

# 1

## Le problème de Rudolf Bkouche ou la construction du quadrilatère de Ptolémée.

*Frédéric Vivien, Luc Sinègre, Thierry Hamel.*

### 1.1 Introduction.

En marge du colloque, comme c'est souvent le cas, on pose des questions qui ne restent pas toujours sans réponse. C'est la résolution d'un tel problème, après une fameuse visite de *Stavelot*, que l'on propose ici.

Ainsi Rudolf Bkouche, martelait-il à Liège qu'un quadrilatère convexe articulé  $ABCD$  de côtés fixés est d'aire maximale si et seulement si il est inscriptible dans un cercle et il s'interrogeait :

*Comment le construire ?*

C'est-à-dire comment construire un quadrilatère convexe inscriptible tel que  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$  et  $DA = d$ .

Le lecteur qui aimerait revenir sur le théorème de Ptolémée lui-même et à une démonstration élémentaire de l'assertion de Rudolf pourra se reporter à l'exposé de Thierry Hamel[?]. La démonstration la plus efficace repose sur les propriétés de l'inversion, et elle a servi de modèle à notre construction. On la trouve exposée dans tous les livres de Terminale antérieurs à 1970 ou encore dans Berger[?]. Il faut signaler qu'on peut produire une démonstration aussi élégante grâce aux propriétés des triangles semblables, maintenant de nouveau enseignées dans les Lycées. Evelyne Barbin a écrit l'historique de cette démonstration[?] depuis les *Elements de Géométrie* du père B. Lamy.

### 1.2 Analyse.

Soit  $ABCD$  quatre points cocycliques sur un cercle de centre  $O$  avec

$$AB = a, BC = b, CD = c \text{ et } DA = d.$$

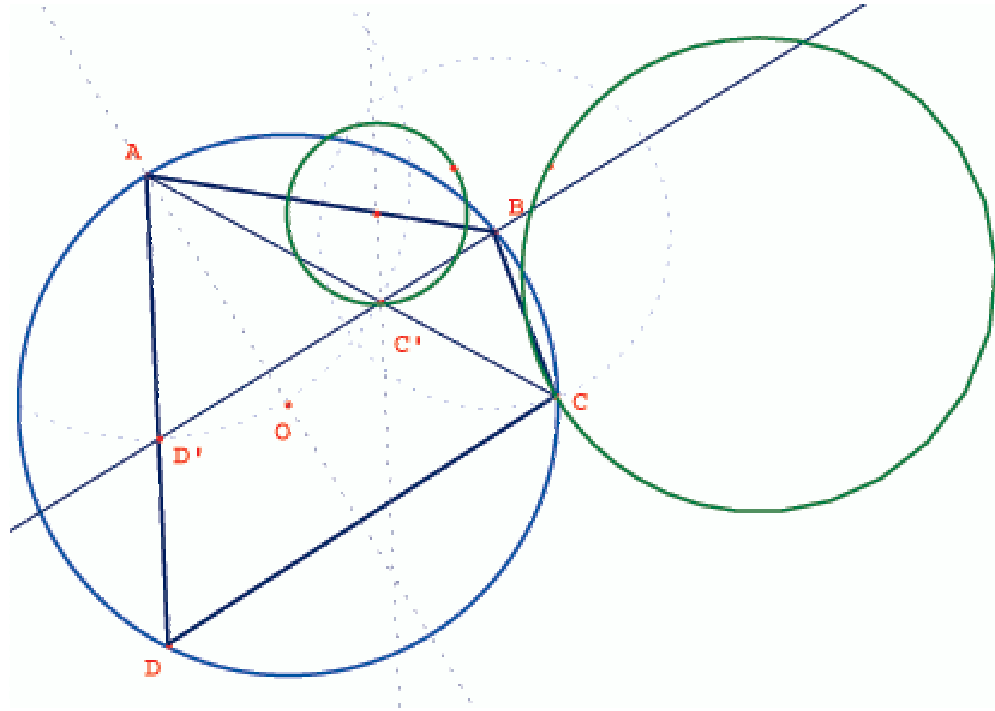


FIG. 1.1 – Construction Ptolémée.

L'inversion de pôle  $A$  et de rapport  $a^2$  laisse  $B$  invariant et envoie  $C$  et  $D$  respectivement en  $C'$  et  $D'$  situés sur la perpendiculaire passant par  $B$  à la droite  $(AO)$  (cf figure ??).

On a

$$B'C' = \frac{a^2 b}{AB \cdot AC} \quad C'D' = \frac{a^2 c}{AC \cdot AD} \quad AD' = \frac{a^2}{d}$$

Si bien que

$$\frac{B'C'}{\frac{b}{a}} = \frac{C'D'}{\frac{c}{d}} = \frac{B'D'}{\frac{b}{a} + \frac{c}{d}}$$

<sup>1</sup> On a donc

$$\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{bd}{bd + ca}$$

Le point  $C'$  appartient donc à l'image du cercle de centre  $A$  et de rayon  $AD'$  par l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $\frac{bd}{bd + ca}$ . Le point  $C$  appartient donc à l'image de ce cercle par la première inversion ce qui paraît suffisant pour le construire compte-tenu qu'il est sur le cercle de centre  $B$  et de rayon  $b$ .

<sup>1</sup> $C'$  appartient au segment  $[BD']$  si l'on pris le quadrilatère  $ABCD$  convexe.

### 1.3 Synthèse.

Pour construire un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle tel que

Construction du quadrilatère  $ABCD$  tel que  $BC = b$ ,  $CD = c$  et  $DA = d$ ,

3

on procède ainsi :

On place un segment  $[AB]$  de longueur  $a$ . Le cercle de centre  $A$  et de rayon  $\frac{a^2}{d}$  a pour image, par l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $\frac{bd}{bd+ac}$  (rapport constructible), un cercle que l'on notera  $\gamma$ . Pour finir, on construit l'image  $\gamma'$  de  $\gamma$  par l'inversion de pôle  $A$  qui laisse fixe le point  $B$ .  $\gamma'$  coupe le cercle de centre  $B$  et de rayon  $b$  en deux points dont l'un sera la solution.  $D$  se construit alors sans peine.

La figure (figure ??) qui suit illustre cette construction sous *Cabri géomètre* lorsqu'on se donne les distances  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sur un axe.

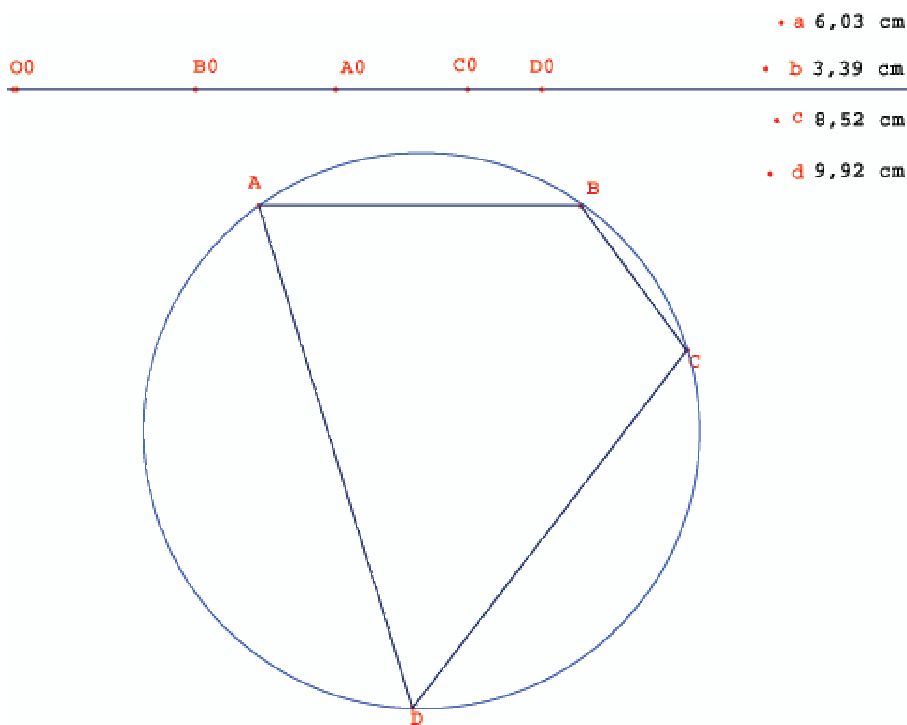


FIG. 1.2 – Synthèse.

# Bibliographie

- [1] Barbin Evelyne *La figure et l'espace* Dans les actes du huitième colloque Inter-Irem Epistémologie et Histoire des mathématiques Irem Lyon.
- [2] Berger Marcel *Géométrie vol2*, Paris, Nathan, 1979.
- [3] Hamel Thierry *Autour des quadrilatères inscriptibles et du théorème de Ptolémée. Des applications de la seconde à la terminale.* Dans Pourquoi Aimer Encore Faire des mathématiques I, Irem Rouen, 1994.