons à la disposition des lecteurs intéressés un petit logiciel qui d'explorer la famille des polyèdres convexes dans l'esprit de cet article.

## 2.2 *Rappels et notations.*

- La première rotation du cube est évidemment l'application identique.
- Un cube admet trois axes de rotation d'ordre 4 : ses médianes  
Nous désignons la rotation d'angle  $90^\circ$  autour de l'axe  $Z$ , ainsi que sa matrice, par la notation  $M_Z$ .

$$M_Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

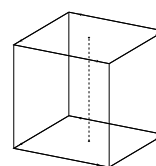


figure 1

- Un cube admet quatre axes de rotation d'ordre 3 : ses diagonales.  
Nous désignons la rotation d'angle  $120^\circ$  autour de la diagonale qui passe par le sommet  $[1\ 1\ 1]$ , ainsi que sa matrice par la notation  $D_1$ .

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

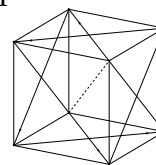


figure 2

- Un cube admet six axes de rotation d'ordre 2 : les droites joignant les milieux d'arêtes opposées.  
La matrice de la rotation représentée ci-contre n'est pas difficile à calculer directement. Il est tout aussi facile de remarquer que cette rotation est aussi la composée de  $D_1$  et  $M_Z$ , de sorte que sa matrice est le produit matriciel  $M_Z \cdot D_1$ .

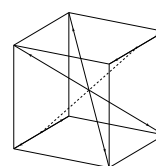


figure 3

On sait que le groupe des rotations du cube comprend 24 éléments : l'application identique, neuf rotations dont l'axe est d'ordre 4, huit rotations dont l'axe est d'ordre 3 et six rotations dont l'axe est d'ordre 2. Les rotations  $M_Z$  et  $D_1$  constituent une partie génératrice de ce groupe. Nous n'utiliserons donc que les matrices  $M_Z$  et  $D_1$ .

## 2.3 *L'orbite d'un point.*

Puisque le groupe des rotations comprend 24 éléments, l'orbite d'un point est constituée de 24 points, dont certains peuvent être confondus. (L'orbite d'un sommet du cube ne comporte que 8 points, celle d'un sommet de l'octaèdre en comporte 6 et celle d'un sommet du cuboctaèdre 12.)

Nous pouvons structurer comme suit l'orbite d'un point par le groupe  $G_C$  du cube :

1. Nous partons d'un point  $P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
2. Nous appliquons à ce point trois fois la rotation  $M_Z$ . Nous déterminons ainsi un carré de sommets

$$P_0, \quad P_1 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

3. Nous appliquons deux fois au carré  $P = P_0P_1P_2P_3$  la rotation  $D_1$ . Nous obtenons deux carrés supplémentaires, nous les notons  $Q$  et  $R$  ( $Q_i = D_1(P_i)$  et  $R_i = D_1(Q_i)$ ) :

$$Q_0 = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

et

$$R_0 = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Puisque, pour  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , on a  $Q_i = D_1(P_i)$ ,  $R_i = D_1(Q_i)$  et  $P_i = D_1(R_i)$ , chacun des triangles  $P_iQ_iR_i$  est équilatéral.

À ce stade, le dessin se présente comme suit :

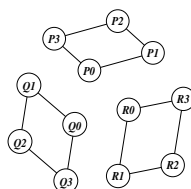


figure 4

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$M_Z(Q_1) = R_0 \quad M_Z(Q_2) = R_1 \quad M_Z(Q_3) = R_2 \quad M_Z(Q_0) = R_3$$

De sorte que  $M_Z$  applique le carré  $Q$  sur le carré  $R$ .

4. Nous avons trouvé 12 points de l'orbite de  $P_0$ , qui peut en contenir jusqu'à 24. Pour trouver des points supplémentaires, appliquons la rotation  $M_Z$  au carré  $R$ . Par analogie avec les formules ci-dessus, nous poserons

$$M_Z(R_1) = S_0 \quad M_Z(R_2) = S_1 \quad M_Z(R_3) = S_2 \quad M_Z(R_0) = S_3$$

De même, nous appliquons la rotation  $M_Z$  au carré  $S = S_0S_1S_2S_3$  en posant

$$M_Z(S_1) = T_0 \quad M_Z(S_2) = T_1 \quad M_Z(S_3) = T_2 \quad M_Z(S_0) = T_3$$

Vu que  $M_Z(Q) = R$ , il est inutile d'appliquer  $M_Z$  à  $T$  : le résultat ne peut être que  $Q$ .

Nous trouvons donc huit points supplémentaires de l'orbite, répartis en deux carrés  $S$  et  $T$  :

$$S_0 = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ -x \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ x \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} -z \\ x \\ -y \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} -z \\ -x \\ y \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} -z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

et la figure comporte à présent cinq carrés :

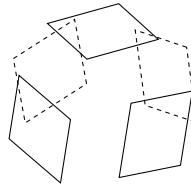


figure 5

5. Il nous manque encore quatre points de l'orbite. Ces points ne peuvent être obtenus qu'en appliquant la rotation  $D_1$  à l'un des carrés  $S$  ou  $T$ . Or  $D_1$  applique le carré  $S$  sur le carré  $T$ . Par exemple,  $D_1(S_0) = T_2$ . Par contre les quatre points obtenus en appliquant  $D_1$  aux points  $T_i$  ne figurent pas encore dans l'orbite. Ils constituent les sommets d'un sixième carré noté  $U$ . Nous posons donc

$$U_0 = D_1(T_0) \quad U_1 = D_1(T_1) \quad U_2 = D_1(T_2) \quad U_3 = D_1(T_3)$$

De façon précise :

$$U_0 = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$$

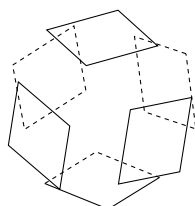


figure 6

Le graphe suivant représente l'orbite du point  $P_0$ , les flèches en traits pleins relèvent de la rotation  $M_Z$ , et les flèches en traits tiretés de la rotation  $D_1$ .

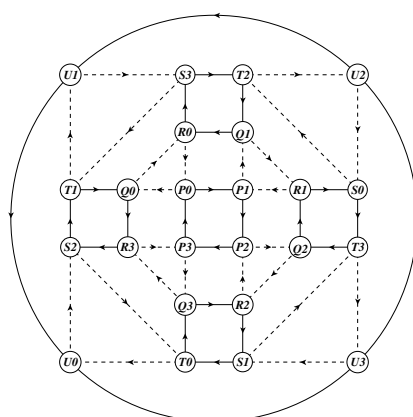


figure 7

## 2.4 paramétrisation

Nous venons de déterminer l'orbite par le groupe des rotations du cube d'un point quelconque de l'espace. Nous nous intéresserons dans la suite à l'enveloppe convexe de cette orbite. Les polyèdres ainsi obtenus constitueront la « famille du cube », étant bien entendu que nous nous limitons aux polyèdres *convexes* et *homogènes*, ce dernier terme signifiant que les sommets des polyèdres considérés constituent une seule orbite pour le groupe des rotations du cube.

La première chose à réaliser est de déterminer le « domaine de paramétrisation de la famille du cube ». Ici aussi, il y a des sous-entendus : nous ne considérons pas comme différents des polyèdres directement semblables : ce sont des « formes de polyèdres » qui nous intéressent.

Pour atteindre notre objectif, nous allons travailler en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Dans ces formules,  $\theta$  est l'angle entre le vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et l'axe  $Z$ , angle que nous nommerons la « colatitude », et  $\varphi$  est l'angle entre la projection de ce vecteur sur le plan  $XY$  et l'axe  $X$ . Nous le nommerons la longitude.  $r$  est le rayon de la sphère circonscrite au polyèdre. Nous choisirons tout simplement  $r = 1$ .

*A priori*,  $\theta$  peut varier entre 0 et  $\pi$ , et  $\varphi$  entre 0 et  $2\pi$ .

L'orbite d'un point peut être engendrée par n'importe lequel de ses points. Cette propriété nous permet de limiter le domaine de variation des paramètres  $\theta$  et  $\varphi$ .

Par exemple, les quatre points  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  ont la même colatitude puisque les trois derniers sont images du premier par des rotations d'axe  $Z$ . L'un d'entre eux a certainement une longitude comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  ( $\frac{\pi}{2}$  exclu). C'est celui-là que nous appelons  $P_0$ . Comme précédemment, les coordonnées de  $P_0$  sont simplement notées  $x, y$  et  $z$ .

La première contrainte affectant les paramètres  $\theta$  et  $\varphi$  est donc  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Il en résulte  $\cos \varphi \geq 0$  et  $\sin \varphi \geq 0$ . Donc  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ . Ainsi,  $P_0$  est dans le premier octant. Les seuls autres points de l'orbite dans le premier octant sont  $Q_0$  et  $R_0$ .

De même, nous pouvons supposer que  $P_0$  est un des points de l'orbite dont la colatitude est minimum. Autrement dit, aucun point de l'orbite ne peut être strictement plus haut que  $P_0$ . Exprimons cette condition analytiquement.

Vu les symétries de l'orbite, il suffit que  $P_0$  soit plus haut que  $Q_0$  et  $R_0$ . La hauteur de  $P_0$  est  $z = \cos \theta$ , celles de  $Q_0$  et  $R_0$  sont respectivement  $x$  et  $y$ . Clairement les conditions à satisfaire par  $P_0$  sont donc

$$z \geq x \quad \text{et} \quad z \geq y$$

Dans le cas  $x \geq y$ , c'est-à-dire si  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  la condition à satisfaire est  $\cos \theta \geq \sin \theta \cos \varphi$ . Et si  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , la condition est  $\cos \theta \geq \sin \theta \sin \varphi$ .

Ainsi, le domaine de variation des paramètres  $\theta$  et  $\varphi$  est limité par les conditions

$$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\cos \varphi} & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\sin \varphi} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Par exemple, pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta$  peut varier de 0 à  $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$ . Si  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  et  $\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$ , alors on a  $P_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et l'orbite ne comporte que 8

points distincts : les sommets d'un cube.

Pour  $\theta = 0$ , la valeur de  $\varphi$  importe peu : le point  $P_0$  est en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dans

ce cas, l'orbite est constituée des sommets d'un octaèdre.

Aux autres points du domaine de paramétrisation correspondent d'autres formes de polyèdres, que nous étudierons au paragraphe suivant. Retenons déjà l'allure du domaine de paramétrisation de la famille du cube, et la position du cube et de l'octaèdre dans ce domaine :

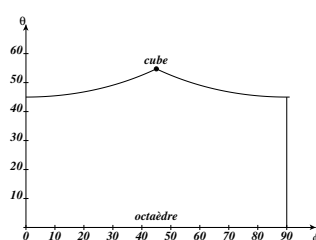


figure 8

## 2.5 La famille du cube

Maintenant que nous avons paramétrisé la famille du cube, nous pouvons étudier les polyèdres (convexes) qui la constituent. Chaque membre de la famille est l'enveloppe convexe d'une orbite. Nous devons déterminer les faces de cette enveloppe.

Il est d'abord clair que le carré  $P = P_0P_1P_2P_3$  est une face du polyèdre, puisque les quatre sommets de ce carré sont les sommets de hauteur maximum de celui-ci. De plus, le polyèdre admettant le même groupe de rotations que le cube, les rotations  $M_Z$  et  $D_1$  appliquent une face sur une face. Les carrés  $Q, R, S, T$  et  $U$ , obtenus précédemment et représentés à la figure 6 sont donc aussi des faces.

Sur la figure 7, on peut lire que les 24 points de l'orbite se répartissent en 8 triangles équilatéraux associés à la rotation  $D_1$ . Ces huit triangles sont dans des plans perpendiculaires à l'axe de  $D_1$ , donc parallèles entre eux. Deux de ces triangles — les plus éloignés de l'origine — sont nécessairement des faces. La distance à l'origine du plan d'un de ces triangles est la distance du barycentre de ce triangle à l'origine. On calcule donc les huit vecteurs  $\frac{1}{3}(P_0 + Q_0 + R_0), \dots, \frac{1}{3}(S_2 + T_0 + U_0)$ , puis les normes de ces huit vecteurs. On dresse ainsi le tableau suivant, où les distances sont toutes données à un facteur  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  près :

Triangle	$P_0Q_0R_0$	$P_1Q_1R_1$	$P_2Q_2R_2$	$P_3Q_3R_3$	$S_3T_1U_1$	$S_0T_2U_2$	$S_1T_3U_3$	$S_2T_0U_0$
Distance à O	$ x + y + z $	$ -x + y + z $	$ -x - y + z $	$ x - y + z $	$ x + y - z $	$ -x + y - z $	$ -x - y - z $	$ x - y - z $

Compte tenu de ce que les trois nombres  $x, y$  et  $z$  sont positifs, et des inégalités  $z \geq x, z \geq y$ , on voit que les valeurs extrêmes de ce tableau sont  $x + y + z$  et  $-x - y - z$ . Ainsi les triangles  $P_0Q_0R_0$  et  $S_1T_3U_3$  sont des faces

du polyèdre perpendiculaires à l'axe de la rotation  $D_1$ . En appliquant la rotation  $M_Z$  à ces deux faces, et en itérant l'opération deux fois, on trouve six nouvelles faces triangulaires perpendiculaires aux autres diagonales du cube. Ce sont, d'après la figure 7, les triangles équilatéraux  $P_1R_3S_3$ ,  $P_2S_2T_2$ ,  $P_3T_1Q_1$  et  $T_0Q_2U_2$ ,  $Q_3R_1U_1$ ,  $R_2S_0U_0$ .

Dessignons la situation actuelle :

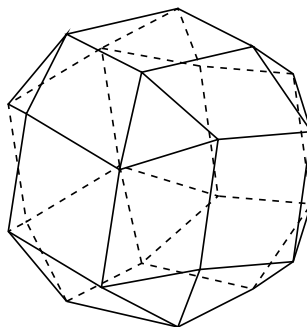


figure 9

Notre travail n'est pas terminé : la figure précédente montre 14 faces du polyèdre, six carrés et huit triangles équilatéraux. Dans certains cas particuliers, par exemple le cube ou l'octaèdre, on a trouvé ainsi toutes les faces du polyèdre. On constate même qu'il arrive à des faces de disparaître : le cube n'a que des faces carrées, l'octaèdre n'a que des faces triangulaires. Mais dans le cas général, il nous manque encore des faces.

En effet, dans un polyèdre, tout sommet doit appartenir à au moins trois faces ! Or, sauf cas particuliers, les points appartenant à l'orbite appartiennent exactement à une des faces carrées et à une des faces triangulaires.

En examinant la figure 9, on pourrait cependant croire que le polyèdre est complet. On constate en effet que des quadrilatères sont apparus en plus des carrés et des triangles équilatéraux. Ces quadrilatères « empruntent » deux côtés opposés à des carrés et les deux autres côtés opposés à des triangles équilatéraux. Ils sont au nombre de 12 : les six carrés ont ensemble 24 arêtes, les huit triangles équilatéraux en ont autant. Comme aucune arête n'est commune à un carré et à un triangle équilatéral, les 48 arêtes délimitent 12 quadrilatères.

Mais on constate aussi en examinant les quadrilatères situés sur les bords de la figure qu'ils ne sont pas plans. Or nous nous intéressons aux polyèdres *convexes*. Examinons de plus près un de ces quadrilatères, par exemple  $P_0P_1R_3R_0$  (voir la figure 4).

On sait que  $R_0 = M_Z(Q_1) = M_ZD_1(P_1)$  et  $R_3 = M_Z(Q_0) = M_ZD_1(P_0)$ . Or  $M_ZD_1$  est une rotation de  $180^\circ$ .

Par conséquent, on a aussi  $P_1 = M_ZD_1(R_0)$  et  $P_0 = M_ZD_1(R_3)$ . De plus, l'axe  $A$  de cette rotation de  $180^\circ$  est perpendiculaire aux segments  $[P_1R_0]$  et  $[P_0R_3]$  et les coupe en leur milieu.

**2.5.1** Sous quelle condition le quadrilatère  $P_0P_1R_3R_0$  est-il plan ?

Admettons d'abord que les quatre points  $P_0, P_1, R_0, R_3$  sont distincts. Alors, pour que le quadrilatère  $P_0P_1R_3R_0$  soit plan, il faut et il suffit que les segments  $[P_1R_0]$  et  $[P_0R_3]$  aient le même milieu.

Or

$$\frac{1}{2}(P_1 + R_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y + z \\ 0 \\ y + z \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2}(P_0 + R_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + z \\ 0 \\ x + z \end{pmatrix}$$

Le quadrilatère est donc plan si  $x = y$ , c'est à dire si  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Dans ce cas, pour obtenir l'enveloppe convexe de l'orbite de  $P_0$ , il suffit d'adjoindre les douze quadrilatères en question aux faces déjà trouvées.

Si  $x > y$  (ou  $\varphi < \frac{\pi}{4}$ ), alors les points  $P_0$  et  $R_3$  sont plus éloignés de l'origine que  $P_1$  et  $R_0$ . On obtiendra l'enveloppe convexe en coupant en deux triangles le quadrilatère gauche  $P_0P_1R_3R_0$  à l'aide de la diagonale  $P_0R_3$ . Par contre, si  $x < y$  on devra utiliser dans ce but la diagonale  $P_1R_0$ .

Les deux configurations ci-dessous ne se distinguent que par les valeurs de la longitude  $\varphi$  :  $34^\circ$  pour celle de gauche,  $56^\circ$  pour celle de droite. Ces deux valeurs sont symétriques par rapport à  $45^\circ$ . Les deux configurations sont symétriques par rapport au plan d'équation  $x = y$ .

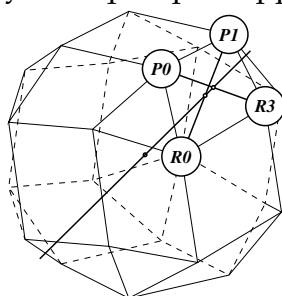


figure 10

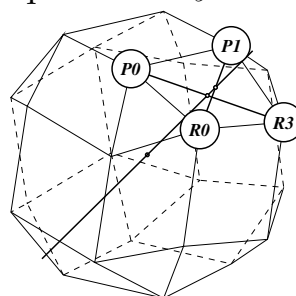


figure 11

Sur chacune de ces figures on a tracé l'axe de la rotation de  $180^\circ$  qui échange les points  $P_1$  et  $R_0$  d'une part,  $P_0$  et  $R_3$  d'autre part. Sur la figure 11, on va tracer la diagonale  $R_0P_1$  du quadrilatère  $P_0P_1R_3R_0$ , alors que sur la figure 10, on va tracer  $P_0R_3$ .

En procédant de la même manière pour tous les quadrilatères gauches du type  $P_0P_1R_3R_0$ , on obtient deux polyèdres convexes symétriques.

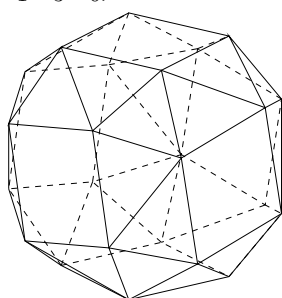


figure 12

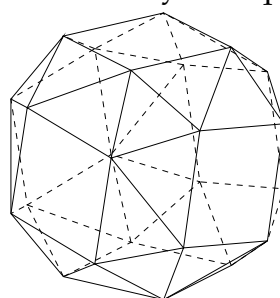


figure 13

Pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , on obtient un polyèdre qui est son propre symétrique. Le quadrilatère  $P_0P_1R_3R_0$  est un rectangle : c'est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. De plus, le plan de symétrie (du polyèdre) d'équation  $x = y$  passe par les milieux des arêtes  $P_0P_1$  et  $R_3R_0$ .

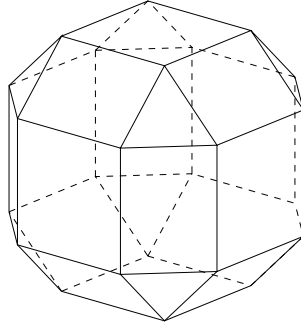


figure 14

### 2.5.2 Sous quelle condition les quadrilatères gauches disparaissent-ils ?

Nous envisageons dans ce paragraphe la possibilité que les quatre points  $P_0, P_1, R_3, R_0$  ne soient pas tous distincts. Plusieurs cas apparaissent.

$P_0 = P_1$  : Ce cas ne peut se produire que si le point  $P_0$  est sur l'axe de

$M_Z$ , autrement dit si  $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ou encore  $\theta = 0$ . Il est de plus

équivalent à  $R_3 = R_0$ . Le polyèdre est alors un octaèdre. Les faces carrées du type  $P_0P_1P_2P_3$  se réduisent à des points, les polygones gauches du type  $P_0P_1R_3R_0$  se réduisent à des segments et ceux-ci coïncident avec les arêtes des faces triangulaires du type  $P_0Q_0R_0$ .

$P_0 = R_0$  : Dans ce cas, on a aussi  $P_0 = Q_0$  puisque  $P_0, Q_0$  et  $R_0$  sont sommets d'un triangle équilatéral. De même  $P_1, R_3$  et  $S_2$  coïncident, etc. Ainsi, les faces triangulaires sont réduites à un point, situé sur l'axe de la rotation  $D_1$ , les polygones gauches  $P_0P_1R_3R_0$  se réduisent à des segments et ceux-ci coïncident avec les arêtes des faces carrées type  $P_0P_1P_2P_3$ . Puisque  $P_0 = Q_0 = R_0$ , on a  $x = y = z$  et par conséquent  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \arctg \sqrt{2}$  (soit 54,5356... degrés) Le polyèdre est un cube.

$P_0 = R_3$  : De l'examen de la figure 7, on déduit immédiatement  $Q_0 = P_3$ . La face carrée  $P_0P_1P_2P_3$  est donc cette fois adjacente à la face triangulaire  $P_0Q_0R_0$ . Le polygone gauche  $P_0P_1R_3R_0$  se réduit à deux arêtes  $R_0P_0$  et  $P_0P_1$ .

De  $P_0 = R_3$ , on déduit aussi  $x = z$  et  $y = 0$  :  $P_0$  appartient à l'axe de la rotation  $M_ZD_1$ . On a alors  $\varphi = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Le polyèdre est un cuboctaèdre.

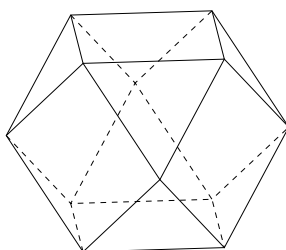


figure 15 : Un cuboctaèdre

$P_1 = R_0$  : Ce cas correspond à  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . À part cela, il est identique au précédent, à ceci près que les identifications entre sommets s'opèrent autrement. Mais le polyèdre final est le même.

### 2.5.3 D'autres possibilités

Dans le cas général, une face carrée et une face ayant la forme d'un triangle équilatéral ne peuvent avoir en commun qu'un sommet. Les « trous » entre ces deux types de faces sont bouchés par les triangles issus du coupage en deux, par une diagonale, des polygones gauches de type  $P_0P_1R_3R_0$ . Se pourrait-il que pour certaines valeurs des paramètres  $\theta$  et  $\varphi$ , deux faces adjacentes soient coplanaires, ce qui les amènerait à fusionner ?

Il est clair qu'une face carrée et une des faces triangulaires équilatérales ne pourraient être coplanaires : les unes sont dans des plans perpendiculaires aux axes de rotation d'ordre 4, les autres dans des plans perpendiculaires aux axes de rotation d'ordre 3. Ces directions de plans sont indépendantes des valeurs de  $\theta$  et  $\varphi$ .

Par contre, on pourrait imaginer qu'un des sommets  $R_0$  ou  $R_3$  soient dans le plan du carré  $P_0P_1P_2P_3$ . Vu la symétrie d'ordre 4, ce sont alors quatre triangles qui fusionneraient avec ce carré, amenant la formation d'octogones.

De la même façon, un des points  $P_1$  ou  $R_3$  pourrait être dans le plan du triangle  $P_0Q_0R_0$ , et cette fois c'est la symétrie d'ordre 3 qui amènerait la formation d'hexagones.

Voyons cela de plus près.

- Si  $\varphi < \frac{\pi}{4}$ , le triangle  $P_0P_1R_3$  est une face adjacente au carré  $P_0P_1P_2P_3$ . Ces deux faces sont coplanaires si  $R_3$  a la même hauteur que  $P_0$ . Or la hauteur de  $R_3$  vaut  $x$ , et la relation  $x = z$  équivaut à

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Si cette condition est satisfaite, on note en effet le remplacement des six faces carrées et des 24 faces triangulaires issues des quadrilatères gauches par six octogones.

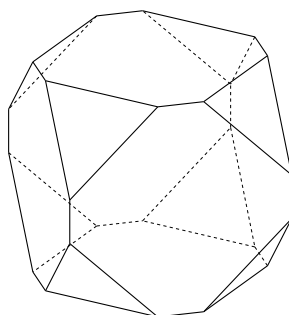


figure 16

- Si  $\varphi > \frac{\pi}{4}$ , c'est le triangle  $P_0P_1R_0$  qui est une face adjacente au carré  $P_0P_1P_2P_3$ . On procède comme ci-dessus en supposant que  $R_0$  a la même hauteur que  $P_0$ . La hauteur de  $R_0$  vaut  $y$ , et la relation  $x = z$  équivaut à

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Nous pouvons résumer ces deux situations en disant que le polyèdre admet des faces octogonales lorsque le point  $(\varphi, \theta)$  appartient à la courbe qui limite vers le haut le domaine de paramétrisation (figure 7).

- Si  $\varphi < \frac{\pi}{4}$ , le triangle  $P_0R_0R_3$  est une face adjacente à la face triangulaire équilatérale  $P_0Q_0R_0$ . Le point  $R_3$  est dans le plan de cette face si et seulement si le vecteur  $R_3 - P_0 = \begin{pmatrix} z - x \\ -2y \\ x - z \end{pmatrix}$  est perpendiculaire

à l'axe de la rotation  $D_1$ , c'est à dire au vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La condition

à satisfaire est donc  $y = 0$ , c'est-à-dire  $\sin \theta \sin \varphi = 0$ . Le cas  $\theta = 0$  est celui — déjà rencontré — de l'octaèdre. Le cas  $\varphi = 0$  correspond aux points du bord gauche du domaine de variation.

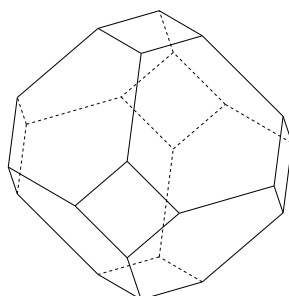


figure 17

- Si  $\varphi > \frac{\pi}{4}$ , c'est le triangle  $P_0P_1O R_0$  qui est une face adjacente à la face triangulaire équilatérale  $P_0Q_0R_0$ . Le point  $P_1$  est dans le plan de cette face si et seulement si le vecteur  $P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} y - x \\ -x - y \\ 0 \end{pmatrix}$  est perpendiculaire à l'axe de la rotation  $D_1$ , c'est à dire au vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La condition à satisfaire est donc  $x = 0$ , c'est-à-dire  $\sin \theta \cos \varphi = 0$ . Le cas  $\theta = 0$  est à nouveau celui de l'octaèdre. Le cas  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  correspond aux points du bord droit du domaine de variation.

Dressons un tableau qui résume (provisoirement) nos constatations.

$\theta$	$\varphi$				
	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
0	<b>Octaèdre</b> ( $\varphi$ quelconque) F : 8 triangles équilatéraux, A : 12, S : 6				
	F : 8 hexagones, 6 carrés A : 36 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 24 triangles A : 60 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 12 rectangles A : 48 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 24 triangles A : 60 S : 24	F : 8 hexagones, 6 carrés A : 36 S : 24
Max	$\frac{\pi}{4}$ <b>Cuboctaèdre</b> F : 6 carrés 8 triangles équil. A : 24 S : 12	$\operatorname{arctg} \frac{1}{\cos \varphi}$ F : 6 octogones 8 triangles équil. A : 36 S : 24	$\operatorname{arctg} \sqrt{2}$ <b>Cube</b> F : 6 carrés A : 12 S : 8	$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sin \varphi}$ F : 6 octogones 8 triangles équil. A : 36 S : 24	$\frac{\pi}{4}$ <b>Cuboctaèdre</b> F : 6 carrés 8 triangles équil. A : 24 S : 12

## 2.6 Des polyèdres archimédiens

Dans les pages précédentes, nous avons déjà découvert dans la famille du cube des polyèdres très particuliers. D'abord deux polyèdres réguliers, le cube lui-même et l'octaèdre. Ensuite un polyèdre quasi-régulier, le cuboctaèdre.

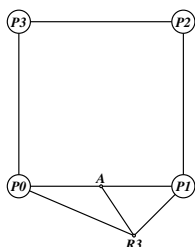
Nous allons rechercher à présent si la famille comprend d'autres polyèdres archimédiens. Il nous suffit de rechercher dans cette famille les polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers.

Les seuls polygones que l'on rencontre comme faces de polyèdres de cette famille sont des triangles, des rectangles, des hexagones et des octogones.

Nous procéderons en passant en revue les différentes cases du tableau précédent.

1. Commençons par la case de la dernière ligne pour laquelle  $\varphi < \frac{\pi}{4}$  et  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$ .

Pour trouver un polyèdre archimédien dans cette case, il faut rechercher des valeurs de  $\theta$  et  $\varphi$  pour lesquelles les faces octogonales soient régulières. D'après l'analyse faite en 2.5.3, une des faces octogonales est constituée du carré  $P_0P_1P_2P_3$  fusionné avec quatre triangles parmi lesquels le triangle  $P_0P_1R_3$ .



La première condition à satisfaire pour que l'octogone soit régulier est que les côtés  $P_0R_3$  et  $R_3P_1$  aient même longueur, c'est-à-dire que dans le plan  $P_0P_1P_2$ , le point  $R_3$  soit sur la médiatrice de  $P_0P_1$ . La figure ci-dessus est réalisée dans ce plan. Les coordonnées de  $P_0$ ,  $P_1$  et  $R_3$  y sont respectivement  $(x, y)$ ,  $(y, -x)$  et  $(x, -y)$ . Le milieu du segment  $P_0P_1$  est le point  $A$  de coordonnées  $\frac{1}{2}(x+y, y-x)$ . La perpendicularité de  $P_0A$  et  $AR_3$  se traduit par l'équation  $2y^2 + 4xy - 2x^2 = 0$ , soit, en remplaçant  $\frac{y}{x}$  par  $\operatorname{tg} \varphi$  :  $\operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0$ . La solution positive est  $\operatorname{tg} \varphi = -1 + \sqrt{2}$  ce donne pour  $\varphi$  une valeur de  $\frac{\pi}{8}$ . La valeur correspondante de  $\theta$  est donnée par l'équation  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$ . On obtient ainsi  $\theta = 0.8249436 \dots \text{ rad } (47,26579 \dots^\circ)$

En principe, pour vérifier qu'un polygone est régulier, il faut vérifier que les côtés ont même longueur, mais aussi que les angles sont égaux. Nous venons de choisir  $\theta$  et  $\varphi$  de façon que  $R_3$  soit sur la médiatrice de  $P_0P_1$ . Par raison de symétrie, les quatre sommets de l'octogone autres que  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont tous sur la médiatrice d'un

des côtés du carré  $P_0P_1P_2P_3$  et les huit côtés de l'octogone ont même longueur. De plus, les huit rayons joignant le centre du carré aux huit sommets de l'octogone ont même longueur puisque les coordonnées dans le plan du carré de  $P_0$  et  $R_3$  sont respectivement  $(x, y)$  et  $(x, -y)$ . Enfin ces huit rayons forment entre eux huit angles de  $\frac{\pi}{4}$ . L'octogone est donc régulier.

2. Pour  $\varphi > \frac{\pi}{4}$  et  $\text{tg } \theta = \frac{1}{\sin \varphi}$ , on trouve de la même manière un polyèdre archimédien correspondant à  $\varphi = \frac{3\pi}{8}$  et  $\theta = 0.8249436 \dots \text{ rad}$ .

Les deux polyèdres précédents portent le nom de « cube tronqué ».

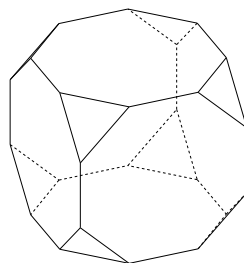


figure 18 : Un cube tronqué

3. Passons à la case du tableau pour laquelle  $\varphi = 0$  et  $\theta < \frac{\pi}{4}$ . Les polyèdres correspondant à cette case ont 14 faces dont 6 carrés et 8 hexagones. Nous cherchons si ces hexagones, construits autour de triangles équilatéraux tels que  $P_0Q_0R_0$  sont réguliers pour certaines valeurs de  $\theta$ .

Dans cette situation, on a  $P_0 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $R_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $R_3 =$

$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ . Notre raisonnement sera analogue au précédent : nous

cherchons si le point  $R_3$  peut se trouver sur la médiatrice de  $P_0R_0$ . En notant  $A$  le milieu de  $P_0R_0$  et en exprimant la perpendicularité de  $AR_3$  et  $AP_0$ , on obtient l'équation

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{2}$$

d'où  $\theta \simeq 26,56^\circ$ .

4. On obtient bien entendu un autre polyèdre du même type pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \text{arctg } \frac{1}{2}$ . Ces deux polyèdres portent le nom de « octaèdre tronqué ».

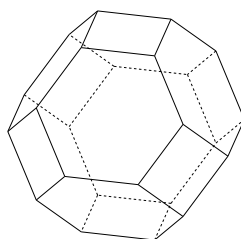


figure 19 : Un octaèdre tronqué

5. Dans la case du tableau correspondant à  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  et  $0 < \theta < \arctg \sqrt{2}$ , nous trouvons des polyèdres ayant 26 faces, dont 6 carrés, 8 triangles équilatéraux et 12 rectangles. Existe-t-il des valeurs de  $\theta$  pour lesquelles ces derniers sont aussi des carrés ?

Un de ces rectangles est le quadrilatère  $P_0P_1R_3R_0$ . Vu que  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , les coordonnées des quatre sommets sont :

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \end{pmatrix} \quad R_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \end{pmatrix}$$

La longueur du côté  $P_0P_1$  vaut donc  $\sqrt{2} \sin \theta$ , et celle du côté  $P_0R_0$  vaut  $\sqrt{2} |\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \cos \theta|$ . Les rectangles sont donc des carrés si et seulement si  $\theta = \arctg(2 - \sqrt{2})$  (en degrés : approximativement  $30,3612^\circ$ ). Le polyèdre obtenu est le « rhombicuboctaèdre ».

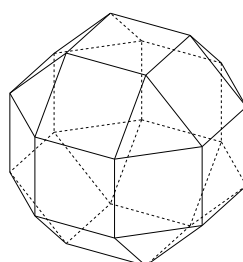


figure 20 : Un rhombicuboctaèdre

6. Il nous reste à explorer les deux cases du tableau données, la première par  $0 < \theta < \arctg \frac{1}{\cos \varphi}$  et  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$  et la seconde  $0 < \theta < \arctg \frac{1}{\sin \varphi}$  et  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Vu la symétrie de la situation, nous nous contenterons de la première.

Il s'agit alors de déterminer si les triangles — *a priori* quelconques — issus du quadrilatère gauche  $P_0P_1R_3R_0$  peuvent être équilatéraux pour certaines valeurs de  $\varphi$  et  $\theta$ . Pour la situation  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ , les triangles à considérer sont  $P_0P_1R_3$  et  $P_0R_0R_3$  (voir figures 13 et 12). Il suffit que l'un des deux soit équilatéral pour que l'autre le soit aussi.

En effet,  $|P_0P_1| = |R_0R_1|$  (côtés de faces carrées) et  $|P_0R_0| = |P_1R_3|$  (deux côtés de faces triangulaires équilatérales).

Considérons donc le triangle  $P_0P_1R_3$  et ses sommets :

$$P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Les trois points  $P_0$ ,  $P_1$  et  $R_3$  étant situés sur une sphère de rayon 1, les trois distances  $|P_0P_1|$ ,  $|P_1R_3|$  et  $|P_0R_3|$  sont égales si et seulement si les trois angles  $\widehat{P_0OP_1}$ ,  $\widehat{P_0OR_3}$  et  $\widehat{R_3OP_1}$  sont égaux. Il nous suffit donc d'égaliser les produits scalaires correspondants :

$$P_0 \cdot P_1 = z^2 \quad P_0 \cdot R_3 = 2xz - y^2 \quad R_3 \cdot P_1 = xz + yz + zx$$

Les équations à résoudre sont donc  $y^2 + z^2 = 2xz$  et  $xy + yz + zx = z^2$ .  
Passant en coordonnées sphériques, elles deviennent

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \varphi - 2 \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + 1 = 0 \\ \operatorname{tg}^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \operatorname{tg} \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) - 1 = 0 \end{cases}$$

En additionnant ces deux équations et en simplifiant par  $\operatorname{tg} \theta$ , on trouve  $\operatorname{tg} \theta$  en fonction de  $\varphi$  :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\sin \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi)}$$

On remplace alors  $\operatorname{tg} \theta$  par cette valeur dans la première équation. Après calculs, on arrive à l'équation

$$\operatorname{tg}^5 \varphi + 2 \operatorname{tg}^4 \varphi + 3 \operatorname{tg}^3 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - 2 = 0$$

qui admet dans l'intervalle  $[0, 1]$  la seule racine  $\operatorname{tg} \varphi \simeq 0,495843297931$ , ce qui fournit  $\varphi \simeq 26,3742053779^\circ$ . On trouve alors sans peine la valeur  $\theta \simeq 32,1606898335^\circ$ .

La solution symétrique (si  $\varphi > \frac{\pi}{4}$ ) fournit les valeurs

$$\theta \simeq 32,1606898335^\circ \text{ et } \varphi \simeq 63,6257946221^\circ$$

Les deux polyèdres ainsi obtenus portent le nom de « *snub cube* ».

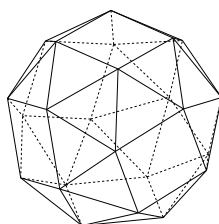


figure 21 : Snub cube gauche

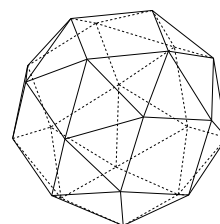


figure 22 : Snub cube droit

Résumons nos résultats concernant les polyèdres archimédiens de la famille du cube en un tableau :

	Colatitute $\theta$	Longitude $\varphi$
Cube	$\arctg \sqrt{2}$ (54,73... °)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)
Cube tronqué	$\arctg \frac{1}{\cos(\pi/8)}$ (47,26... °)	$\frac{\pi}{8}$ (22,5°)
	$\arctg \frac{1}{\cos(\pi/8)}$ (47,26... °)	$\frac{3\pi}{8}$ (67,5°)
Octaèdre	0	—
Octaèdre tronqué	$\arctg \frac{1}{2}$ (26,56... °)	0
Cuboctaèdre	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	0
Rhombicuboctaèdre	$\arctg(2 - \sqrt{2})$ (30,36... °)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)
Snub cube gauche	0,56131... (32,1606... °)	0,46031... (26,3742... °)
Snub cube droite	0,56131... (32,1606... °)	1.109... (63,62... °)

Pour conclure, complétons la figure 8 :

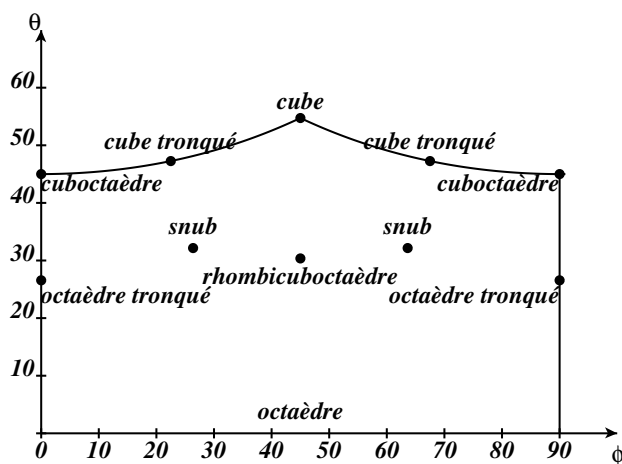


figure 23

