# Présentation de la commission Géométrie. Jussieu-samedi 4 décembre.

# Triangles isométriques et configurations.

*Bernard Destainville, Irem de Toulouse*

## Introduction.

L'objectif de l'intervention était la présentation et l'utilisation d'un **algorithme binaire** de recherche de la nature de l'isométrie qui fait correspondre deux triangles égaux du plan : nous savons que cette isométrie existe et est unique, et que d'autres couples homologues sont superflus pour la caractériser.
L'exposé a été ponctué par la mise en oeuvre de l'algorithme à propos de quatre exercices simples de recherche.

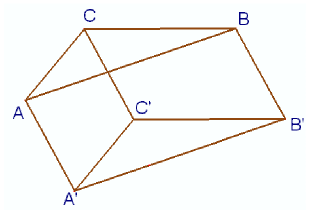
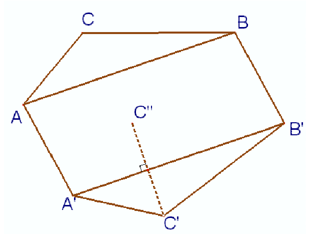
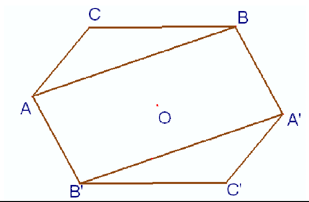
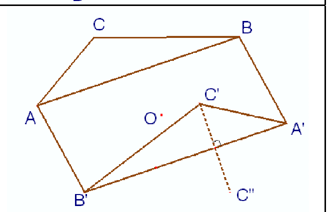
La conception de cet algorithme a été dirigée par l'observation de configurations clés : si nous appelons $ABC$ et $A'B'C'$ les deux triangles égaux, il est possible, dans la mesure où nous les avons privilégiés, que les quatre points $A$,$B$ ,$A'$ et $B'$ soient les sommets d'un **parallélogramme** ou d'un **trapèze isocèle** ; l'ordre des ces points joue évidemment un rôle, en particulier pour la lecture des quadruplets ; et même si ces configurations n'apparaissent pas, la recherche peut continuer pour les six points.

C'est alors qu'intervient une autre configuration : la figure formée par **deux cercles sécants**. En effet, si nous appelons $\mathfrak{T}$ l'isométrie $\mathfrak{T}$ telle que $\mathfrak{T}(A) = A'$ et $\mathfrak{T}(B) = B'$, alors $\mathfrak{T}(C)$ est l'un des deux points d'intersection du cercle $(A',AC)$ et du cercle $(B',BC)$.

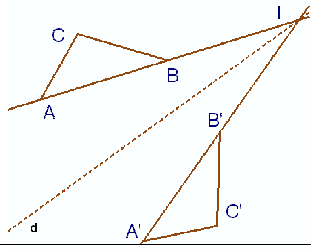
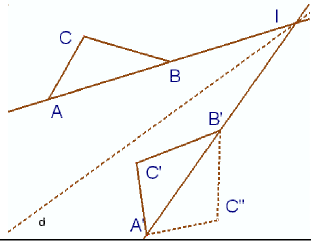
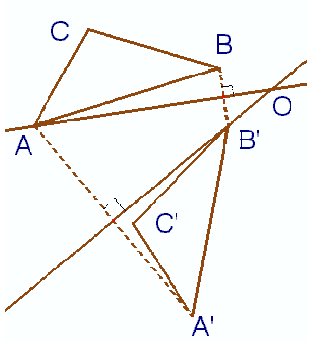
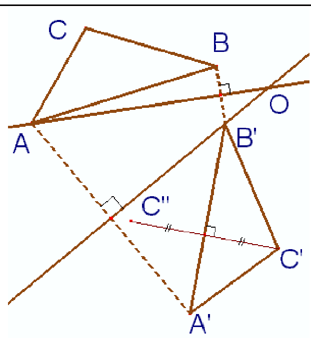
Pour chacune des configurations formées par $A$,$B$ ,$A'$ et $B'$, correspondent donc deux possibilités nouvelles pour l'isométrie. Et dans la mesure où la symétrie d'axe $(A',B')$ est une isomérie négative, dans chacun des cas, l'une des deux isométries engendrées par l'introduction de $C$ et de $C'$ est positive , et l'autre est négative.
Pour une lecture complète de l'algorithme, nous renvoyons à l'annexe I.
Cet algorithme a été présenté dans le Bulletin APMEP N°431.

En ce qui concerne les quatre exemples de l'annexe II, nous mettons en oeuvre les méthodes appropriées pour caractériser l'isométrie. En particulier si l'on caractérise une rotation, le centre est à l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$.

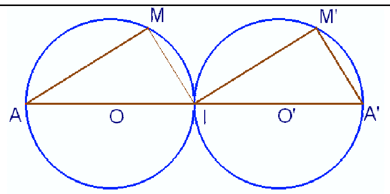
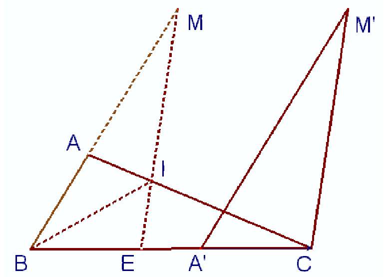
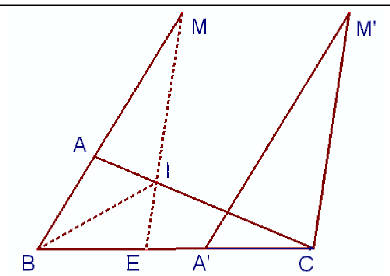
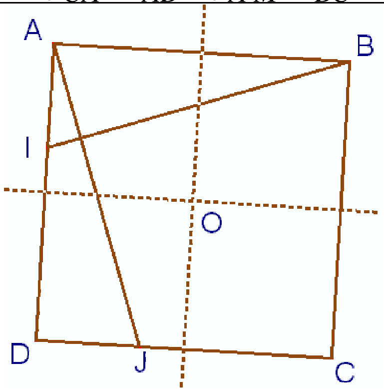
## Annexe I : première partie de l'algorithme de recherche.

| algorithme | des indications | configurations |
|---|---|---|
| **Si** $(AB)//(A'B')$,<br>**alors**<br>• ***si*** $ABB'A'$ est un parallélogramme<br>***alors***<br>$\diamond$ *si* $ACC'A'$ est un parallélogramme<br>*alors* $\mathfrak{I}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ | utiliser des vecteurs égaux |  |
| $\diamond$ *sinon* $\mathfrak{I}$ est une symétrie glissée | utiliser la symétrie d'axe $('A'B')$ |  |
| • ***sinon*** nécessairement $ABA'B'$ est un parallélogramme ;<br>$\diamond$ *si* $ACA'C'$ est parallélogramme de centre $O$<br>*alors* $\mathfrak{I}$ est la symétrie de centre $O$ | utiliser des vecteurs opposés |  |
| $\diamond$ *sinon* $\mathfrak{I}$ est une symétrie glissée. | décomposer la symétrie de centre $O$ avec un des deux axes de symétrie parallèle à $(A'B')$. |  |

## Annexe I : suite de l'algorithme de recherche.

<table>
<tr><th>algorithme</th><th>des indications</th><th>configurations</th></tr>
<tr><td>SINON soient $d$ et $d'$ les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$,<br><br>• si $ABB'A'$ est un trapèze isocèle<br>alors<br><br>⋄ si $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})}$ n'ont pas le même sens<br>alors $\mathfrak{I}$ est la symétrie d'axe $d$</td><td>le point $C$ s'identifie avec $C'$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>⋄ sinon avec $I$ l'intersection de $(AB)$ et $(A'B')$, $\mathfrak{I}$ est une rotation de centre $I$</td><td>c'est la composée des symétries d'axes $d$ et $(A'B')$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>• sinon soit $O$ l'intersection de $d$ et $d'$ ;<br><br>⋄ si $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})}$ ont le même sens<br>alors $\mathfrak{I}$ est une rotation de centre $O$.</td><td>Soit $\mathfrak{R}$ la rotation de centre $O$ telle que $\mathfrak{R}(A) = A'$ ; nécessairement $\mathfrak{R}(B) = B'$ et $\mathfrak{R}(C) = C'$ (voir §3)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>⋄ sinon $\mathfrak{I}$ est une symétrie glissée.</td><td>décomposer la rotation ci-dessus avec un des axes de réflexion parallèle à $(A'B')$.</td><td>
</td></tr>
</table>

## Annexe II : quatre exemples.

| figure | triangles | Recherches | cas de figure |
|---|---|---|---|
|   Hypothèses : • $(O)$ et $(O')$ tgts et de même rayon<br>• $(IM) \perp (IM')$ | $AIM$ et $IA'M'$ sont isométriques.<br>($1^{\text{er}}$ cas). | $IMM'A'$ et $AMM'I$ sont deux parallélogrammes.<br>**Conclusion** : les deux triangles se correspondent dans une translation. | premier |
|   Hypothèses : • $AB = AB'$ • $AC = AC'$ | $ABC$ et $AB'C'$ sont isométriques.<br>($2^{\text{ème}}$ cas). | – $ABB'A'$, $ACC'A$ et $BCC'B'$ ne sont pas des parallélogrammes.<br>– $BCC'B'$ est un trapèze isocèle<br>**Conclusion** : les deux triangles se correspondent dans une symétrie axiale. | cinquième |
|   Hypothèses : • $(A'M')//(AB)$<br>• $CA' = AB$ • $A'M = BC$ | $ABC$ et $CA'M'$ sont isométriques.<br>($2^{\text{ème}}$ cas). | – $ABA'C$, $ACM'M$ et $BCM'A'$ ne sont ni des parallélogrammes, ni des trapèzes isocèles<br>– $(\widehat{(BA),(BC)})$ et $(\widehat{(A'C),(A'M')})$ sont de sens contraires<br>**Conclusion** : les deux triangles se correspondent dans une symétrie glissée. | huitième |
|   Hypothèses : • $ABCD$ est un carré de centre $O$<br>• $AI = DJ$ | $ABI$ et $DAJ$ sont isométriques.<br>($2^{\text{ème}}$ cas). | – $ABAD$, $AIJD$ et $BIJA$ ne sont pas des parallélogrammes.<br>– $ABAD$ est un triangle isocèle<br>– $(\widehat{(AB),(AI)})$ et $(\widehat{(DA),(DJ)})$ sont de même sens<br>– Les médiatrices de $[AB]$ et $[DA]$ se coupent en $O$.<br>**Conclusion** : les deux triangles se correspondent dans une rotation de centre $O$. | sixième |