8

Premiers niveaux de difficulté dans l'étude des *lieux*

Luc Sinègre

8.1 *Introduction.*

Tous les enseignants savent qu'on a posé jusqu'à la fin des années soixante des problèmes dits de *lieu*.

Quel est le lieu de l'orthocentre du triangle quand un des sommets décrit un cercle donné qui contient les deux autres ?

L'introduction du vocabulaire des *mathématiques modernes* remplaça cette formulation trop attachée à la Mécanique par le célèbre

Trouver l'ensemble des points M tels que...

Comme l'abandon du langage des mathématiques modernes a correspondu, dans les années quatre-vingts, avec la disparition totale de de la *Cinématique* au Lycée, aucune des deux terminologies ne renvoie plus directement à une partie du cours. Cependant on trouve encore les deux formulations, au gré de l'humeur des rédacteurs de problèmes.
Est-ce important ? Est-ce seulement un problème de vocabulaire ?

Une première réponse, naïve, serait de présenter la vision mécanique comme une vision plus concrète en opposition avec les mathématiques plus abstraites des ensembles.
Cette dualité concret-abstrait semble renforcée depuis le développement des logiciels de géométrie (Cabri géomètre, par exemple). En effet ces logiciels permettent de découvrir des lieux qui sortent des sentiers battus, et plus généralement de modéliser des systèmes articulés. Mal utilisés ils évitent aussi aux élèves de réaliser concrètement la figure et donc les font s'abstraire au mauvais sens du terme.

Nous espérons montrer, dans ce qui suit, que les deux présentations, mécanique et ensembliste, possèdent toutes les deux leur intérêt mais aussi leurs part d'abstraction. Il nous paraît intéressant de mettre en parallèles, sur des exemples, *l'articulation mécanique* qui met en mouvement la figure et la résolution classique qui elle utilise les *transformations*. Tout le monde sait que la difficulté est de parvenir à ce que l'élève arrive à introduire, de lui-même, sa propre transformation, et la définisse, à l'aide de points fixes, sans contraintes en surnombre. Voilà bien longtemps qu'au Baccalauréat une telle épreuve n'a été demandée ce qui prouve que notre jugement est largement partagé !

Nous avons essayé d'illustrer par des exemples, et de graduer les principales difficultés que rencontrent les élèves : points guides et points guidés, de type élémentaire ou simple, droites guides et points guidés, etc. Nous concluons par un exemple qui pourrait être le sujet, à lui seul, d'un article entier. Ce problème de lieu, dit du parallélogramme[1] montre les difficultés que l'on rencontre lorsque justement, on ne dispose pas, *a priori* d'un guidage entre un point variable de la figure, parcourant un lieu connu, et le point recherché. Les généralisations qu'en a tirées Thierry Hamel illustrent aussi combien l'emploi des transformations, en tant que véritables *déformations*, c'est-à-dire dégagés cette fois de la Mécanique, est fécond. Son développement qui formait la dernière partie du résumé de cette intervention, présente un intérêt en lui-même ; il fut donc décidé de le présenter à part. Le lecteur trouvera cet article au chapitre suivant.

8.2 *Premiers Problèmes.*

Beaucoup se souviennent encore de la mise en oeuvre d'une réciproque comme d'un exercice formel. Souvent les mauvais élèves croient que la complexité des mathématiques est le fait des professeurs, et non pas de leur nature même, ou de celle de la réalité. Dans la réalité le carré de la somme de deux nombres vaut la somme des carrés, mais les professeurs ne veulent pas en convenir et compliquent ! Justement en ce qui concerne les réciproques, le clan des mauvais élèves est très important, car on travaille toujours, au début sur des objets mathématiques très simples. Les objets les plus compliqués que l'on rencontre sont les cercles et les droites, et les questions

Est-ce que toute la droite est décrite (ou tout point de la droite atteint)

paraissent bien sibyllines.

L'introduction des transformations, même dans des cas très simples, permettait aux professeurs d'éviter justement ces réciproques "scholastiques".

[1] Henri Plane avait soulevé ce thème lors d'une discussion de la commission Inter Irem de géométrie sur le problèmes de *réciproques*.

8.2.1 Lieux élémentaires.

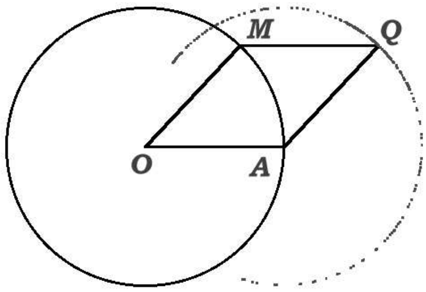

FIG. 8.1 – La réciproque coïncide avec le sens direct.

Le point M décrit le cercle de centre O contenant A. On construit le parallélogramme $(MOAQ)$ et l'on cherche le lieu de Q (*cf* figure 8.1). Beaucoup d'élèves trouvent que par égalité sur les côtés opposés la longueur AQ est fixe et donc que le point Q appartient au cercle de centre A, contenant O. Mais la mise en place de la réciproque est souvent oubliée. On peut d'ailleurs remarquer que par la symétrie des données, poser la réciproque revient à faire jouer à O le rôle de A et Q celui de M.
Bien sûr la solution classique consiste à introduire la translation de vecteur $\vec{OA}$ qui élimine le problème de la réciproque.
Le passage du monde de la mécanique à celui des transformations correspond à remplacer les articulations qui relient le point M au point Q par une transformation connue. Dans ce cas la solution est particulièrement simple car les contraintes et les relations sont directement données par l'énoncé. L'élève a juste à remplacer le parallélogramme articulé $(MOAQ)$ par la translation pour conclure. En revanche si le problème avait été rédigé différemment, par exemple si Q avait été défini comme le barycentre du système $\{(O,-1), (M,1), (A,1)\}$ il aurait d'abord fallu que l'élève anime le cercle initial et mette en place le parallélogramme articulé avant de refaire le même raisonnement, ou encore reconnaisse la définition de la translation, pour produire directement, et sans recourir au mouvement, le cercle final.

Voilà un début de problème très voisin (*cf* figure 8.2) :
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$, distincts de A et de B on construit le point Q tel que $(MABQ)$ soit un parallélogramme. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[MQ]$ puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B.
Si la présentation par les traceurs peut laisser penser que l'interprétation cinématique est plus naturelle que l'interprétation ensembliste, il ne faut

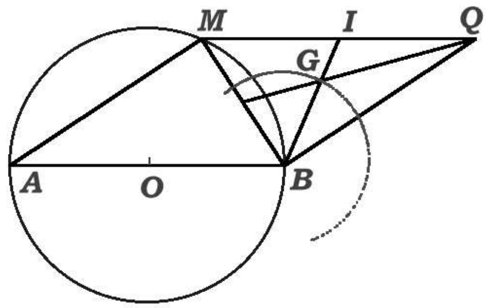

FIG. 8.2 – Bac C Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon etc. Juin 1985.

pas oublier que la notion de trajectoire, comme la notion d'ensemble est à la fois concrète lorsqu'elle s'appuie sur la connaissance naïve et abstraite lorsqu'elle est conceptualisée. Le passage du lieu à l'ensemble est une *statification* et comme le dit Rudolf Bkouche

> *c'est peut-être un point important de l'enseignement que de conduire à la statification, et montrer ainsi quelle est la signification de l'élimination du mouvement.*

Il est important d'enseigner, à la fois, les deux points de vue. D'abord parce que les esprits de nos élèves ne prennent pas tous le même chemin pour arriver à un résultat et ne sont pas tous faits dans le même moule. Ensuite parce que c'est la transposition d'un domaine à un autre des mathématiques qui est fécond. Comment pourra-t-on inventer la transformation s'il elle n'est pas directement sous-entendue par les données du problème ?
Pour résumer, définissons les problèmes *élémentaires* de lieu. Les données d'un problème *élémentaire* permettent de relier le point dont on cherche la trajectoire à un point variable de la figure dont la trajectoire est connue. Relier d'abord au sens de la mécanique, c'est-à-dire d'un *guidage*, qui par des mécanismes articulés, produit simplement la seconde trajectoire à partir de la première. Il s'agit bien d'une liaison point à point, et comme on n'envisage que les cas où tous les points à considérer sont donnés pas l'énoncé[2] le guidage est d'une façon ou d'une autre déterminé par l'énoncé. La difficulté du problème est très différente si l'on pose tout de suite la question du lieu du centre de gravité, sans passer au préalable par le lieu d'un point intermédiaire.

[2]En ce sens dans la première question du problème de bac qui précède on a déjà passé un mini pas de difficulté puisqu'il faut considérer la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{OA}$. En revanche l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$ est entièrement déterminée par les points de la figure.

8.2.2 Lieux simples.

Les lieux *simples* sont obtenus de la même façon que les lieux élémentaires. Mais les points qui les déterminent ne sont plus directement donnés par la figure initiale. Pour ces lieux qui constituent l'essentiel de ce qui devrait être demandé aux lycéens, la difficulté consiste donc à trouver le *guidage* qui relie un point connu de la figure au point recherché. Par exemple dans le problème de Bac de Besançon précité on lisait à la deuxième question :
On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM). Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ? Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B.
Le concepteur du problème a souhaité, avec raison, aider le candidat à dé-

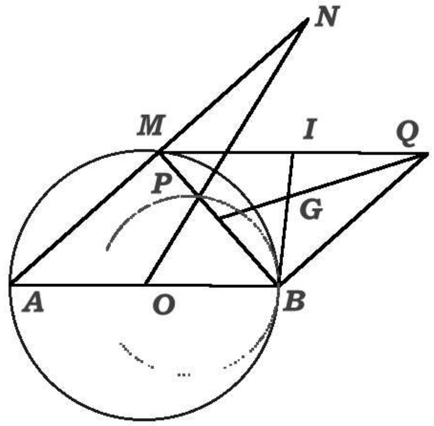

FIG. 8.3 – Un lieu simple.

couvrir la transformation, ici, l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$ qui relie M à P. Sans indication la question serait certes plus difficile, mais la difficulté n'a rien à voir avec un problème de réciproque. La réponse serait la même pour une question beaucoup plus simple :

On appelle P le barycentre du système $(B, 1)$ $(M, 2)$ etc.

8.3 *Rappel Historique.*

Chasles dresse dans l'Aperçu[2] des méthodes en Géométrie [1837] l'inventaire de doctrines récentes sur la transformation des figures. Ce catalogue vient après le rappel de la théorie des transversales que l'auteur place dans le mouvement de renouveau qu'a commencé Carnot. Cette énumération semble de prime abord hétéroclite. Chasles cite, par exemple, après la perspective elle-même, l'homothétie, qui est désignée comme *la méthode qui consiste à faire croître , dans un rapport constant, les rayons visuels menés aux différents points d'une figure, pour former une figure semblable et semblablement placée ;*

puis l'affinité dont le nom est attribué à Euler (Lineae affines) et utilisée dans le plan comme dans l'espace. On remarque d'abord que, dans ce catalogue, voisinent des méthodes de construction utilisées ou inventées par les artistes (Dürer, théorie des bas-reliefs, voûtes) et des théories qui relèvent directement des mathématiques (homologie, étude de courbes par projection ou perspective). Il s'agit pour Chasles de faire rentrer ces tentatives dans une même catégorie, l'homographie. Les transformations que nous avons déjà évoquées, translations (par l'étude des frises de Bosse), homothéties, déplacements entrent dans ce que Chasles appelle le principe d'homographie, ou plus exactement le principe de déformation homographique. Il faut d'ailleurs distinguer l'application du principe d'homographie lui-même qui sert à démontrer et inventer de nouveaux théorèmes, et l'étude des figures que le principe permet d'obtenir, figures que l'auteur appelle alors homographiques. Le principe de déformation est donc d'abord un outil de démonstration, comme le principe de dualité auquel il succède dans l'exposé de Chasles. Mais il s'oppose au principe de dualité par son homogénéité : on associe à chaque objet élémentaire un objet du même type, aux points des points, aux droites des droites. Dans *le Rapport sur les progrès de la Géométrie* (p.140) Chasles[3] dressera d'ailleurs un peu plus tard l'historique d'une autre transformation point à point, l'inversion, transformation par rayons vecteurs réciproques. On y lit que cette transformation aurait pu apparaître naturellement de l'étude, par Ptolémée, de la projection stéréographique, mais que c'est Quetelet qui dans son résumé d'une nouvelle théorie des caustiques (1827) l'emploie pour étudier la polaire d'une courbe plane quelconque. Est attribuée ensuite à Bellavitis l'idée d'une méthode générale de transformation des figures, fondée sur des considérations directes.

A l'origine les transformations ne sont donc pas reliés à nos guidages. De toute manière la translation, l'homothétie ou les déplacements ne sont pas de "bonnes déformations" car elle n'ont pas d'intérêt particulier comme outil de démonstration aux yeux d'un géomètre du dix-neuvième siècle, et elle n'ont évidemment aucun pouvoir d'invention. C'est donc comme cas particulier d'homographies et grâce au pouvoir synthétique de l'unification mathématique que les transformations étudiées aujourd'hui au collège ont pris d'abord place dans la catégorie des transformations de Chasles.

Pour donner un exemple ce principe de déformation pourrait donner la réponse à la question suivante, issue du problème initial (*cf* figures 8.1 et 8.4) déformé par affinité.

Un point M décrit une ellipse de demi-diamètre $[OA]$. Quel est le lieu du barycentre du système $\{(O,-1),\ (M,1),\ (A,1)\}$?

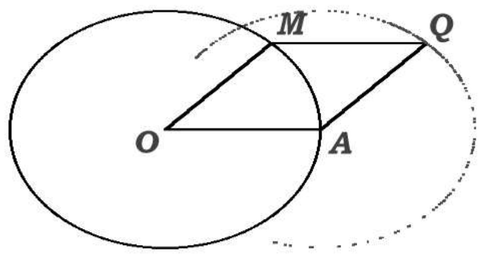

FIG. 8.4 – Un lieu simple.

Mais si l'on ne retrouve pas de lien originel entre les transformations et les articulations mécaniques, ce lien est fait par Chasles lui-même qui indique comme une application possible de la théorie des figures homographiques :

> *Les propriétés que présente le système de deux corps égaux, et même de deux corps semblables, situés d'une manière quelconque dans l'espace.*

Ceci lui permet donc de rattacher à l'homographie l'étude du mouvement des corps indépendamment des causes qu'il a appelé, après Ampère, *Cinématique*. Il choisit d'illustrer son propos par un théorème de Mécanique pratique (on peut transporter un corps solide d'une première position à une autre par le mouvement d'une vis). Mais ces remarques visent plus à conforter le caractère d'universalité du principe d'homographie qu'à asseoir de nouvelles preuves.
Quand Chasles résume le même sujet dans le Rapport[3] en 1870, les figures en mouvement ne sont plus seulement des figures semblables car On peut considérer deux figures semblables, ainsi que l'auteur l'avait fait dans un mémoire antérieur[1], et plus généralement deux figures homographiques quelconques ([3], 1870 p.242). Il indique que le cas des figures égales, qui est le plus simple de la théorie des figures homographiques, a du être traité directement, en raison de l'importance qu'il présente en Mécanique.
Mais le lien entre les systèmes articulés et la théorie naissante des transformations a été effectué dès la fin du dix-neuvième siècle et nous avons raconté cette histoire à Montpellier[4]. Rappelons simplement que l'idée de rechercher, dans le mouvement d'un quadrilatère articulé, la trajectoire d'un point attaché à la bielle en fonction de celle d'un point attaché à la manivelle s'est posé en 1875, raconte Kempe, pour résoudre le problème de l'échange de ces tiges. Kempe[5] a d'abord retrouvé le mécanisme de Scheiner en recherchant la trajectoire d'un point directement placé sur la bielle avant que Sylvester ne généralise le problème en choisissant de construire sur chaque tige deux véritables triangles ayant les

mêmes angles.

8.4 *Réversibilité des guidages.*

8.4.1 *Un cercle partiel ?*

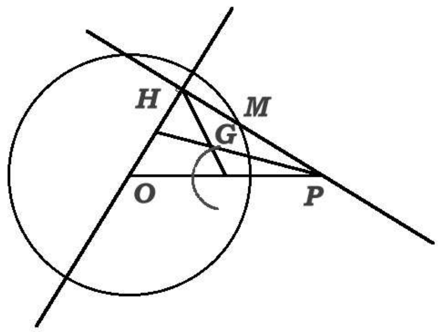

FIG. 8.5 – Un cercle partiel.

On a pris un point P à l'extérieur d'un cercle de centre O et de rayon R. Le point M décrit le cercle. On note H le projeté orthogonal de O sur (PM) quel est le lieu L du centre de gravité G du triangle OHP ?
Une étude, disons expérimentale, permet de tracer le lieu demandé. Ce lieu contient deux points d'arrêts qui ne sont pas des points déjà donnés dans le texte (c'est pour cela qu'on a choisi le lieu du centre de gravité). On s'aperçoit facilement en faisant tourner le point M sur le cercle que $\mathcal{L}$ est décrit deux fois. Une première étape de la solution consiste bien sûr à rattacher le point G au point H, par l'homothétie de centre I, milieu de $[OP]$. Ce lien peut-être posé dès la construction de la figure si l'on veut éviter (donc si l'on s'interdit) de construire les médianes du triangle OHP. Comme H appartient au cercle de diamètre $[OP]$, le point G appartient à l'image de ce cercle par l'homothétie. Nous venons de définir un premier guidage de H à G.
Ce guidage étant réversible (ce qui signifie dans le monde des applications que l'homothétie est une bijection) le point H ne doit pas décrire entièrement un cercle. Comme la droite (PM) balaye le secteur défini par les deux tangentes (PA) et (PB) menées au cercle par P, seul l'arc d'extrémités A et B du cercle et contenant O est décrit par H.
Ces remarques qui ne constituent pas une preuve parfaitement satisfaisante pourraient suffire lors d'une première étude. Elles expliquent pourquoi il y a un vide dans $\mathcal{L}$, et c'est le plus important. Pour expliquer pourquoi $\mathcal{L}$ est parcouru deux fois on peut mettre en place les deux guidages qui l'on vient de trouver. A un point M on associe donc d'abord le projeté orthogonal de O sur (PM) et c'est là la partie la plus délicate. Nous avons vu que le second guidage était réversible (homothétie). Si l'on étudie aussi la réversibilité du premier guidage on constate que deux points du cercle correspondent au même point H, ce qui justifie la double génération. Cette

difficulté provient d'une mauvaise formulation de notre énoncé. Si l'on avait écrit

à toute droite D passant par P et sécante au cercle on associe H le projeté orthogonal de O sur D

on aurait alors un énoncé qui aurait permis d'associer à toute droite du secteur (APB) un et un seul point H et le lieu $\mathcal{L}$ ne serait décrit qu'une fois. La preuve de la réciproque correspond à la construction du point H à partir d'une droite D donnée qui repose sur un guidage droite-point.

8.4.2 *Une application complexe.*

Les applications géométriques des nombres complexes fournissent les premiers exemples d'applications ponctuelles suffisamment irrégulières puisque, par exemple, les droites ne sont plus conservées par les homographies. Ces exercices permettent aussi une nouvelle transposition grâce au secours de l'Algèbre. Nous donnons ici l'exemple d'une application ponctuelle qui n'est pas une homographie et qui s'apparente à la transformation[3] de *Joukovski*. On retrouve cette application dans un exercice de Bac 1997 (Spécialité) qui a produit un petit scandale en son temps.
Etudions l'application qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
Une construction géométrique de cette application est possible. Soit A le

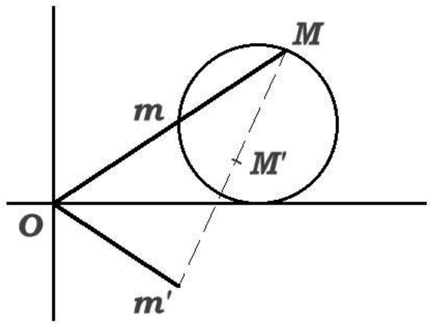

FIG. 8.6 – Anti-inversion.

point d'affixe 1. On associe à M l'intersection m de (OM) avec le cercle contenant M et tangent en A à (OA). On appelle m' le symétrique[4] de m par rapport à (OA). Le point M' est le milieu de $[m'M]$.
Algébriquement il est facile de constater, grâce au théorème de *d'Alembert-Gauss* que tout point μ d'affixe ζ donné possède en général deux antécédents solutions du polynôme $z^2 - 2\zeta z + 1$. Ces deux antécédents sont confondus si et seulement si le discriminant du trinôme est nul, donc si et seulement si $\zeta^2 = 1$. En reprenant la partie réelle et la partie imaginaire de cette condition on trouve les intersections des axes avec l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$. Donc les quatre points $(1, 0)$ $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(0, -1)$.
Si l'on recherche à construire l'antécédent d'un point Q donné, d'affixe ζ, on cherche à construire géométriquement les racines ω_1 et ω_2 du trinôme

[3]On appelle transformation de *Joukovski* une application conforme qui permet de passer de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre circulaire à un écoulement autour d'un profil d'aile d'avion, d'où son utilité (*cf* [6]).

[4]L'application qui à M associe m est une inversion de pôle O et de puissance 1, l'application qui à M associe M' est une anti-inversion de même pôle et même puissance, elle est obtenue en ajoutant l'action de la réflexion d'axe (OA).

$z^2 - 2\zeta z + 1$. Comme leur produit fait 1 on retrouve que les points P_1 et P_2 sont anti-inverses l'un de l'autre. En regardant la somme on constate que P_1 et P_2 sont symétriques par rapport à Q. La transposition *algébrique* a donc été féconde.

Pour rechercher l'image du cercle unité par cette application, le plus

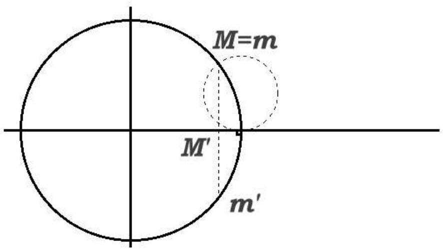

FIG. 8.7 – La transformation se réduit à une projection.

simple est de remarquer qu'à tout point d'affixe $e^{i\theta}$ on associe le point d'affixe $\cos\theta$. L'image du cercle unité est donc le diamètre horizontal. La réciproque se démontre en invoquant un argument de *continuité*, ce qui donne dans le langage des fonctions une nouvelle version d'un guidage mécanique. Bien sûr, on peut aussi, voir que notre application une fois restreinte au cercle unité n'est qu'une projection.

A une demi droite que l'on écrit, pour θ fixé, $(\lambda e^{i\theta})_{\lambda\in[0,+\infty[}$, on associe donc

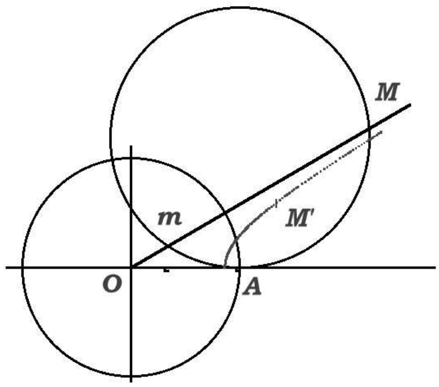

FIG. 8.8 – Branche d'hyperbole image d'une demi-droite.

le point d'affixe $\frac{1}{2}\left(\lambda e^{i\theta} + \frac{1}{\lambda}e^{-i\theta}\right)$. Le point M' décrit la branche d'hyperbole d'équation $xy = 1$ et $x \geqslant 0$ dans le repère affine $\left(O, \frac{e^{i\theta}}{2}, \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)$. L'étude du lieu se ramène donc à l'étude d'un paramétrage de la branche d'hyperbole, nouvelle transposition (ou adaptation ?) du guidage mécanique.

Bibliographie

[1] CHASLES (Michel), *Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables, placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre*, [1830].

[2] CHASLES (Michel), *Aperçu Historique sur l'origine et le déveleppement des méthodes en Géométrie*, 1837, Gauthier-Villars, (3ème éd. 1889 Paris).

[3] CHASLES (Michel), *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Hachette, Paris, 1870.

[4] HAMEL (Thierry), SINEGRE (Luc), VIVIEN (Frédéric) *Actes du colloque*, Irem Montpellier, 2003.

[5] KEMPE (Alfred. Bray), *On the General Method of producing exact Rectilinear Motion by Linkwork*, Proceedings of the London Royal Society. 163 (1875), p.565-577.

[6] VIVIEN (Frédéric) *La transformation de Joukovski*, Aimer faire des Maths, Irem Rouen, 1998.