6

Pourquoi les aires ?

Henry Plane.

Avertissement : **L'atelier "Pourquoi les aires" a demandé aux participants manipulation des figures (avec "cas de figures") et discussion simultanées, choses qui ne peuvent être rapportées en quelques brèves pages.** L'objectif de l'atelier était une sorte de survol de la géométrie de l'enseignement secondaire dans lequel la notion d'aire jouait, ou pouvait jouer, un rôle comme outil de démonstration, rôle qui apparaît aujourd'hui comme oublié sinon délaissé.

6.1 *Historique.*

Quelques mots d'histoire pour débuter. Jadis longueurs et aires jouaient de concert un rôle important dans la construction de l'édifice mathématique. L'une et l'autre s'avéraient palpables alors que le nombre restait un être plus ou moins mystique (Bible, Pythagoriciens).
La fin du Moyen-Age abonde en résolutions géométriques de problèmes dans lesquels nous, nous ne voyons que des équations. Voir les traducteurs de l'arabe, Bombelli, Gosselin et autres(*cf* [2] et [5]).
Vinrent ensuite Viète et Stévin (*cf* [9] et [10]) qui, avec "l'arithmétique littérale" et les nombres décimaux, rendirent l'expresssion des raisonnements plus aisée et les calculs plus automatiques voire mécaniques.
Au dix-septième siècle il y eut comme une inversion des rôles. Un nombre, qu'il soit entier ou "sourd", connu ou inconnu, devient un être mathématique qu'on manipule, $3a$, $x + y$ ou $\sqrt{S}\ldots$ On l'associe encore à une longueur mais est-ce indispensable ? Arnauld (*cf* [1]) bouleverse Euclide, Ozanam aussi (*cf* [4] et [6]). Une aire est un produit $a \, . \, b$ d'entiers ou d'ir-

rationnels et non plus l'attribut d'un rectangle $ABCD$. Une sorte de hiérarchie s'installe, premier, deuxième, troisième degré...
Les dix-huitième et dix-neuvième siècles réduiront les aires à leur calcul par des formules. Voir la démonstration du théorème de Pythagore chez Clairaut (*cf*[3]).
On aboutira à la fin du vingtième siècle à ces ouvrages avec un chapitre : "Surfaces, périmètre et aire". Une page et quelques exercices. Comment s'étonner de la confusion chez les élèves quelques ans après... Les points

mis en relief ont été regroupés en quatre classes, quatre pistes de suggestions afin que chacun trouve des points de départ s'il veut risquer lui-même l'aventure et, grâce aux aires, augmenter ses outils.

6.2 *Piste élémentaire.*

La piste est élémentaire car il s'agit d'assembler des éléments de figures.

6.2.1 Pour bien distinguer aire et périmètre.

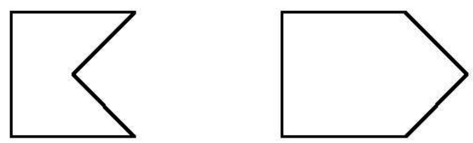

FIG. 6.1 – Périmètres égaux et aires inégales.

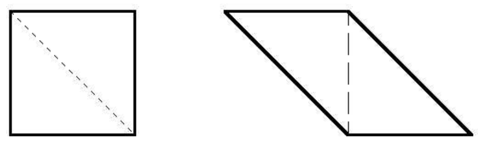

FIG. 6.2 – Périmètres inégaux et aires égales.

6.2.2 Sommes de carrés.

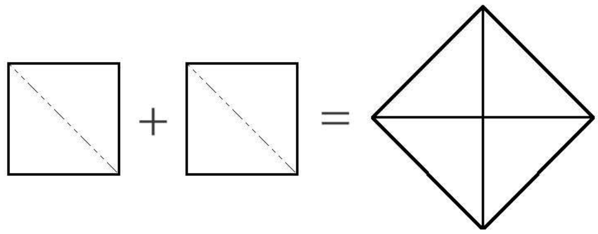

FIG. 6.3 – Avec Platon $1 + 1 = 2$ et un nombre dont le carré est deux.

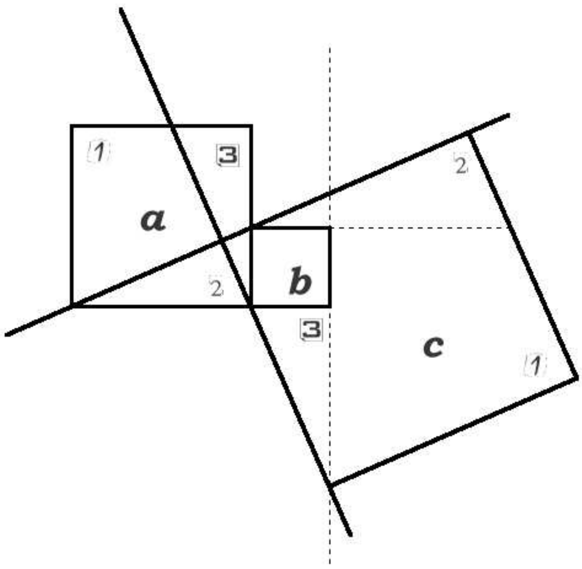

FIG. 6.4 – Carré ***a*** et carré ***b*** donnent carré ***c*** en deux coups de ciseaux et quelques déplacements.

Il y a bien d'autres décompositions et recompositions qui évoqueront, au besoin, translation, rotation, symétrie.

6.2.3 Un peu d'arithmétique avec du quadrillage.

En assemblant le "triangle" S_n de côté n et le "triangle" S_{n-1} de côté $n-1$ on lit (*cf* figure 6.5)

$$(S_n) = (S_{n-1}) + n$$

et

$$(S_n) + (S_{n-1}) = n^2.$$

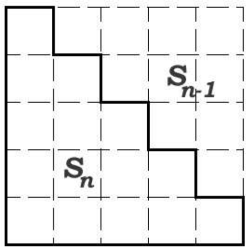

FIG. 6.5 – Somme des ***n*** premiers entiers.

Donc

$$2\,(S_n) \;=\; n^2 \;+\; n$$

$$(S_n) \;= 1 \;+\; 2 + \;3 + \;4 + \cdots + \;n = \frac{n^2+n}{2}.$$

Mais assemblés autrement (*cf* figure 6.6) :

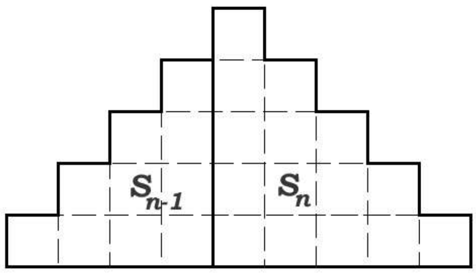

FIG. 6.6 – Somme des ***n*** premiers impairs.

$$n^2 \;=\; (S_n) \;+\; (S_{n-1}) = 1 \;+\; 3 + \;5 + \;7 + \cdots + \;(2\,n-1)$$

6.3 *Retour à Euclide.*

6.3.1 N'oublions pas le terme rectangle.

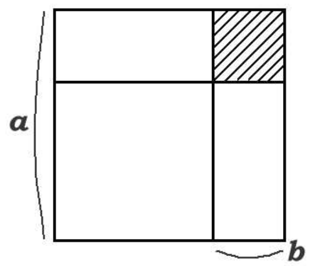

FIG. 6.7 – $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Nous avons déjà rencontré $(a+b)^2$, alors $(a-b)^2$?
Pour retrancher au carré construit sur a les deux rectangles $a\,.\,b$ il faut ajouter le carré construit sur b

$$a^2 \;-\; 2\,(a\,b) \;+\; b^2.$$

C'est en s'appuyant sur ce raisonnement que Bombelli dès le seizième siècle justifiait que *moins par moins* donnait *plus*.

6.3.2 Mais il y a également les inégalités.

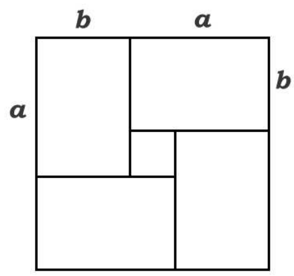

FIG. 6.8 – $(a+b)^2 > 4ab$.

Dans le carré construit sur $a+b$ il y a plus que les quatre rectangles $a\,.\,b$:

$$(a+b)^2 \;>\; 4\,a\,b$$

donc

$$\frac{a+b}{2} \;>\; \sqrt{a\,b}.$$

La moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ est supérieure ou égale à la moyenne géométrique $\sqrt{a\,b}$.
Avec $a+b=1$, on aura la moyenne géométrique supérieure à la moyenne harmonique h telle que $\dfrac{2}{h}=\dfrac{a+b}{ab}$, etc. Mais ceci est d'un autre âge.
Si on utilise le libre **II** d'Euclide, d'autres relations apparaissent démontrées à l'aide des aires...

6.3.3 Equations.

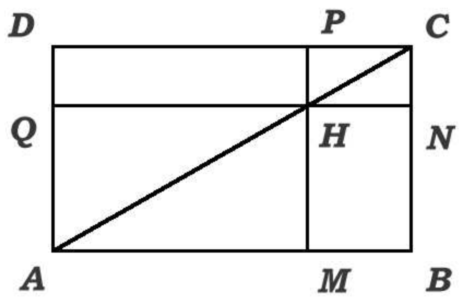

FIG. 6.9 – Le *gnomon.*

Bombelli, encore lui, en introduisant la longueur unité avant Descartes conduisait à d'autres constructions. C'est ainsi qu'avec, ce que les grecs nommaient le gnomon, par simples opérations sur les aires non calculées (*cf* figure 6.9), on obtient l'égalité d'aires

$$(DQHP) = (MBNH).$$

Et si $AM=a$, $MB=b$, $AQ=1$ alors $a.QD=1.b$ qui rime avec $a.x=b$, premier degré...

Trouver deux nombres connaissant somme et produit :

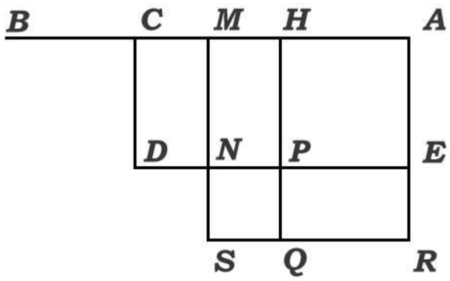

FIG. 6.10 –

Pour le second degré un auteur tel que Gosselin fondait en 1577, son raisonnement sur le problème : Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit (*cf* figure 6.10) :

$$a+b=\sigma \qquad\qquad ab=\pi \ .$$

Des deux nombres l'un deux est plus grand que $\frac{\sigma}{2}$ et l'autre plus petit (si $a = b$ une table de carrés fait l'affaire). Si AB figure σ avec $AM = \frac{\sigma}{2}$, $AC = a = AM + MC$. Posons $a = \frac{\sigma}{2} + \alpha$.
Si $HM = MC = \alpha$, $b = \frac{\sigma}{2} - \alpha = AH$.
Connaître π c'est avoir le rectangle $ACDE$ d'aire π,
donc $AE = AH = CD = b$.
Le rectangle $ARQH$ obtenu en substituant $ERQP$ égal à $CMND$ conduira au carré $AMSR$ dont l'aire est $\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$. Mais ce carré est formé de $AMNPQR$ d'aire π, $((AMNE) + (PQRE)$ et du carré $PNSQ$ d'aire α^2. Donc

$$\frac{\sigma^2}{4} = \pi + \alpha^2 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 = \frac{\sigma^2}{4} - \pi.$$

Je peux donc (table de carrés) obtenir $\alpha = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \pi}$, à condition que $\frac{\sigma^2}{4} - \pi$ soit positif...
alors

$$a = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \pi}$$

etc...la voie est ouverte.

6.4 *Rectangle, triangle, rapport de longueurs.*

6.4.1 Théorème du papillon.

On a établi d'abord que tout triangle est "moitié" d'un rectangle, que si deux triangles sont situés dans une même bande de parallèles et ont même base, leurs aires sont égales et réciproquement.

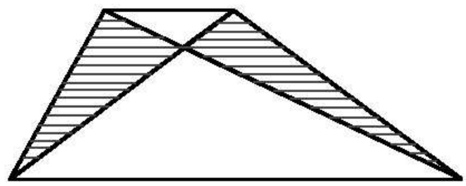

FIG. 6.11 – Théorème du *papillon*.

On notera que les parallèles entrent en jeu par notion de distance infiniment conservée et non d'angles correspondants égaux (voir Arnauld). On pourra noter que dans un trapèze les diagonales définissent des triangles d'aires égales (théorème dit du *papillon*).

6.4.2 Et Pythagore ?

– Soit un triangle ABC de hauteurs BB' et CC' prolongées en $B'B_1 = AC$ et $C'C_1 = AB$. Adjoignons les rectangles $AB'B_1B_2$ et $AC'C_1C_2$, ainsi que les triangles égaux (isométriques...) ABB_2 et AC_2C.

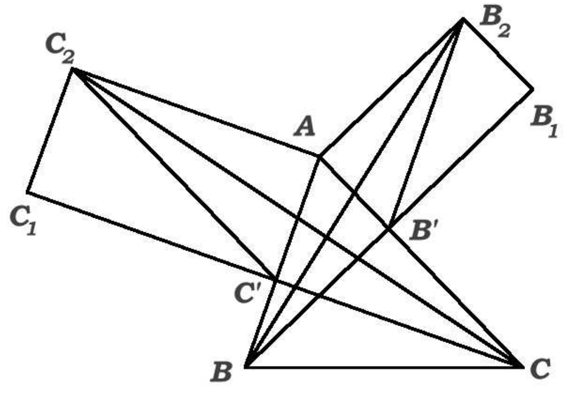

FIG. 6.12 –

Parlons aires :

$$(AB'B_1B_2) = 2(AB'B_2) = 2(ABB_2)$$

donc

$$(AB'B_1B_2) = 2(ACC_2) = 2(AC_2C_1) = (AC'C_1C_2).$$

Le produit d'un côté par la projection de l'autre sur lui ...
A moins que l'on ne parle de cosinus, ou de produit scalaire...

– Carrés construits sur les côtés(*cf* figure 6.13.
Trois hauteurs, six rectangles, pour trois carrés (revoir la figure si un angle est obtus).

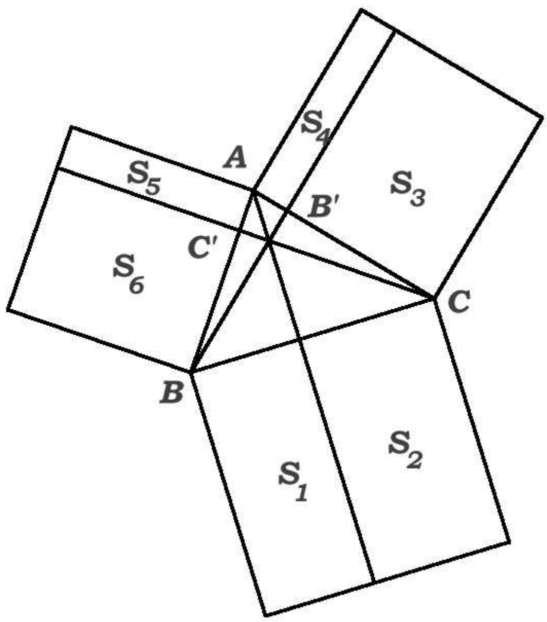

FIG. 6.13 – Carrés construits sur les côtés.

$$S_1 = S_6, \quad S_2 = S_3, \quad S_4 = S_5.$$

Dans le carré qui s'appuie sur BC

$$\begin{aligned} BC^2 &= S_1 + S_2 = S_6 + S_3 \\ &= \text{carré sur } AB - S_5 + \text{carré sur } AC - S_4 \ . \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC.AB' \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Bien sûr si $\widehat{BAC} = 1$ droit, $S_4 = S_5 = 0$ ...

6.4.3 Les milieux (*cf* figure 6.14).

Hypothèses : $AM = MB$ et MN parallèle à BC, donc

$$(AMC) = (MBC) = \frac{1}{2}(ABC)$$

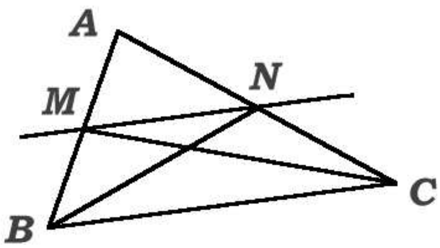

FIG. 6.14 – Droite des milieux.

$$(MBC) = (NBC) \quad \text{(bande)}$$
$$(NBC) = \frac{1}{2}(ABC).$$

Conclusion : $AN = NC$.
Réciproque :
Hypothèses : $AM = MB$ et $AN = NC$.

$$(MBC) = \frac{1}{2}(ABC) \text{ et } (NBC) = \frac{1}{2}(ABC) \text{ (bande).}$$

Or M et N sont d'un même côté de (BC), conclusion MN et BC sont parallèles.

Mais que dire de $(ABC) = (DBC)$ si A et D sont de part et d'autre de (BC) ?
La parallèle à (BC) passant par D recoupe (AB) en E :

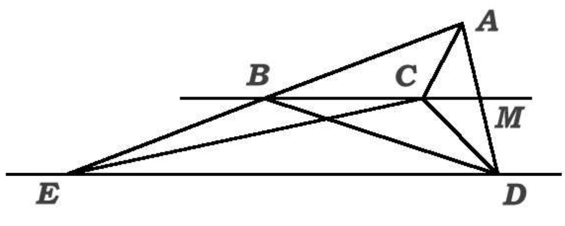

FIG. 6.15 – A et D sont de part et d'autre de (BC) .

$$(DBC) = (EBC)$$

donc

$$\text{donc } (EBC) = (ABC);$$

or B est au milieu de $[AE]$ et M est au milieu de $[AD]$ (théorème direct). La droite (BC) coupe (AD) en son milieu (*cf* 6.4.3) et $AM = \frac{1}{2}AD$.

6.4.4 Une extension.

Si au lieu de $\frac{1}{2}$ on prend le rapport k tel que $AM = k\,AB$, le même raisonnement conduit à $AN = k\,NB$ avec les réciproques associées.
C'est ainsi qu'avec le trapèze on introduira la division harmonique (trop vieux souvenirs)...

6.4.5 Applications : les médianes d'un triangle.

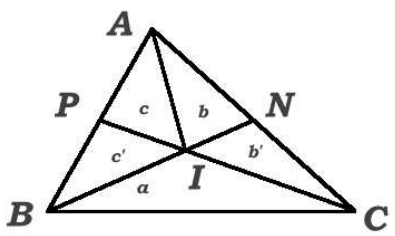

FIG. 6.16 – Les médianes.

BN et CP médianes de ABC se coupent en I. Que dire de AI ?
En lisant le découpage en aires de la figure (*cf* figure 6.16) on a

$$\begin{array}{lll} b = b' \quad \text{et} & a + b' = c' + c + b & (BN \text{ médiane}) \\ c = c' \quad \text{et} & a + c' = b' + b + c & (CP\text{médiane}) \end{array}.$$

D'où $a = b + b' = c + c'$. Cette dernière égalité entraîne que (AI) coupe $[BC]$ en son milieu.
Par ailleurs, comme $c = c'$, $b + b' = 2c$ donc $CI = 2IP$ etc.

6.5 *Produit de rapports ou rapport de produits.*

1. Euclide dans le livre 6 s'intéresse aux parallélogrammes équiangles et au rapport de leurs côtés. Au seizième siècle un de ses traducteurs, Commandino, dans une scholie, adapta la propriété aux triangles ayant un angle égal. Clavius, Henrion, Le Mardele insistèrent sur la propriété puis, comme d'autres, elle fut négligée. Arrêtons nous un instant.
   Traçons deux droites Δ_1 et Δ_2 se coupant en O. Sur δ_1 prenons deux points A et A' et sur Δ_2 deux points B et B'.
   Mais il y a plusieurs cas de figure ! Tant pis, étudions les triangles OAB et $OA'B'$. Mais les angles en O sont ou égaux ou supplémentaires ! Tant pis, traçons $A'B$. Etudions les rapport des aires (OAB) et $(OA'B'$.

Dans tous les cas de figure on a :

$$\frac{(OAB)}{(OA'B)} = \frac{OA}{OA'} \text{ et } \frac{(OA'B)}{(OA'B')} = \frac{OB}{OB'}$$

donc

$$\frac{(OAB)}{(OA'B')} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'}.$$

Le rapport des aires égale donc le rapport du produit des côtés des angles égaux ou supplémentaires.
Votre figure est bien en accord !...

2. Applications :
   - (AD) est bissectrice de l'angle A du triangle ABC.
     Mais bissectrice intérieure ou extérieure ? Ne perdons pas notre temps ; angles égaux ou supplémentaires a-t-on vu.

$$\text{En } A \quad \frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{AB.AD}{AC.AD} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\text{En } D \quad \frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{DA.DB}{DA.DC} = \frac{DB}{DC}.$$

     Si vous voulez perfectionner votre figure, orientez les triangles et vous aurez la relation algébrique qui vous convient.
   - Triangles équiangles.
     Vocabulaire usuel au "grand siècle" pour désigner des triangles ayant deux, donc trois, angles homologues égaux.

     Hypothèses : $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{M} \\ \widehat{B} = \widehat{N} \\ \widehat{C} = \widehat{P} \end{cases}$

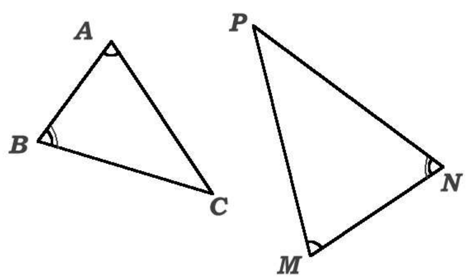

FIG. 6.17 – Triangles équiangles.

$$\frac{(ABC)}{(MNP)} = \underbrace{\frac{AB.AC}{MN.MP}}_{\text{en } A} = \underbrace{\frac{BA.BC}{NM.NP}}_{\text{en } B} = \underbrace{\frac{CB.CA}{PN.PM}}_{\text{en } C}.$$

En simplifiant
$$\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{CA}{PM}.$$
Conclusion : côtés homologues proportionnels.
Et de plus
$$\frac{(ABC)}{(MNP)}=\left(\frac{AB}{MN}\right)^2.$$
Le rapport des aires est le carré du rapport des côtés.

– Arrêtons-là : Menelaüs en rideau.

a, b, c sont les aires des figures.

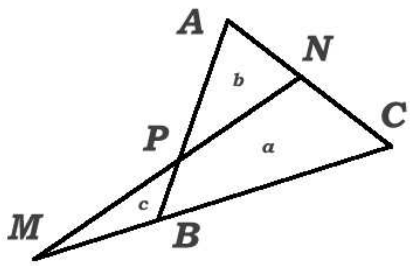

FIG. 6.18 – Théorème de Menelaüs.

$$\text{En } M \quad \frac{c}{a+c}=\frac{MB.MP}{MC.MN}$$
$$\text{En } N \quad \frac{a+c}{b}=\frac{NC.NM}{NA.NP}$$
$$\text{En } P \quad \frac{b}{c}=\frac{PA.PN}{PB.PM}.$$
Le produit membre à membre et les simplifications conduisent à
$$1=\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}.$$
On peut aussi algébriser. N'a-t-on pas travaillé à l'économie ?