LAB-E3D EA 7441
Laboratoire Epistémologie et didactique des disciplines

SITUATIONS ET RAISONNEMENTS DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Introduire la notion de limite et sa définition à la transition secondaire/supérieur

Isabelle Bloch - Université de Bordeaux

Plan

1. Les situations et la TSD au niveau secondaire/sup
2. L'analyse des raisonnements: milieux, signes, répertoire

3. Des situations sur la notion de limite

    Une situation au sec./supérieur: le flocon de von Koch

    Définir la limite, comprendre et utiliser les quantificateurs…

    Des difficultés d'étudiants de L1

- Conclusion

1. L’analyse des situations dans la TSD

La TSD définit trois champs de construction et d'analyse des situations (Bloch 2002, EE11) :

- le champ *théorique*, élaboration des situations fondamentales mathématiques $\longrightarrow$ savoir
- Le champ *expérimental a priori* $\longrightarrow$ ingénierie didactique
- Le troisième niveau est celui de la *contingence*, avec alternance de phases didactiques et adidactiques observables

- *La structuration du milieu didactique de l’élève modélise les différents projets et situations dans lesquels s’inscrit [son] activité* (Hersant 2011)

Le milieu expérimental a priori

(Margolinas 1995, Bloch 2005)

M1	*E1: élève réflexif*	*P1: Professeur projeteur*
M0 : M- d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : Elève	P0 : Professeur enseignant
M-1 : M-de référence : formulation validation	E-1 : E apprenant	P-1 : P régulateur, gère le débat, fait confronter les procédures
M-2 : M- heuristique essais/erreurs, action	E-2 : E-agissant	P-2 P-observateur, dévolueur
M-3 : M-matériel	E-3 : E découvrant	

Adaptation de la TSD aux niveaux supérieurs

- Situation *à dimension adidactique*, où le milieu ne « fait pas tout » cf. Mercier1995 ; Bloch RDM 1999
- Potentialités du milieu : potentiel adidactique, potentiel heuristique (recherche), potentiel de liens avec les savoirs anciens, potentiel d'approfondissement
  - Cf. Gravesen, Gronbaeck & Winslow, JRME 2016
- Prendre en compte la dimension sémiotique
- Evolution du répertoire didactique de la classe

L’usage de la sémiotique de C.S. Pierce en didactique (Bloch, 2008 ; Bloch & Gibel, 2011)

- Nécessaire étude des signes produits
  - La sémiotique peircienne est une sémiotique générale
- Adéquation à l’élaboration d’un modèle d’analyse des raisonnements (Otte, Muller, …)
  - Elle ne dissocie pas signe et pensée
  - Elle permet d’associer les signes langagiers et formels
  - Elle propose une interprétation dynamique du lien entre signe et objet $\rightarrow$ interprétant final
  - Elle permet de penser les changements de statuts des symboles et des énoncés

Les signes dans la TSD

Nous n'utilisons que trois distinctions : icône, indice et symbole/argument

- une interprétation iconique relève d'une intuition sur la base de connaissances anciennes, sur un schéma, une figure: la suite des figures est d'aire finie…
- un signe indiciel est de l'ordre d'une proposition: la formule $(4/3)^n$ indique que cela grandit indéfiniment
- un symbole/argument est de l'ordre d'une preuve mathématique: $(4/3)^n$ peut dépasser n'importe quel 10^p, si $n >$ …

Les justifications en situation de validation ou de décision

• Justification syntaxique : l'argumentation se réfère à des règles formelles ⟶ démonstration de la validité du discours à l'aide des règles valides

• Justification sémantique : argumentation de la pertinence et de la validité des modèles. Cette pertinence est établie en se référant aux objets mathématiques (via leurs représentations) pris en compte pour l'argumentation

• Justification pragmatique : justification de la validité et de l'intérêt de la procédure par référence à l'adéquation du modèle (« ça marche donc je le fais »)

Cf. Durand-Guerrier, Barrier…

2. Les recherches sur le raisonnement

- Nombreuses études centrées sur :
  - Observations empiriques sur les raisonnements spontanés
  - Modèles centrés soit sur les registres sémiotiques (Otte), soit sur les modalités de raisonnement, soit sur le guidage du professeur (Bartolini-Bussi, Radford, …)
  - Raisonnement en situation de tutoriels (Pedemonte, Coutat…)
  - Analyse des interactions langagières (Zaragosa)
- Etudes sur les fonctions des raisonnements en TSD (Gibel, Mopondi, Moreira, Orus-Baguena; Balacheff …)
- Analyse du point de vue logique (Durand-Guerrier, Barrier, Chellougui…)
- $\rightarrow$ faire le lien avec les situations

Du point de vue des pratiques

- Les enseignants tentent de faire pratiquer des situations de raisonnement en classe
- Il leur est difficile de maîtriser:
  - La gestion de la situation et son caractère plus ou moins adidactique
  - La détection et le classement des formes de raisonnement produites par les élèves: raisonnements formels, implicites, visibles à travers des décisions, des dessins, des gestes
  - La prise en compte et le traitement des raisonnements dans l’avancée de la situation

Problématique et fonctions d'un modèle des raisonnements mathématiques

- Éclairer le raisonnement du point de vue de ses fonctions dans la situation et du statut des représentations produites
- Prendre en compte les raisonnements valides et les raisonnements erronés
- Elaborer un modèle multidimensionnel
- ➔ visibilité des raisonnements à tous les niveaux d'avancement de la situation
- Intégrer une analyse sémiotique des formulations
- Fonctions du modèle : prédictive et explicative
- Aider à la prise de décision

Un modèle multidimensionnel pour l'analyse des raisonnements

- Prendre en compte les raisonnements par rapport au milieu, aux fonctions dans la situation, au niveau des signes produits
- Fonctions des raisonnements
  - production d'exemples, choix d'ostensifs, décision de calcul, Intuition, … au niveau M_{-2}
  - Calculs génériques, conjectures étayées, décision sur un objet mathématique… au niveau M_{-1}
  - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique concernée… au niveau M_0

Eléments pris en compte dans l'analyse

- Niveau de milieu: action, formulation, validation
- Analyse sémiotique : nature des signes et adéquation à la théorie mathématique (Peirce)
- En situation de validation : situations de décision, dimension syntaxique/sémantique, recours à des connaissances…
- Fonctions des raisonnements (Gibel et Brousseau)
  - Conjecture, intuition, décision de calcul, explication, production d'exemple ou contre-exemple…

Les enjeux du modèle

- Ce modèle doit permettre :
  - d'affiner l'analyse a priori de la situation
  - d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation (analyse a posteriori)
  - d'analyser les signes produits en situation et de les lier aux niveaux des raisonnements et au répertoire didactique de la classe (répertoire de représentations)
  - d'identifier les niveaux syntaxique et sémantique
  - de confirmer le degré d'adéquation de la situation au savoir dans l'analyse a posteriori

Interprétation des signes produits en situation

- Dans la phase heuristique, les représentations observées : symboles, dessins, écritures, langage (déclarations), gestes devront être interprétés par le professeur au niveau idoine : Icône, indice ou argument, suivant le niveau de milieu et la fonction de production

  → orienter le traitement des raisonnements
- Conformité épistémologique au savoir visé
- L'interprétation des signes produits comme éléments de raisonnement (valides ou erronés) participe de la connaissance du *répertoire didactique* de la classe et confirme l'adéquation au savoir

Le répertoire didactique

Le répertoire didactique comporte 2 composantes :

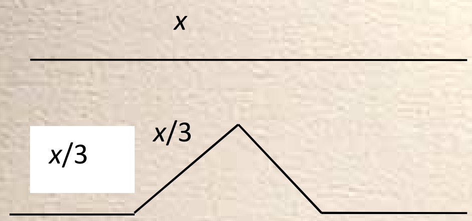
- La composante liée au répertoire antérieur
- La deuxième composante apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des *connaissances* de son répertoire
- Cette utilisation des connaissances permet à l'élève de manifester et de construire de nouvelles représentations liées à la situation. Cette composante est le *système organisateur*

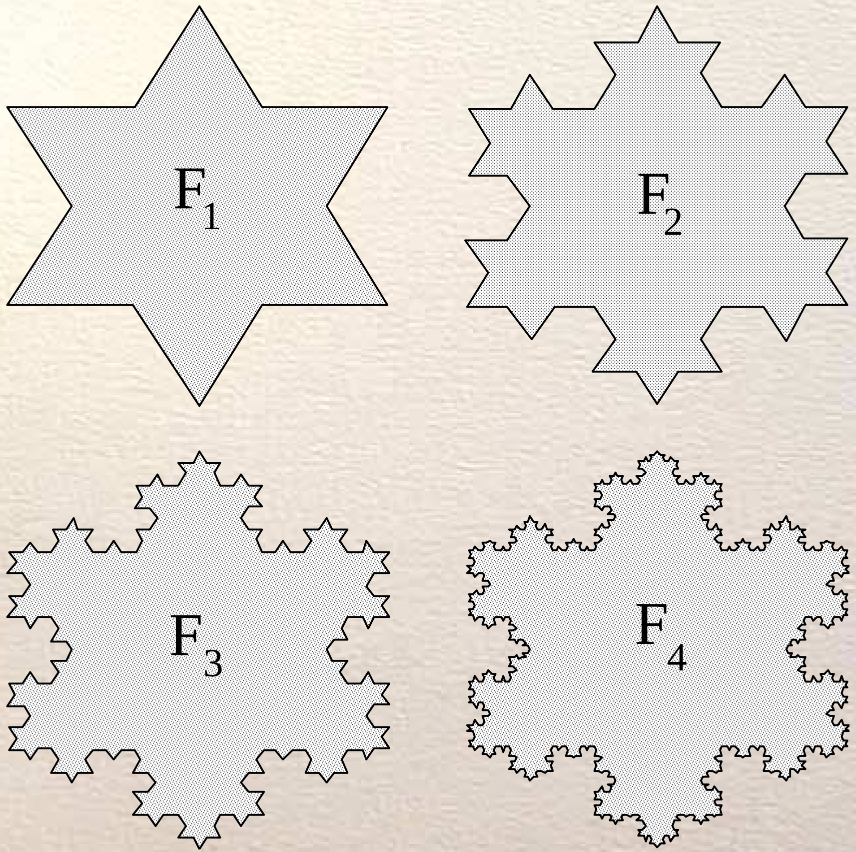
	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un non-exemple - Intuition sur un dessin ou calcul	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise - Généralisations
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

3. Des situations sur la notion de limite

- Les situations
  - Faire travailler sur les *objets* mathématiques
  - Donner des opportunités d'usages de différentes sortes de signes
  - Comprendre et utiliser le formalisme : quantificateurs, égalité en Analyse… le SPA
- Différents types de situations
  - Situations sur les nombres réels : 0,9999…. = 1 ?
  - Introduction de la notion de limite
  - Nécessité de définir (Ouvrier-Buffet)

Le flocon de von Koch





$$P_n = P_0 \times (4/3)^n$$

$$A_n = A_0 + 3/5\, A_0\, [1 - (4/9)^n]$$

Déroulement

- Séance 1 : calculs sur les figures, formules algébriques du périmètre et de l'aire de F_n
- Séance 2 : exploration des valeurs prises par le périmètre et l'aire des figures F_n à l'aide de calculs instrumentés, dans le milieu heuristique M-2
- limite de P_n avec $(4/3)^n > 10^p$

- Séance 3 limite de la suite (A_n) :
  - formule algébrique définitive, sur laquelle vont porter les calculs et conjectures
  - identification de $(4/9)^n$ comme terme significatif de la suite
  - la suite de terme général $(4/9)^n$ est décroissante
  - travail syntaxique pour prouver que l'on peut rendre $(4/9)^n$ plus petit que 10^{-p}

Niveaux de milieux

- M-3 milieu matériel: les figures F0, F1, F2, F3, F4
- M-2 milieu objectif (M de recherche): calculs de périmètres et d'aires $\longrightarrow$ statut *d'arguments*
- M-1 milieu de référence: conjectures sur les limites des suites (A_n) et (P_n)
- Calculs et raisonnements comme éléments – syntaxiques ou sémantiques - de preuve et de réfutation des conjectures
- M0 situation didactique: la P introduit des éléments de validation de l'Analyse

Analyse des raisonnements

- P : alors maintenant, j'applique la formule qui dit que le crochet ça va donc être égal à : premier terme, voilà, 1/9, ensuite multiplié par 1 moins 4/9 exposant n c'est le nombre de termes, puisqu'ils vont de 1 à *n*. Et sur 1 moins 4/9 ; on avait dit 1 – 4/9 = 5/9
- Diviser par 5/9 c'est multiplier par 9/5 donc voilà, on l'avait laissé comme ça :

$$A_0 + 3A_0 . \frac{1}{9} . \frac{9}{5} . \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right]$$

Analyse des raisonnements (suite)

- M_0 de la phase précédente ➔ M_{-2} de la nouvelle situation (travail sur la suite A_n)
  - dénotation des calculs visant une formulation algébrique réduite de A_n
- l'enseignante justifie les étapes du calcul, et elle institutionnalise l'expression algébrique simplifiée de la suite (A_n)
- La production des écritures algébriques est un enjeu de la situation de référence
  - celles-ci appartiennent désormais au répertoire didactique de la classe

Arguments numériques et algébriques

- La formule de (A_n) est un *argument algébrique* : R3.2 ou R3.3, un argument symbolique spécifique de l'Analyse sur lequel des hypothèses vont pouvoir être faites
- Il n'y a rien d'évident, pour les étudiants, à ce que la formulation $n \to +\infty$ se traduise par : il peut être intéressant de calculer pour des 'grandes' valeurs de *n*
- Des élèves conjecturent que l'aire est finie car le flocon est inscrit dans l'hexagone
  - Yaëlle : l'aire elle va toujours augmenter, jusqu'à l'infini elle prendra des valeurs, mais qui n'arriveront jamais à l'aire de l'hexagone, voilà; ça rajoutera des décimales; ça tendra vers l'aire de l'hexagone mais ça l'atteindra jamais

Les nombres: arguments topologiques

- Yaëlle exprime que la suite (A_n) sera croissante mais que les valeurs ajoutées seront de plus en plus petites et que la suite tendra vers l'aire de l'hexagone.
  - Les nombres évoqués font désormais partie du milieu de référence, au lieu de rester cantonnés au milieu objectif
  - Elle utilise son répertoire de représentation des nombres décimaux et les résultats du calcul instrumenté.
  - Elle conçoit l'évolution de la suite (A_n) comme la modification des rangs successifs associés à la partie décimale de A_n. Il y a enrichissement du système organisateur : R3.2
- Les nombres sont utilisés comme des arguments sur la façon d'approcher la limite : il s'agit *d'arguments topologiques* R2.2

Séance 3: conclusion sur la limite de P_n

- L'enseignante institutionnalise le résultat obtenu : P_n dépasse 10^p, si $n >$ p /log4/3
- P: C'est ça la définition, c'est la preuve, qu'on peut donner, qu'une suite tend vers plus l'infini, c'est qu'on arrive à lui faire dépasser n'importe quel nombre, aussi grand qu'on veut
- Dans M_0: Tous niveaux de preuve
  - R1.3 (preuve 'algébrique')
  - R2.3 (arguments pouvant être réinvestis)
  - R3.3 : éléments théoriques relatifs à la limite, définition donnée en langage formel et en langue naturelle

Séance 3: conclusion sur la limite de A_n

- P: A quoi est-ce que ça se verrait que A_n tend vers un nombre ? appel de l'enseignante à utiliser l'institutionnalisation de Pn et à réinvestir la démarche
- Des élèves sont déjà dans des jeux d'intérieur (syntaxiques) sur le calcul de la limite de (A_n) : R2.3.
- Pour d'autres, retour au milieu heuristique numérique afin de montrer – calculatrice - que $(4/9)^n$ devient 'petit'
- Sandra : par exemple $(4/9)^n < 10^{-99}$ et on a trouvé *n*: $n > 282$
- P: est-ce que ça ressemble à une des conditions qu'on avait trouvée pour le périmètre ?
  - Sandra: Oui, *n* augmente.

Séance 3, fin

- L'intervention de Sandra est de nature sémantique mais propose une conjecture étayée R1.2 et dans la logique de la recherche de limite : lorsqu'on essaie de rendre $(4/9)^n$ 'petit' on trouve que la variable augmente
  - Ici $n > 282$ est un *indice* de ce que le calcul 'se déroule bien' dans la logique de l'infini : R2.3
  - Karine : Nous on a fait avec 10^{-p}
  - P : très bien. Le groupe de Karine, elles ont mis : $(4/9)^n < 10^{-p}$ où $p > 0$
  - Laurent : Ca fait $n > -p/\log(4/9)$
  - Sylvain : Je comprends pas pourquoi on change le signe
  - Caroline : Mais log 4/9 est négatif !

Bilan de la situation du flocon

- Les calculs sur des icônes du flocon ont établi que la recherche de la limite d'une suite impliquait de considérer de 'grandes' valeurs de la variable (indice de limite)
- Un milieu de référence a été construit, conduisant à comparer le terme général de la suite à des puissances de dix (début de preuve formelle de l'Analyse, symboles de limites)
- Le répertoire des élèves a inclus des éléments formels plus complexes que les signes algébriques (assertions de type 'pour tout *p* on peut trouver *n* tel que') qui sont des *arguments* de calcul analytique

Bilan de la situation du flocon (suite)

- Le répertoire a inclus aussi des représentations figuratives de ce que peut être une suite de limite $\rightarrow$ intérêt incontestable pour l'apprentissage de l'Analyse
  - Les symboles formels ne sont supérieurs aux icônes que lorsque l'on a appris à se passer de ces dernières
- La dévolution de la recherche des limites de l'aire et du périmètre du flocon s'effectue par paliers, et à chaque palier correspondent des étapes de calcul, des étapes sémiotiques, et des étapes de raisonnements
- Les nombres (phase de conjectures) prennent le statut *d'indice*, puis d'argument (*symbole*) de ce que le comportement doit être modélisé par des règles spécifiques

Bilan de la situation du flocon (fin)

- Niveaux de milieux:
  - M-2 : Calculs et moyens heuristiques (icônes ou indices)
  - M-1 : Enrichissement des énoncés, arguments génériques (indices), conjectures, passage au syntaxique
  - M0: Décisions étayées, ostensifs organisés, arguments symboliques
- Jeux entre le syntaxique et le sémantique :
  - les jeux d'extérieur (recours à des argumentations d'ordre sémantique) basés sur des connaissances des registres numérique, graphique, géométrique
  - les jeux d'intérieur (le calcul syntaxique) dans le registre algébrique car registre de l'analyse non encore maîtrisé

Définir la limite

- Définition obligatoirement liée à l'usage des quantificateurs et les questions $\forall\exists$, $\exists\forall$
- Etape 1, le principe fondamental de l'Analyse :
  - si $\forall\varepsilon$, $|a-b| < \varepsilon$, alors a = b
- Application aux fonctions
  - *f* vérifie P1 : "Il existe A tel que pour tout x>A on a pour tout $\varepsilon>0$, $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$"
  - si *f* vérifie P1, alors il existe A réel tel que pour tout x > A f(x) = L

Situation 1 (T.Lecorre)

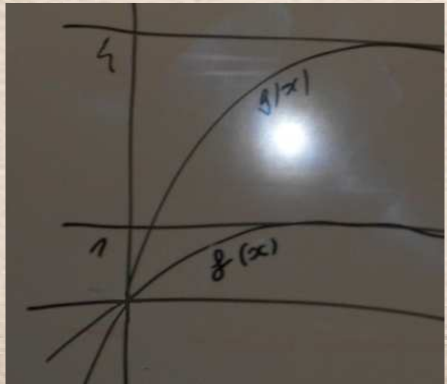
- Le sens du quantificateur universel
- Déroulement
  - Propositions et débat scientifique
  - Vote: Vrai, Faux, autre puis « réparer » les propositions fausses
  - Répertoire : graphiques, exemples algébriques…
  - Actualisation : introduire des définitions, préciser le sens et le rôle des quantificateurs
  - on va étudier la notion de limite et dans un premier temps on ne s'occupe pas des fonctions qui ont des limites infinies c'est à dire …

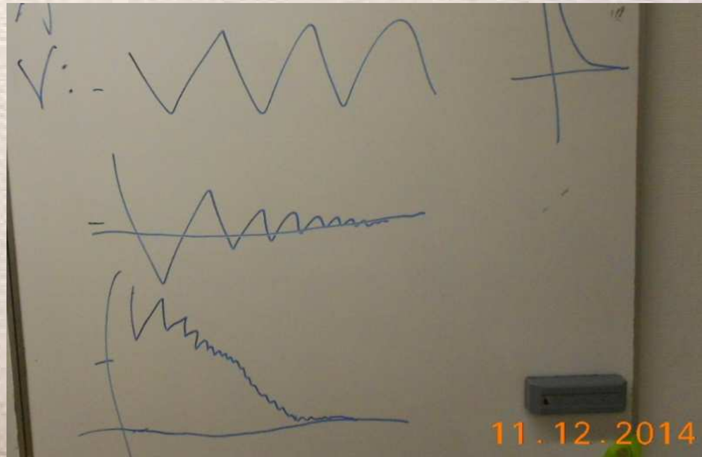
Situation 1

- Etude de conjectures sur les limites
- Si $\lim_{x \longrightarrow + \propto} f(x) \leq \lim_{x \longrightarrow + \propto} g(x)$

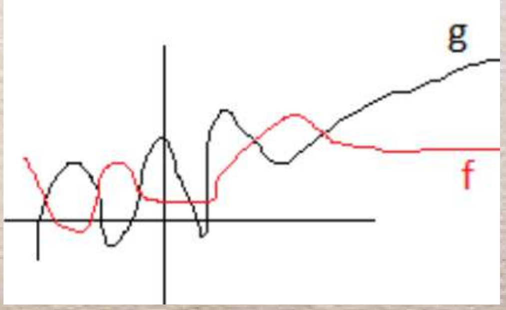
alors pour tout x, f(x) < g(x) « du côté de + l'infini »

variante: $\exists$ un nombre A t.q. $\forall$x>A, f(x)<g(x)





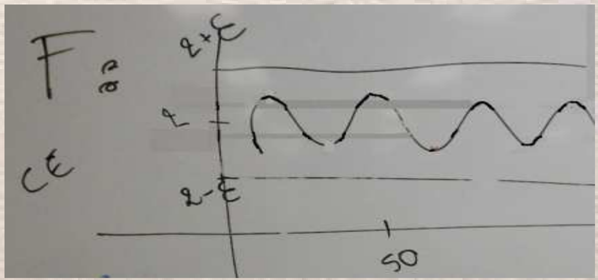
- Tiffany : Je pense que c'est vrai mais sans certitude
- François : Si lim f(x) ≤ lim g(x) alors les fonctions se démarquent et à partir de la démarcation f < g, c'est donc plutôt Vrai
- Mathieu : Démarcation ça veut dire intersection
- François (vient au tableau dessiner), puis: Oui mais ici il y a plusieurs intersections



- Mathieu : On prend la dernière!

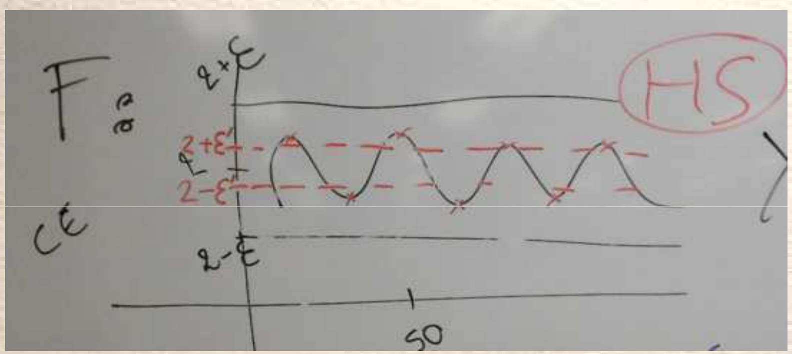
Situation 2

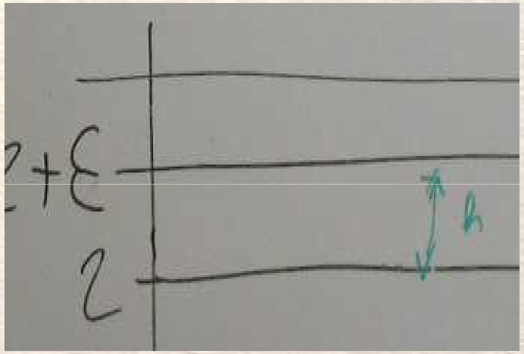
- soit une fonction *f* qui vérifie (P): si x>50, alors ∀ε, 2- ε < f(x) < 2 + ε
  - Exemples proposés: f(x) = 2 ; f(x) = 2 + ε invalidé f(x) = 2 + 1/x invalidé avec x = 51 et ε = 0,001
  - Proposition de conjecture: si f vérifie P, alors ∀x > 50, f(x) = 2
  - Contre-ex d'Erika



Conjectures sur la fonction

- Invalidation, démonstration par l'absurde

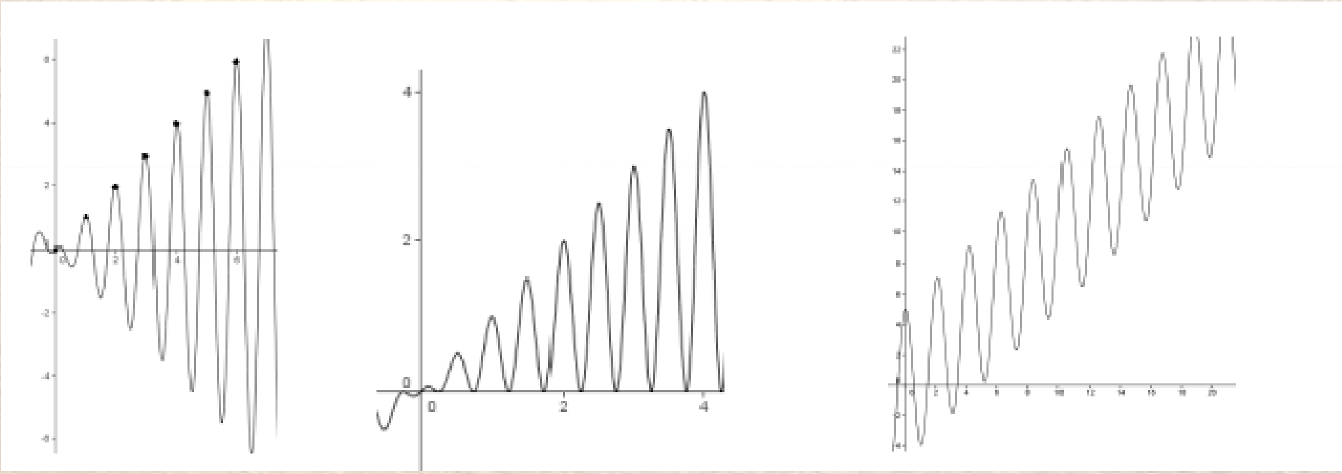




- Un élève: Si on prend h une valeur de la fonction, alors ensuite quand ε devient plus petit, c'est impossible

Situation 3

- Question posée: limite ou pas ?



- Un élève donne alors spontanément la définition d'une limite en + ∝ pour traiter les 3 cas

Progrès de l'actualisation du répertoire

- Les quantificateurs : travailler le sens isolé, le sens articulé
  - *f* vérifie P1 : "Il existe A tel que pour tout x>A on a, pour tout $\varepsilon>0$, $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$"
  - si *f* vérifie P1, alors il existe A réel tel que pour tout x > A $f(x) = L$
  - MAIS, si on inverse les quantifications $\rightarrow$ définition de la limite
- Etudier des objets mathématiques 'concernés' avec des outils sémiotiques variés (registres)

Un exemple en situation d'évaluation: courbes paramétrées

- Productions de 14 étudiants de L1 en examen
- $x(t) = a\, t^2/(1+t^2)$, $y = a\, t^3/(1+t^2)$
  - Les courbes parametrées peuvent avoir deux tangentes au même point
  - Les étudiants sont supposés identifier la nature d'un point singulier, ici un point de rebroussement: R2.3 & R3.2
- L'asymptote pose problème, car $t \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow +\infty$ mais asymptote verticale : six étudiants le trouve – d'autres écrivent $y = a$ au lieu de $x = a$
- Certains étudiants calculent les dérivées, mais ne savent pas interpréter la nature du point singulier : l'usage et l'interprétation des signes ne dépassent pas R2.1 ou R2.2

Les situations et leur potentiel

- Potentiel adidactique (responsabilités/ Es)
  - Expériences graphiques, calculs instrumentés, nouvelles fonctions, place des quantificateurs …
- Potentiel de recherche
  - Capacité des étudiants à déclarer des énoncés
  - Dévoluer le souci de conformité aux normes math. de validation
- Potentiel à faire des liens
  - Inclure des objets mathématiques connus (fonctions…)
- Potentiel d’approfondissement
  - Viser des savoirs mathématiques plus évolués

Conclusion: La notion de limite, complexe, initiale du Calculus

- Nécessité de travailler: En amont sur les nombres car : pb de curriculums au secondaire, d'erreurs et ignorances persistantes (Capes)
  - Le SPA (quantificateurs, ε, …)
- Des situations
  - à potentiel adidactique et d'approfondissement
  - avec des objets problématiques, des registres variés
  - amenant les étudiants à des raisonnements sur les fondements du Calculus
- Deux questions cruciales: la reproductibilité – la compatibilité avec les programmes

Piton de la Fournaise, sept 2016

Merci de votre attention