De l'instrumentation informatique à l'IA générative :

reconfigurations du travail mathématique, algorithmique et didactique dans une perspective internationale

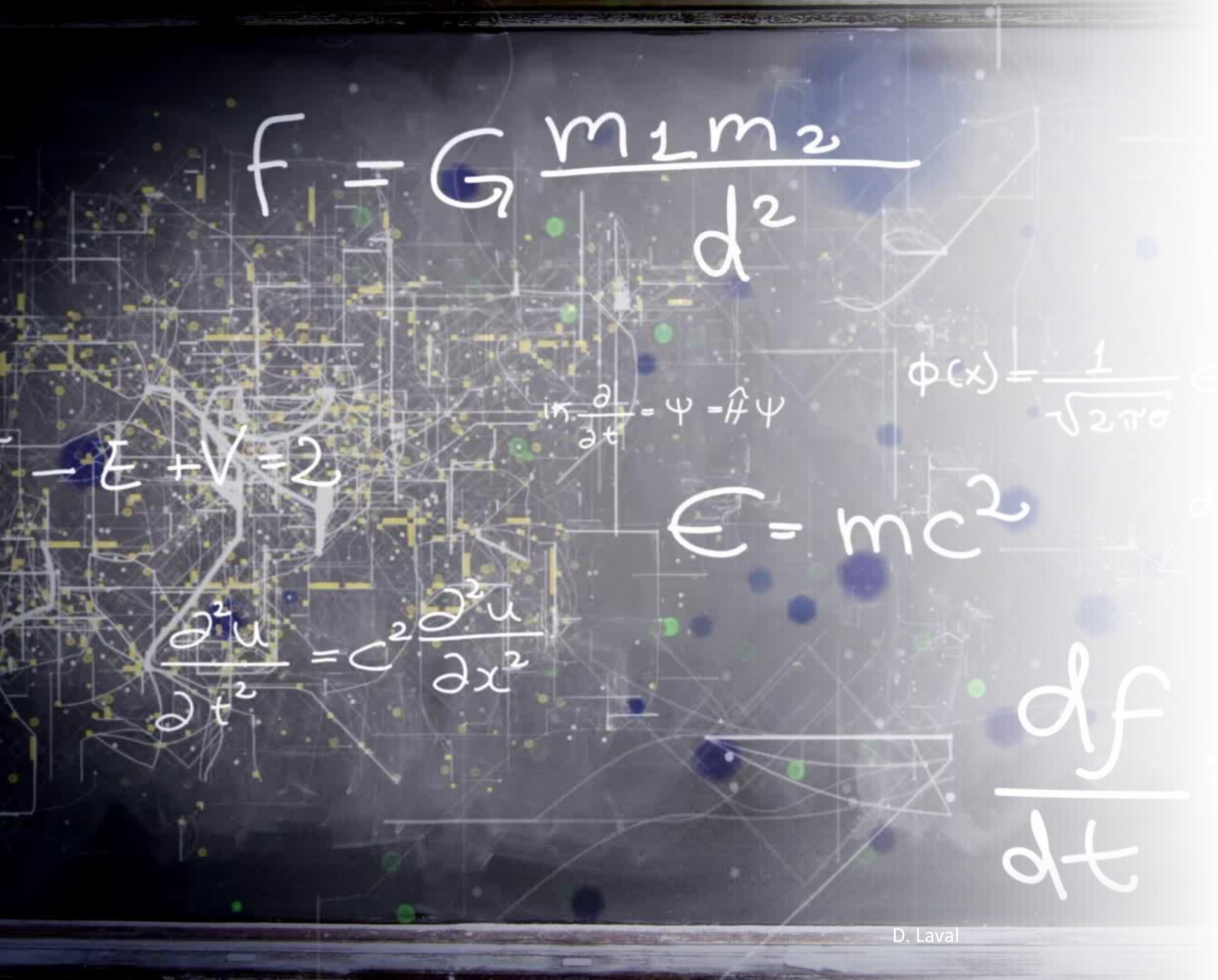
Dominique LAVAL

Docteur en didactique des mathématiques
Professeur agrégé de mathématiques

ISFEC Île-de-France
d.laval@isfec-idf.net

CY Cergy Paris Université
dominique.laval@cyu.fr

Plan général


$f = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$
$E = mc^2$
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
$\frac{df}{dt}$

Préambule

Préambule

Notre objectif est d'interroger les transformations contemporaines de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques à partir d'un déplacement allant de l'instrumentation informatique à l'intelligence artificielle générative.

Pour cela, nous prenons appui sur des travaux relatifs à l'intégration de l'informatique dans les pratiques mathématiques scolaires.

Il s'agit de montrer que les évolutions actuelles ne relèvent pas seulement de l'apparition de nouveaux outils, mais d'une recomposition plus profonde des formes de travail, de validation et de contrôle épistémique.

Préambule

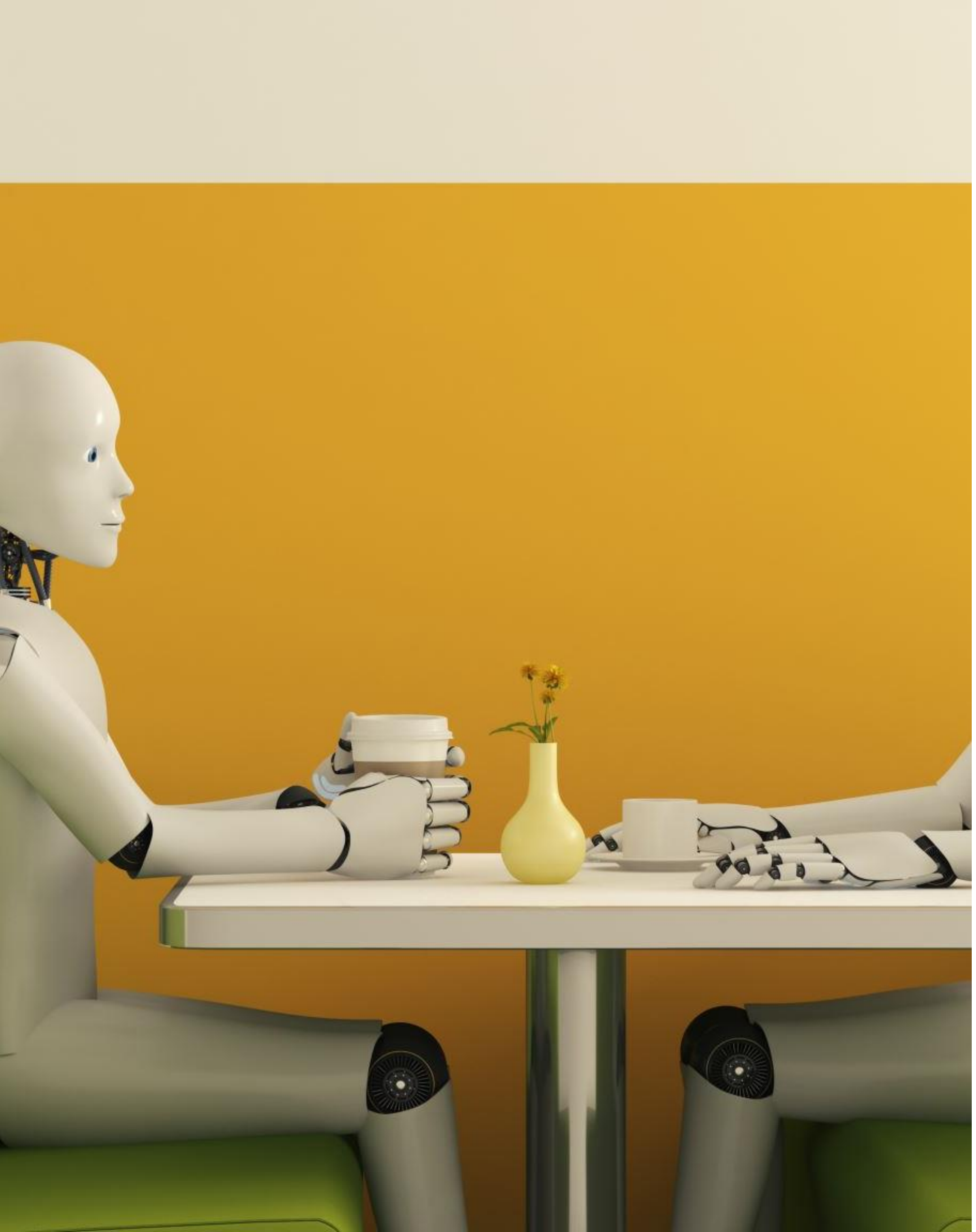
Notre analyse mobilise :

- **Différents cadres théoriques**
  - **les Espaces de Travail Algorithmique (ETA)**
  - **une extension à travers la notion d’Espace de Travail Didactique instrumenté par l’IA (ETDIA)**

- **Deux terrains qui sont mis en regard**
  - **le projet NAIVLE, centré sur la formalisation et la vérification des preuves dans l’enseignement supérieur,**
  - **le protocole PRISME, portant sur les transformations du travail mathématique à l’école primaire.**

Par ailleurs, nous présentons un exemple de modélisation fondé sur l’étude d’une parade nuptiale, articulant graphes, matrices et simulation algorithmique, permettant de rendre visibles les déplacements du travail mathématique induits par l’usage de l’IA.

Cette présentation doit mettre en évidence un déplacement du centre de gravité de l’activité, de la production vers l’interprétation et la validation.



Introduction

Introduction

L'introduction récente et rapide des intelligences artificielles génératives dans les pratiques éducatives et scientifiques interroge en profondeur les formes contemporaines du travail mathématique.

Si l'intégration de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques constitue déjà une transformation bien documentée, l'émergence de systèmes capables de produire du langage mathématique, de proposer des raisonnements et de structurer des contenus semble introduire un changement de nature.

En effet, dans les configurations antérieures, les outils informatiques intervenaient principalement comme instruments d'exécution, de calcul ou de simulation.

Mais, avec l'IA générative, l'outil tend à devenir un acteur capable de produire des objets mathématiques plausibles, modifiant ainsi les conditions de production, de structuration et de validation des savoirs.

Dans cette perspective, nous propose d'examiner la question suivante :

- **Dans quelle mesure le passage de l'instrumentation informatique à l'interaction avec des systèmes génératifs reconfigure-t-il le travail mathématique, en particulier dans ses dimensions de production, de structuration et de validation ?**

Introduction : de l’informatique scolaire à l’IA générative

Logique d’instrumentation informatique	Logique d’interaction avec des systèmes génératifs
exécution	génération
calcul / traitement	proposition / reformulation
outil commandé	interlocuteur apparent
validation souvent externalisée à l’utilisateur	risque de déplacement de la validation
aide technique	intervention dans la production discursive et intellectuelle

Introduction : de l'informatique scolaire à l'IA générative

- Transformation des formes de travail mathématique ;
- Recomposition des modalités de validation ;
- Déplacement du contrôle épistémique ;
- Nécessité d'un renouvellement didactique, épistémologique et curriculaire.

Comment analyser ce passage de l'instrumentation à l'interaction générative ?

L'algorithmique comme espace de travail : cadre ETA et paradigmes algorithmiques

L'algorithmique comme espace de travail : cadre ETA et paradigmes algorithmiques

Nous faisons l'hypothèse que l'algorithmique ne se réduit ni à une technique de calcul ni à une spécialisation informatique, mais constitue un régime spécifique de validation du travail scientifique, articulant exécution, simulation et formalisation. (Laval, à paraître)

Cette perspective prolonge les travaux de Knuth (1973), qui participent à la constitution de l'algorithmique comme un domaine scientifique structuré par des formes spécifiques de production, de contrôle et de validation. (Idem)

Elle peut ainsi être envisagée comme un espace intermédiaire de rationalité, contribuant à structurer les formes contemporaines du travail mathématique. (Idem)

Nous avons ainsi le cadre des Espaces de Travail Algorithmique (ETA), proposé par Laval (2018), qui se situe dans la continuité des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011 et Kuzniak & Richard, 2014).

Il vise à analyser l'algorithmique non pas comme un simple ensemble de techniques, mais comme un espace structuré d'activité mathématique.

L’algorithmique comme espace de travail : cadre ETA et paradigmes algorithmiques

Dans cette perspective, un espace de travail se définit comme un système articulant :

- **des artefacts (langages, environnements, programmes, supports),**
- **des systèmes de signes (écritures algorithmiques, schémas, codes),**
- **et un référentiel théorique (règles, propriétés, concepts mobilisés).**

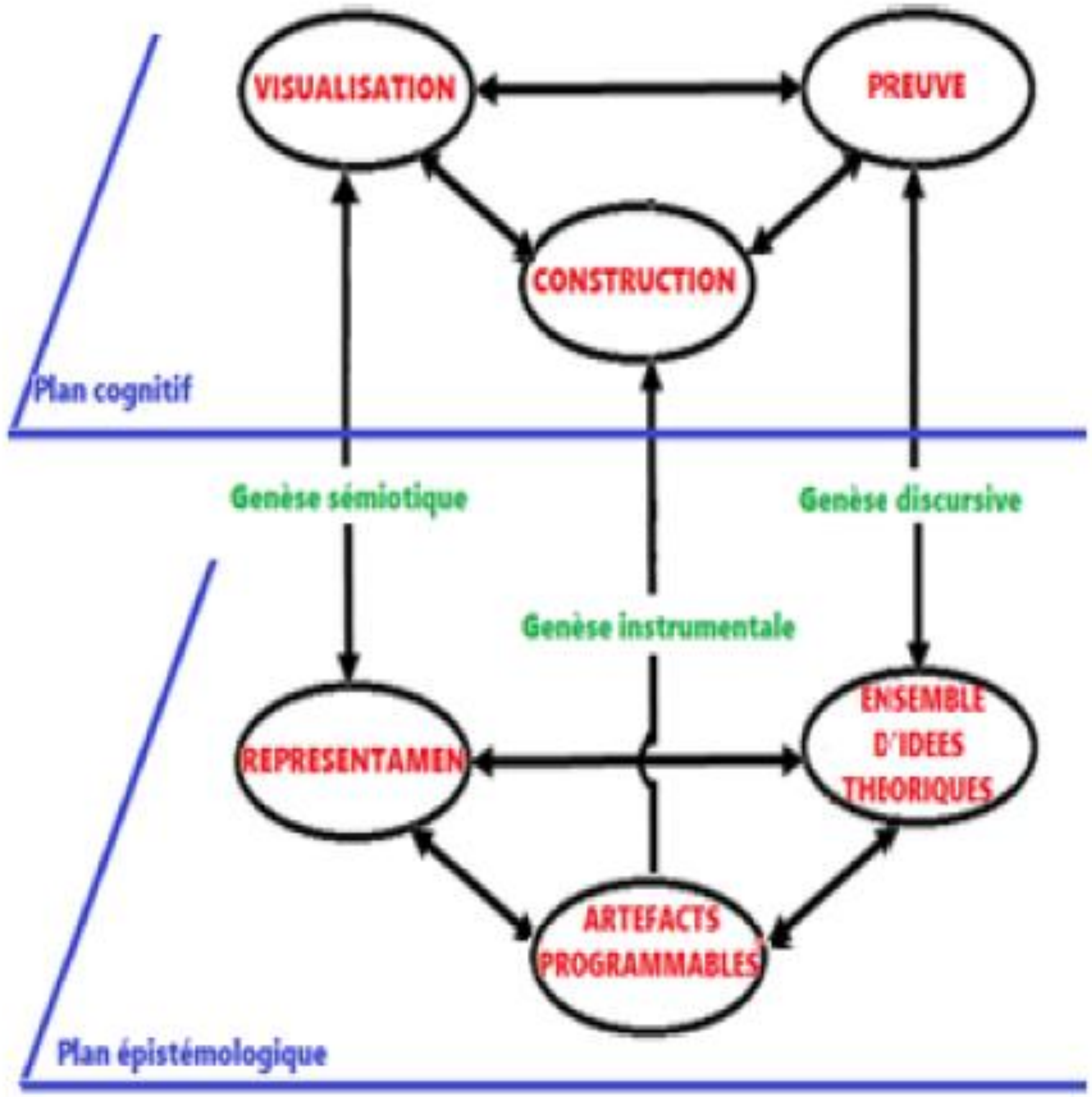
L’intérêt de cette approche est de déplacer le regard :

- **il ne s’agit plus seulement d’enseigner des algorithmes, mais de comprendre comment se structure l’activité de résolution, de modélisation et de validation dans un environnement algorithmique.**

Dans un ETA, la validation ne repose pas uniquement sur des preuves formelles, mais peut s’appuyer sur :

- **l’exécution d’un programme,**
- **la simulation d’un processus,**
- **ou la confrontation entre différents registres de représentation**

Ainsi, l’algorithmique introduit des formes spécifiques de rationalité, qui ne se confondent ni avec l’intuition empirique, ni avec la démonstration formelle classique.



Représentations des ETA (Laval, 2018)

L’algorithmique comme espace de travail : cadre ETA et paradigmes algorithmiques

Paradigmes algorithmiques et formes de rationalité

Afin de rendre compte de ces différentes formes d’activité, il est possible de distinguer plusieurs paradigmes algorithmiques, entendus comme des modes d’organisation de la pensée et de la validation.

On peut notamment distinguer trois niveaux :

Paradigme AI (approche intuitive)
L’activité repose sur la simulation concrète et l’expérimentation.
La validité est souvent associée à l’observation du comportement du système.

Paradigme AII (axiomatique naturelle)
Les règles de transformation sont explicitées.
L’activité consiste à structurer les procédures et à justifier les étapes du raisonnement.

Paradigme AIII (traitement formel)
Les objets sont manipulés dans un cadre symbolique et formalisé.
La validation repose sur des systèmes explicites de règles et de preuves.

Ces paradigmes ne constituent pas des niveaux hiérarchiques stricts, mais des modes complémentaires d’activité, entre lesquels les élèves/les étudiants et les enseignants peuvent circuler.

L'algorithmique comme espace de travail : cadre ETA et paradigmes algorithmiques

Apports didactiques du cadre ETA

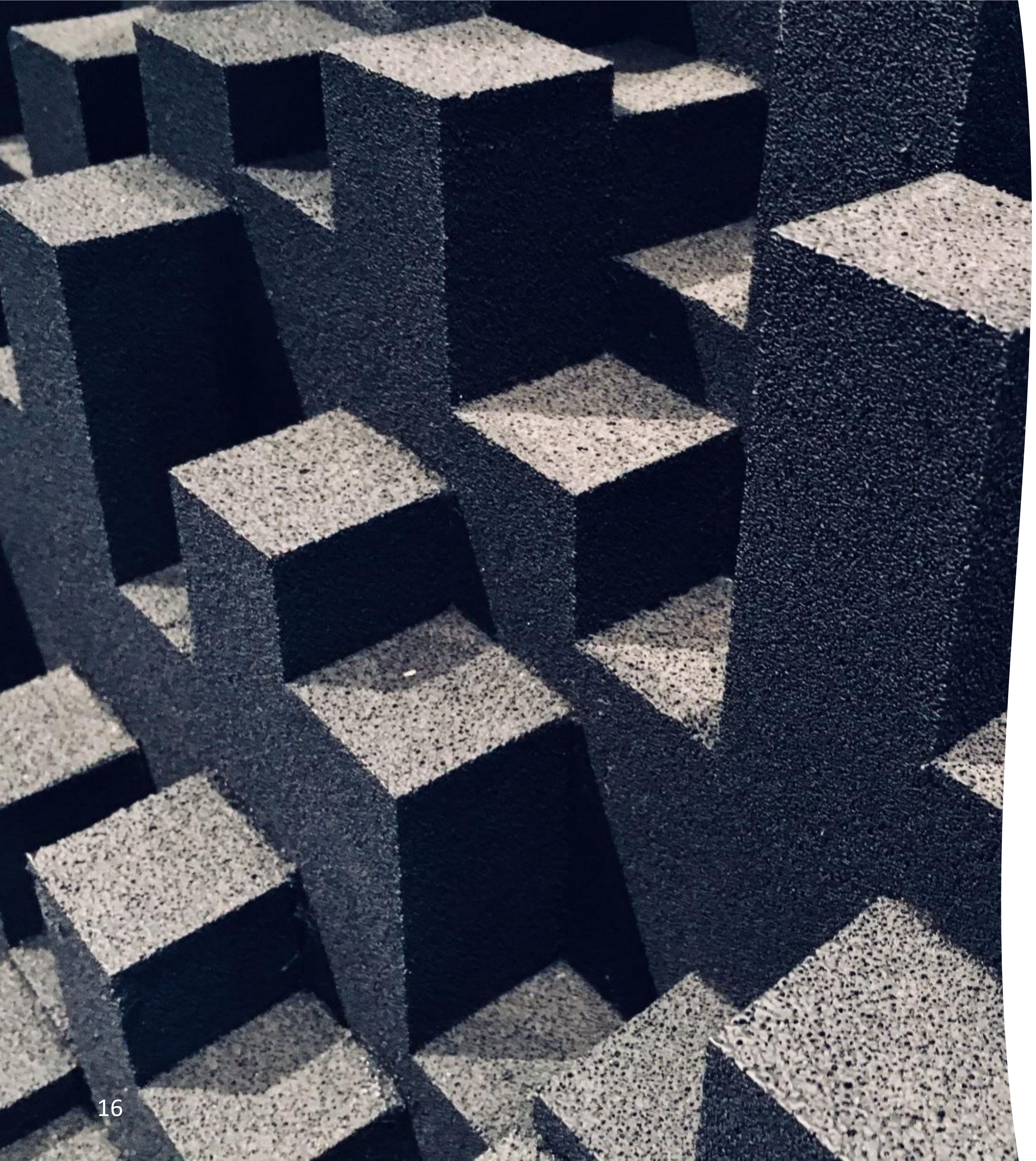
L'introduction de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques ne se limite donc pas à l'apprentissage de techniques informatiques. Elle transforme en profondeur :

- **les formes de production des connaissances,**
- **les modalités de validation,**
- **et les types de tâches proposées.**

Le cadre ETA permet ainsi de penser :

- **les circulations entre registres (graphe, tableau, algorithme),**
- **les articulations entre simulation et formalisation,**
- **et les déplacements des formes de rationalité mobilisées.**

Dans la suite de cette présentation, ce cadre sera prolongé afin d'analyser les transformations induites par l'introduction de l'intelligence artificielle générative.



Vers un espace de travail didactique instrumenté par l’IA (ETDIA)

Vers un espace de travail didactique instrumenté par l'IA (ETDIA)

L'apparition de l'IA générative conduit à prolonger cette analyse. Contrairement aux outils informatiques traditionnels, les systèmes génératifs sont capables de produire des réponses mathématiques, de reformuler des raisonnements et de proposer des structurations.

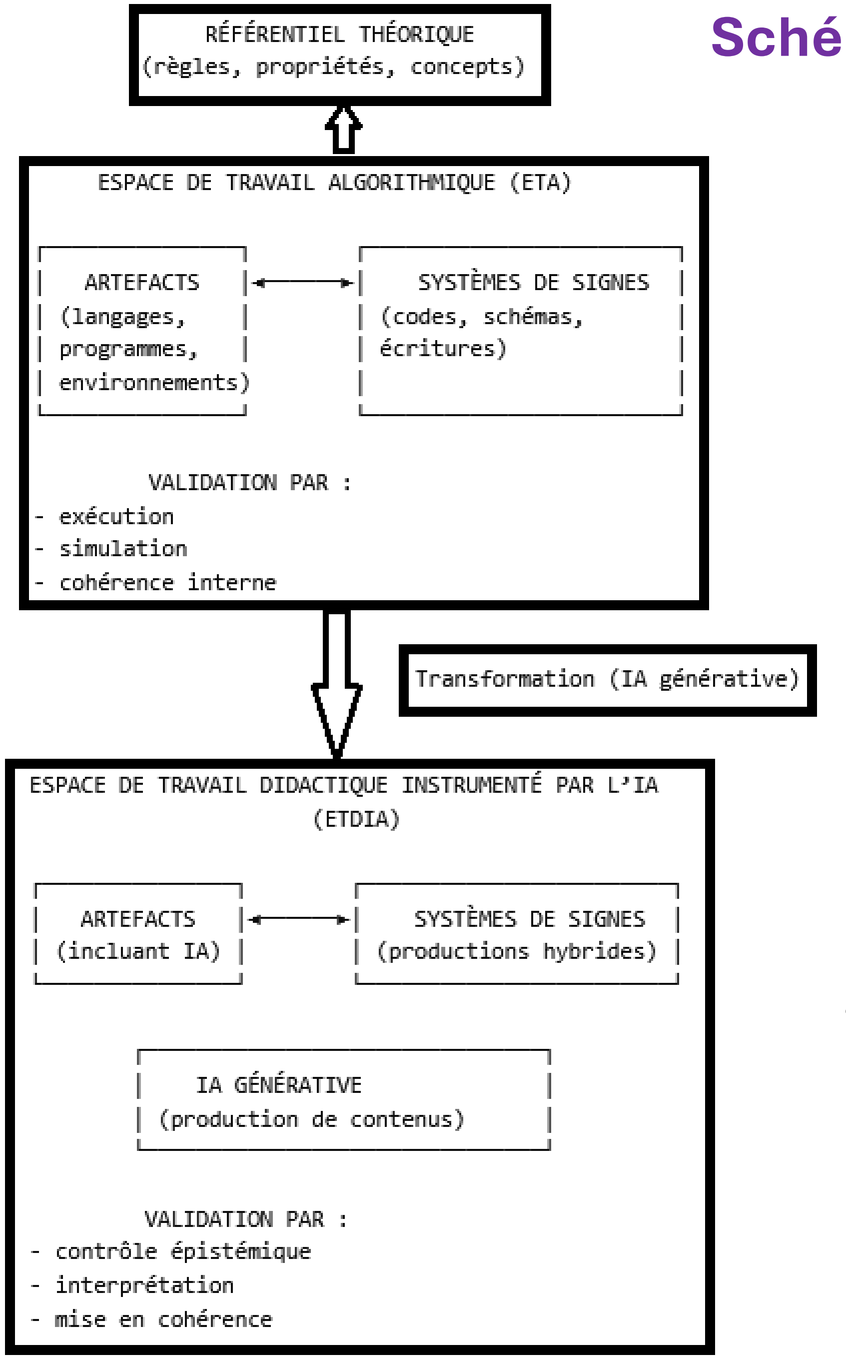
Cette évolution introduit un nouvel acteur dans le système didactique : une instance externe capable de produire des contenus plausibles, mais dont la validité ne peut être présupposée.

Dans ce contexte, il devient nécessaire d'introduire la notion d'Espace de Travail Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA). Cet espace se caractérise par un déplacement du centre de gravité du travail mathématique.

Alors que la production de contenus peut être en partie externalisée, la validation et le contrôle épistémique deviennent centraux.

Ce déplacement ne correspond pas à une simplification de l'activité, mais à une transformation de sa nature.

Schématisation des Espaces de Travail Algorithmique (ETA) et Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA)

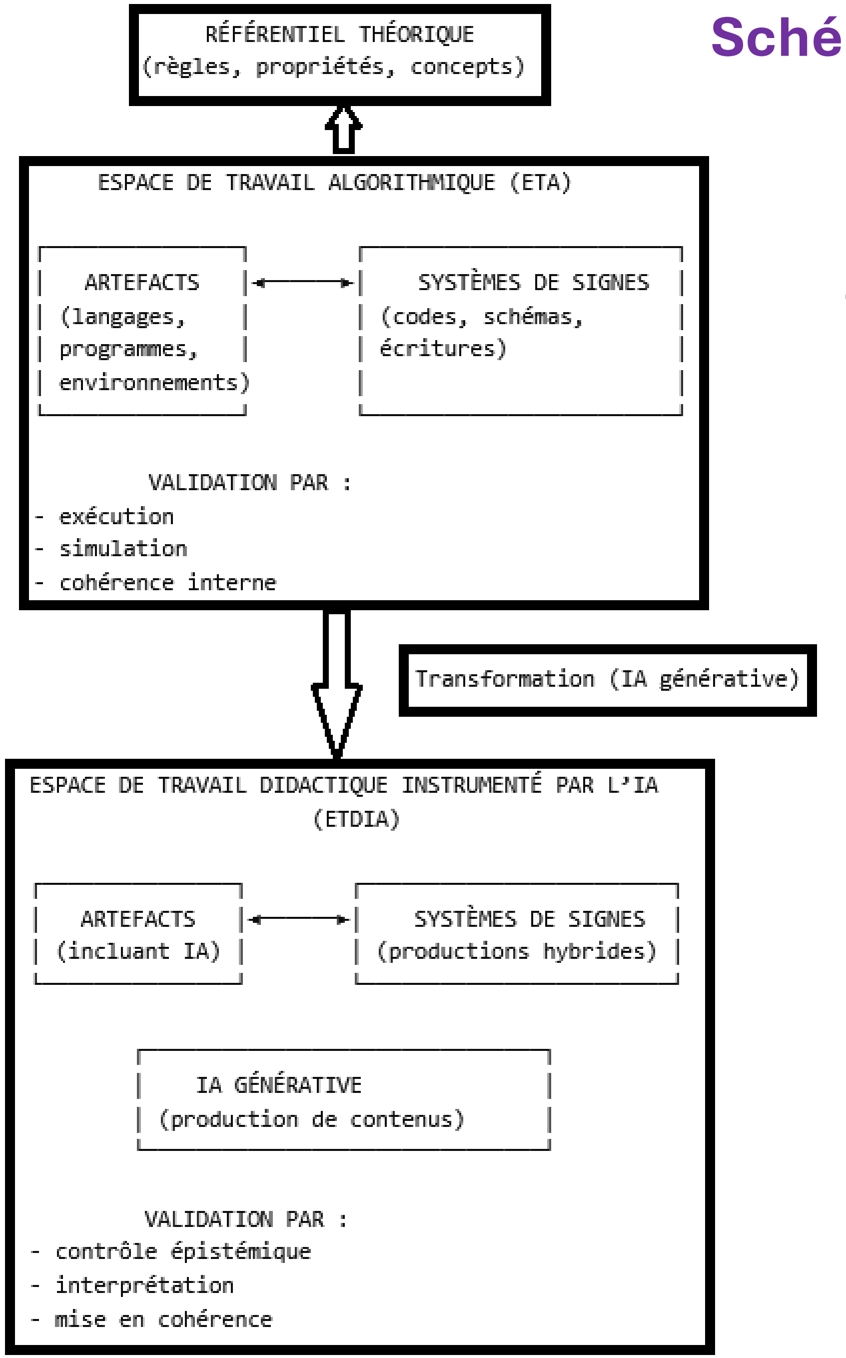


Ce schéma propose une modélisation des ETA et de leur transformation dans le contexte de l'introduction de l'IA générative, à travers la notion d'Espace de Travail Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA).

Dans le cadre des ETA, l'activité mathématique s'organise autour de l'articulation entre trois pôles : les artefacts (langages, environnements, programmes), les systèmes de signes (écritures, représentations) et un référentiel théorique.

La validation repose alors sur des formes spécifiques telles que l'exécution, la simulation ou la cohérence interne.

L'introduction de l'IA générative modifie cette organisation en faisant apparaître une instance capable de produire des contenus mathématiques plausibles.



Schématisation des Espaces de Travail Algorithmique (ETA) et Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA)

Dans l'ETDIA, les artefacts incluent désormais des systèmes génératifs, et les productions deviennent hybrides, résultant de l'interaction entre l'humain et la machine

Cette transformation entraîne un déplacement des modalités de validation :

- **la production pouvant être partiellement externalisée, le travail mathématique se recentre sur des activités de contrôle épistémique, d'interprétation et de mise en cohérence.**

Deux terrains d'analyse : NAIVLE et PRISME

Deux terrains d'analyse : NAIVLE et PRISME

Afin d'examiner ces transformations à différentes échelles, deux terrains sont considérés.

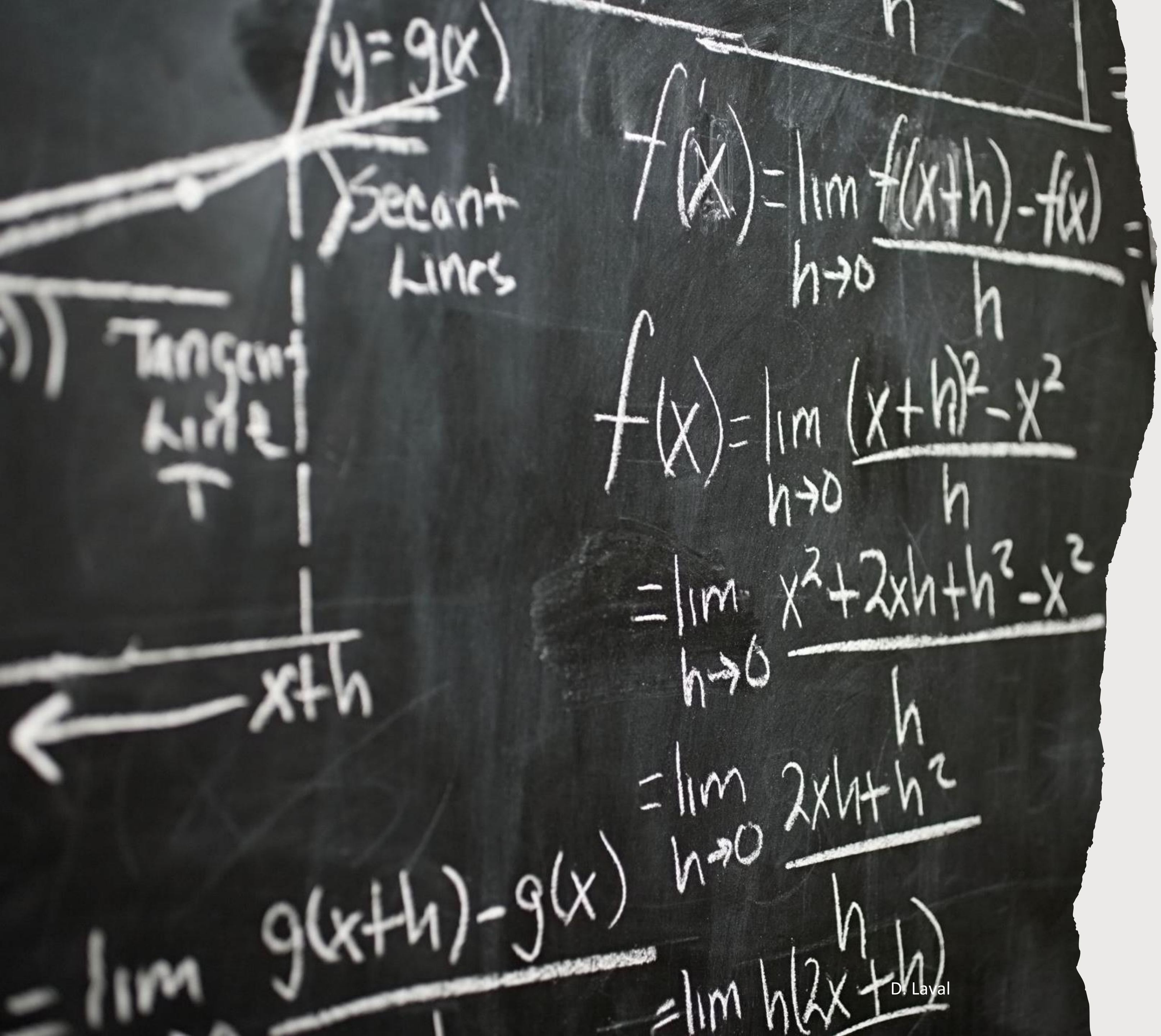
Le projet NAIVLE (*Natural Axiomatic Intuitive Verification for Learning and Education*) , développé dans un contexte franco-allemand, désigne un langage semi-formel visant à rendre explicites les processus de vérification des raisonnements mathématiques, dans une perspective intermédiaire entre intuition et formalisation (Laval, à paraître)

Il met en évidence les enjeux de structuration explicite des raisonnements et de validation formelle.

Le protocole PRISME (*Programme de Recherche Interdisciplinaire sur les Savoirs, la Modélisation et l'Éthique*) est une recherche-action organisé par l'ISFEC-ÎDF, centrée sur l'école primaire.

Il vise à analyser les transformations du travail mathématique dans des situations d'enseignement, en lien avec l'introduction de nouveaux contenus, tels que les probabilités, et avec l'usage de l'IA.

La mise en regard de ces deux terrains permet de montrer que les transformations induites par l'IA concernent à la fois les formes les plus formalisées du travail mathématique et les situations d'apprentissage les plus élémentaires.



Premier terrain : NAIVLE et la formalisation des preuves au niveau universitaire

Premier terrain : NAIVLE et la formalisation des preuves au niveau universitaire

1.1.1 Definition. (a) A **numerical symbol** is either the digit "0" or a finite string of digits beginning with a non-zero digit.

(b) A **symbol** is either a numerical symbol or a string of finitely many characters that begins with a letter. Characters are letters, digits, and the special character "_".

(c) In Naivle, we distinguish between four sets of symbols: P, C, V, and W. The elements of set P are called **predefined symbols**, the elements of set C are called **constants**, the elements of set V are called **variables**, and the elements of set W are called **words**.

The sets P, C, V, and W have the following properties:

(i) The sets P, C, V, and W are pairwise disjoint.

(ii) The set P consists of the symbols `ee`, `vv`, `negation`, `and`, `or`, `forall`, `exists`, `exists_unique`, `implies`, and `mid`.

(iii) The set C contains all numerical symbols.

"Naive Proof Verification (NAIVLE) – The Mathematical Language"
Johannes Ueberberg, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Universität Gießen

Premier terrain : NAIVLE et la formalisation des preuves au niveau universitaire

Le projet franco-allemand NAIVLE s'inscrit dans une réflexion sur la formalisation et la vérification des preuves mathématiques dans l'enseignement supérieur.

NAIVLE permet de rendre explicites les étapes d'une preuve et de contrôler leur validité.

Il vise à développer un langage semi-formel permettant de structurer explicitement les raisonnements mathématiques, tout en restant accessible à un lecteur humain

Dans ce cadre, l'enjeu principal n'est pas seulement de produire des démonstrations correctes, mais de rendre explicites les chaînes d'inférences et les règles mobilisées.

Premier terrain : NAIVLE et la formalisation des preuves au niveau universitaire

Chaque étape du raisonnement est isolée, identifiée et justifiée, ce qui permet une vérification locale des énoncés.

Cette approche met en évidence une caractéristique importante du travail mathématique : la validation ne repose pas uniquement sur l'intuition globale d'une preuve, mais sur la possibilité de contrôler chacune de ses étapes.

Mais ce qui est intéressant aussi, c'est que cela met en évidence une tension : plus on explicite localement, plus la compréhension globale peut devenir difficile.

Avec l'IA, cette tension s'accentue, car la production devient plus facile, mais la validation devient plus exigeante.

NAIVLE et paradigme formel (AIII)

Le projet NAIVLE peut être analysé comme relevant principalement du paradigme AIII, caractérisé par un traitement formel des objets mathématiques.

En effet, dans ce paradigme :

- **les objets sont manipulés symboliquement ;**
- **les règles d'inférence sont explicitées ;**
- **la validité repose sur des systèmes structurés de déduction.**

Cependant, l'intérêt de NAIVLE ne réside pas uniquement dans sa proximité avec les systèmes formels.

Il introduit également une tension entre lisibilité humaine et vérifiabilité formelle.

En cherchant à rendre les preuves à la fois compréhensibles et vérifiables, il met en lumière une dimension souvent implicite du travail mathématique : la nécessité d'articuler compréhension globale et validation locale.

Apports pour l'analyse du travail mathématique

L'analyse du projet NAIVLE permet de mettre en évidence plusieurs transformations du travail mathématique dans un contexte instrumenté :

- **une explicitation accrue des raisonnements, chaque étape devant être formulée de manière autonome ;**
- **une localisation de la validation, qui s'effectue au niveau des inférences élémentaires ;**
- **une reconfiguration du rapport à la preuve, qui devient à la fois plus transparente et plus fragmentée.**

Paradoxalement, cette explicitation peut rendre la compréhension globale plus difficile, en dispersant la structure du raisonnement.

Ce phénomène met en évidence une tension entre deux exigences :

- **la rigueur formelle,**
- **et la lisibilité mathématique.**

NAIVLE dans le contexte de l'IA générative

L'introduction de l'IA générative vient complexifier cette situation.

D'un côté, l'IA est capable de produire des démonstrations plausibles, parfois correctes, parfois erronées.

D'autre côté, des systèmes comme NAIVLE visent à garantir la validité formelle des raisonnements.

Cette coexistence met en évidence une tension fondamentale :

- **l'IA facilite la production de contenus mathématiques ;**
- **NAIVLE renforce les exigences de validation formelle.**

Dans ce contexte, le travail du mathématicien se déplace :

- **il ne s'agit plus seulement de produire une preuve,**
- **mais de vérifier, analyser et interpréter des preuves produites, notamment par des systèmes externes.**

Vers une articulation avec l'ETDIA

L'analyse de NAIVLE permet ainsi de mieux comprendre les enjeux de l'ETDIA dans le contexte de l'enseignement supérieur.

Dans un espace de travail instrumenté par l'IA :

- **la production de démonstrations peut être partiellement externalisée ;**
- **la validation devient une activité centrale, nécessitant des outils et des cadres spécifiques.**

NAIVLE peut alors être interprété comme un dispositif permettant de soutenir ce travail de validation, en fournissant un cadre explicite pour l'analyse des raisonnements.

Exemple 1 de preuve semi-formelle dans l'esprit de NAIVLE

Énoncé du théorème : « Si n est un entier pair, alors n^2 est pair. »

Ecriture semi-formelle de type NAIVLE

```
theorem square_of_even_is_even
given n : Integer
assume H1 : even(n)
prove even(n*n)

1. From H1, there exists k : Integer such that n = 2*k.        by definition of even
2. Let k be such that n = 2*k.                                  from 1
3. Then n*n = (2*k)*(2*k).                                      by substitution
4. Hence n*n = 2*(2*k*k).                                       by arithmetic
5. Therefore even(n*n).                                         by definition of even
qed
```

Dans cet exemple très simple, l'intérêt n'est évidemment pas la difficulté mathématique.

Ce qui nous intéresse, c'est la forme de la preuve.

Chaque étape est explicitée et justifiée séparément.

Nous voyons bien ici ce que permet une approche de type NAIVLE : la validation locale devient très lisible.

En revanche, nous voyons aussi la limite possible de ce type de structuration :

la preuve est claire étape par étape, mais elle peut perdre en fluidité globale

Jusqu'où va cette explicitation ?

```
In Naivle, we distinguish four sets of symbols: P, C, V, W.

P: predefined symbols (and, or, implies, forall, exists, …)
C: constants
V: variables
W: words

The sets P, C, V, W are pairwise disjoint.
```

extrait simplifié

Nous avons un changement de niveau dans le travail mathématique

- explicitation des inférences
- explicitation des objets
- explicitation du langage

➔ **Validation entièrement structurée**

Premier terrain : NAIVLE et la formalisation des preuves au niveau universitaire

Une tension avec l'IA générative

NAIVLE	IA générative
explicitation	production
structure	plausibilité
validation formelle	validation incertaine
transparence	opacité partielle

Conséquence pour le travail mathématique

- ➔ **Production facilitée**
- ➔ **Validation renforcée**

Exemple 2 de preuve semi-formelle dans l'esprit de NAIVLE

Énoncé du théorème : « Si a et b sont pairs, alors $a + b$ est pair. »

```
theorem sum_of_even_is_even
given a, b : Integer
assume H1 : even(a)
assume H2 : even(b)
prove even(a+b)

1. From H1, there exists k : Integer such that a = 2*k.        by definition of even
2. From H2, there exists l : Integer such that b = 2*l.        by definition of even
3. Then a+b = 2*k + 2*l.                                       by substitution
4. Hence a+b = 2*(k+l).                                        by arithmetic
5. Therefore even(a+b).                                        by definition of even
qed
```

Cette variante est aussi très intéressante, car elle nous montre la gestion de deux hypothèses.

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

Une situation à double statut : objet d'enseignement et objet d'analyse

Afin de rendre observables les transformations du travail mathématique évoquées précédemment, nous nous appuyons sur une situation de modélisation mise en œuvre dans un contexte d'enseignement scientifique de niveau terminal ou de première année universitaire (mathématiques ou biomathématiques).

Cette situation repose sur l'étude d'un comportement animal, une parade nuptiale, décrite sous la forme d'un éthogramme du mâle.

Les différentes phases du comportement (approche, inspection, tentative, accouplement, abandon, sortie) sont interprétées comme des états d'un système dynamique, reliés par des transitions possibles.

Toutefois, cette situation présente une particularité essentielle : elle n'a pas été construite selon une démarche classique d'ingénierie didactique, mais dans le cadre d'une interaction entre un enseignant-chercheur et un système d'intelligence artificielle générative.

Elle possède ainsi un double statut :

- **celui d'un objet d'enseignement, mobilisable en classe ;**
- **et celui d'un objet d'analyse, révélateur de nouvelles formes de production et de structuration du travail mathématique.**

Une co-construction humain–IA : structuration, explicitation, prolongements

Dans le processus de conception de cette situation, l'intelligence artificielle n'est pas intervenue comme un simple outil de calcul ou de restitution, mais comme un partenaire de structuration.

L'interaction a permis :

- **de formaliser progressivement l'éthogramme sous forme de graphe de transitions ;**
- **de proposer une représentation matricielle du système ;**
- **d'expliciter les liens entre les différentes représentations (graphe, matrice, dynamique) ;**
- **et de suggérer des prolongements, notamment en termes de simulation algorithmique et d'interprétation des puissances de matrices.**

Ce processus ne relève ni d'une délégation complète, ni d'une automatisation du travail.

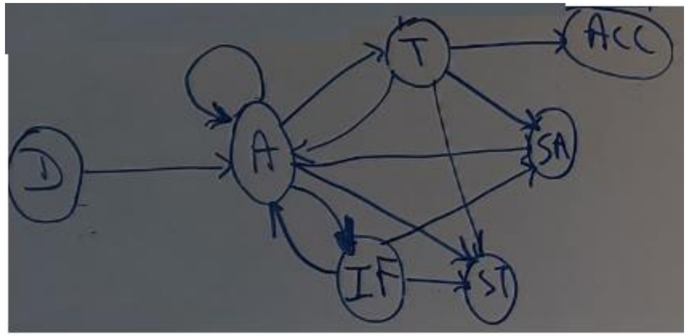
Il s'inscrit dans une logique de co-construction, dans laquelle les propositions de l'IA sont :

- **sélectionnées,**
- **interprétées,**
- **ajustées,**
- **et validées par l'utilisateur humain.**

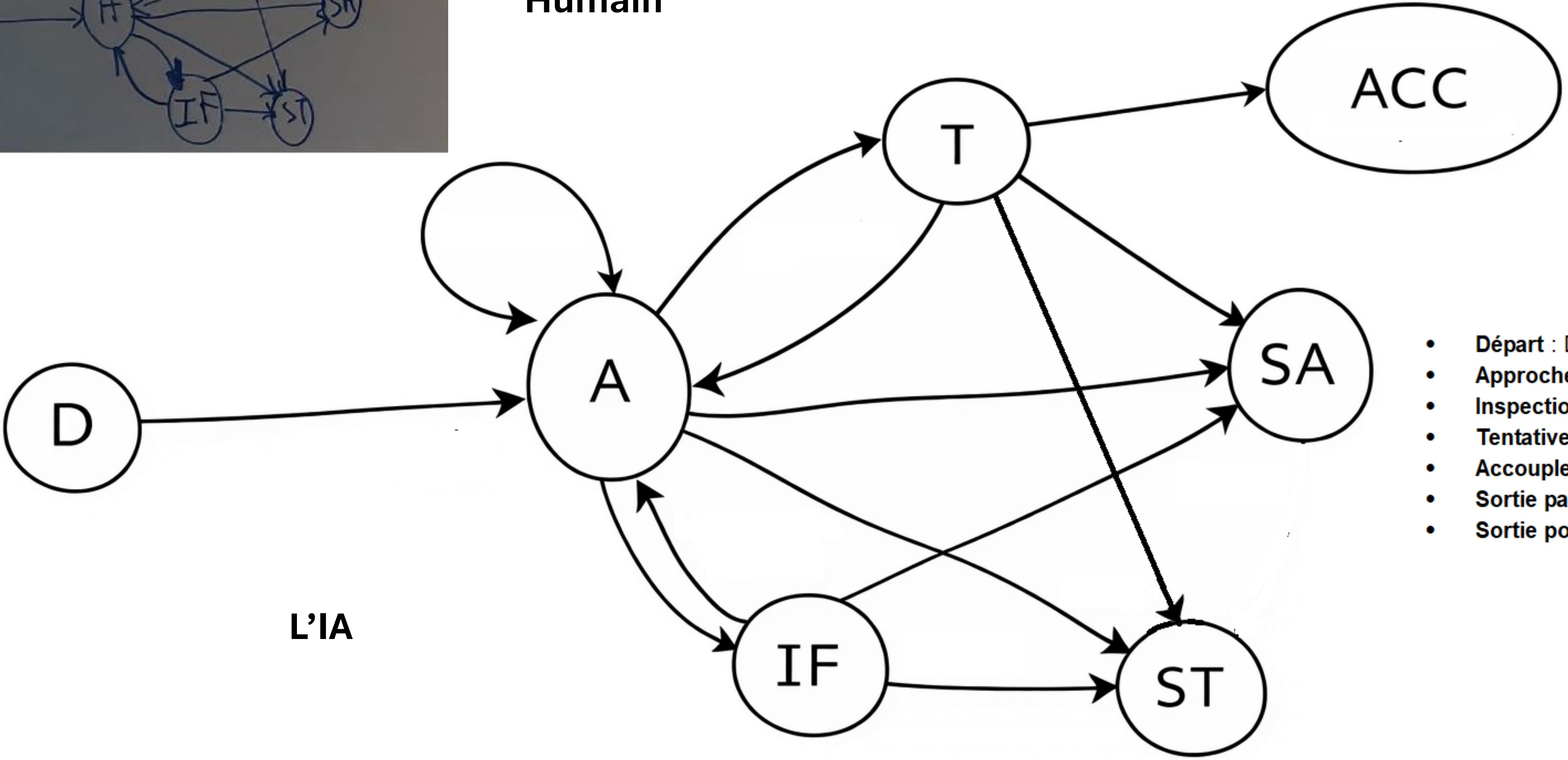
Ainsi, l'IA agit comme un amplificateur de structuration didactique, capable de rendre explicites des relations qui demeurent souvent implicites dans les pratiques ordinaires.

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

Analyse des transitions observées : formaliser progressivement l'éthogramme sous forme de graphe de transitions, suite à un échange entre l'humain et l'IA



Humain



L'IA

Ethogramme du mâle

- **Départ** : D
- **Approche** : A
- **Inspection femelle** : IF
- **Tentative d'accouplement** : T
- **Accouplement** : Acc
- **Sortie par abandon du mâle** : SA
- **Sortie pour dépassement du temps** : ST

De l'éthogramme au modèle mathématique : circulation entre registres

La situation construite permet d'organiser une circulation entre plusieurs registres de représentation :

- **Registre empirique : description du comportement (éthogramme)**
- **Registre graphique : modélisation par un graphe orienté**
- **Registre matriciel : codage sous forme de matrice de transition**
- **Registre algorithmique : simulation des trajectoires possibles**

Cette circulation constitue un point d'appui didactique majeur : Elle permet de donner du sens à des notions souvent abordées de manière formelle, en particulier l'interprétation du produit matriciel.

Par exemple, l'IA énonce que toute séquence d'accouplement se termine par : Acc, SA ou ST.

Puis, elle interprète le graphe par une matrice qui correspond à une matrice de transition.

Ordre des états : D, IF, A, T, Acc, ST, SA (précision donnée par l'IA).

	D	IF	A	T	Acc	ST	SA
D	0	0	0	0	0	0	0
IF	0	0	1	0	0	0	0
A	1	1	1	1	0	0	0
T	0	0	1	0	0	0	0
Acc	0	0	0	1	0	0	0
ST	0	1	1	1	0	0	0
SA	0	1	1	1	0	0	0

L'IA peut générer la matrice, proposer le graphe et simuler. Mais, sans aucune autre information de la part de l'humain à l'IA, l'interprétation reste humaine. Cependant…

De l’éthogramme au modèle mathématique : circulation entre registres

L’étudiante constate que la matrice ne contient uniquement que des 0 et des 1.

Elle demande à l’IA à quoi correspond ces séries de chiffres.

L’IA répond que « 1 : transition possible » et « 0 : transition impossible ».

L’étudiante propose alors à l’IA sous une forme interrogative : *Est-ce que par exemple, on aurait : « Transition A → ST : possible → 1 », et de même : « Transition ST → A : impossible → 0 » ?*

L’IA répond : *OUI* .

La circulation évoquée dans la diapositive précédente entre plusieurs registres de représentation doit faire que l’étudiante puisse expliquer le rôle de la puissance M^n d’une matrice de transition, comme pouvant être interprétée comme le nombre de chemins de longueur n entre deux états, offrant ainsi une lecture combinatoire des opérations matricielles.

Dans le cadre des ETA, cette situation illustre la possibilité de passer d’une approche intuitive (simulation) à une approche structurée (règles de transition), puis à une approche plus formelle (manipulation symbolique des matrices).

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

De l’éthogramme au modèle mathématique : circulation entre registres

L’étudiante constate que la matrice ne contient uniquement que des 0 et des 1.

Elle demande à l’IA à quoi correspond ces séries de chiffres.

L’IA répond que « 1 : transition possible » et « 0 : transition impossible ».

L’étudiante propose alors à l’IA sous une forme interrogative : *Est-ce que par exemple, on aurait : « Transition A → ST : possible → 1 », et de même : « Transition ST → A : impossible → 0 » ?*

L’IA répond : *OUI* .

La circulation évoquée dans la diapositive précédente entre plusieurs registres de représentation doit faire que l’étudiante puisse expliquer le rôle de la puissance M^n d’une matrice de transition, comme pouvant être interprétée comme le nombre de chemins de longueur n entre deux états, offrant ainsi une lecture combinatoire des opérations matricielles.

Dans le cadre des ETA, cette situation illustre la possibilité de passer d’une approche intuitive (simulation) à une approche structurée (règles de transition), puis à une approche plus formelle (manipulation symbolique des matrices).

De l'éthogramme au modèle mathématique : circulation entre registres

L'étudiante constate que la matrice ne contient uniquement que des 0 et des 1.

Elle demande à l'IA à quoi correspond ces séries de chiffres.

L'IA répond que « 1 : transition possible » et « 0 : transition impossible ».

L'étudiante propose alors à l'IA sous une forme interrogative : ***Est-ce que par exemple, on aurait : « Transition A → ST : possible*** …

Ce qui est intéressant ici, ce n'est pas seulement le modèle, mais les passages entre les représentations. Et c'est précisément là que l'IA intervient aujourd'hui : elle facilite ces passages… mais ne garantit pas leur compréhension.

L'IA répon…

La circula… …oit faire que l'étudiante puisse expliquer le rôle de la puissance M^n d'une matrice de transition, comme pouvant être interprétée comme le nombre de chemins de longueur n entre deux états, offrant ainsi une lecture combinatoire des opérations matricielles.

Dans le cadre des ETA, cette situation illustre la possibilité de passer d'une approche intuitive (simulation) à une approche structurée (règles de transition), puis à une approche plus formelle (manipulation symbolique des matrices).

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

Une situation caractéristique d'un ETDIA

Cette situation peut être analysée comme relevant d'un Espace de Travail Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA).

Plusieurs caractéristiques en témoignent :

- la présence d'un **acteur externe** (l'IA), capable de produire des structures mathématiques ;
- une **production partiellement externalisée**, notamment dans la phase de structuration ;
- une **validation entièrement humaine**, reposant sur l'interprétation et le contrôle des propositions.

Ce point est essentiel : si l'IA contribue à la production des objets, elle ne garantit ni leur validité, ni leur pertinence didactique.

Dès lors, le travail mathématique ne disparaît pas, mais se transforme. Il se déplace vers :

- **la mise en relation des représentations,**
- **l'interprétation des résultats,**
- **et le contrôle épistémique des productions.**

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

Articulation avec NAIVLE et PRISME : un point de convergence

Cette situation permet de faire apparaître une convergence entre les deux terrains analysés précédemment.

Du côté de NAIVLE, l'accent est mis sur la formalisation explicite et la validation des raisonnements dans un cadre proche du paradigme formel (AIII).

Du côté de PRISME, l'analyse porte sur les transformations du travail mathématique dans des situations d'apprentissage, en particulier au niveau scolaire.

La situation de modélisation présentée ici constitue un point d'articulation entre ces deux perspectives :

- **elle mobilise des objets mathématiques structurés (graphes, matrices), proches des cadres formels ;**
- **elle s'inscrit dans une situation d'enseignement, où les questions de compréhension et de validation sont centrales ;**
- **elle met en évidence le rôle de l'IA comme médiateur dans la production et la structuration des savoirs.**

Ainsi, elle permet d'observer, à une échelle intermédiaire, les transformations du travail mathématique induites par l'introduction de l'IA.

Une situation de modélisation : de la parade nuptiale à la matrice dans un cadre de collaboration humain–IA

Enjeux didactiques : vers une redéfinition de la résolution de problème

L'analyse de cette situation conduit à reconsidérer certaines notions classiques de la didactique des mathématiques, en particulier celle de résolution de problème.

Dans un contexte où la production de solutions peut être partiellement externalisée, résoudre un problème ne consiste plus uniquement à produire une réponse, mais à :

- **interpréter les propositions,**
- **évaluer leur validité,**
- **et les inscrire dans un cadre de cohérence mathématique.**

Ce déplacement rejoint les analyses précédentes : le travail mathématique tend à se redéfinir comme un travail de validation, d'interprétation et de mise en cohérence, dans un environnement où les outils peuvent produire des résultats sans en garantir la compréhension.

Synthèse : une transformation du travail mathématique médié par l'IA

La situation étudiée met en évidence une transformation profonde du travail mathématique.

L'intelligence artificielle générative ne se contente pas d'ajouter un outil supplémentaire.

Elle modifie les conditions mêmes de production des savoirs, en introduisant une dissociation partielle entre production et validation.

Dans ce contexte, l'enjeu central devient celui du maintien d'un contrôle épistémique sur les objets mathématiques produits.

Cette transformation appelle le développement de cadres théoriques capables de rendre compte de ces nouvelles configurations, au croisement de la didactique, de l'algorithmique et de l'intelligence artificielle.

De la structure à la dynamique : apport de l'algorithmique

De la structure à la dynamique : apport de l’algorithmique

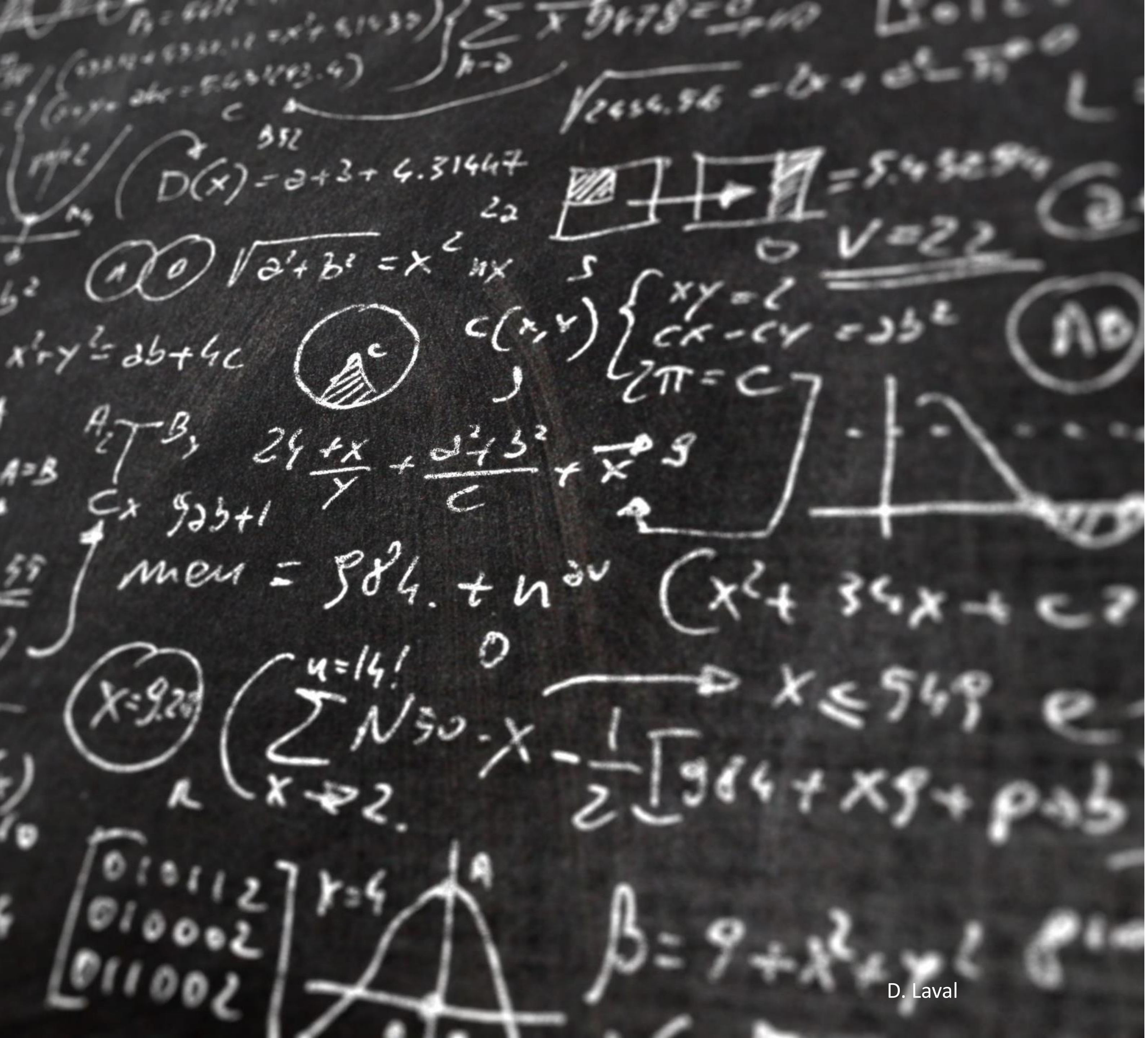
Dans l’activité mathématique, la modélisation peut être prolongée par une simulation algorithmique, par exemple :

- **à l’aide de Scratch Jr aux cycles 1 et 2 de l’école primaire française,**
- **Scratch au cycles 3 et 4 de l’école primaire et du collège en France,**
- **Python au lycée et à l’université.**

Le système est alors décrit en termes de variables d’état et de règles de transition.

Par exemple, le passage du graphe à la matrice, puis à l’algorithme, illustre les circulations entre différents registres de représentation et différents espaces de travail.

Il permet de mettre en évidence la complémentarité entre modélisation, simulation et formalisation.



L’IA comme amplificateur de structuration didactique

L’IA comme amplificateur de structuration didactique

Dans une situation mathématique, l’IA générative peut être mobilisée pour accompagner la conception de la séance.

Elle contribue à structurer la progression, à expliciter les liens entre les représentations et à produire des supports pédagogiques.

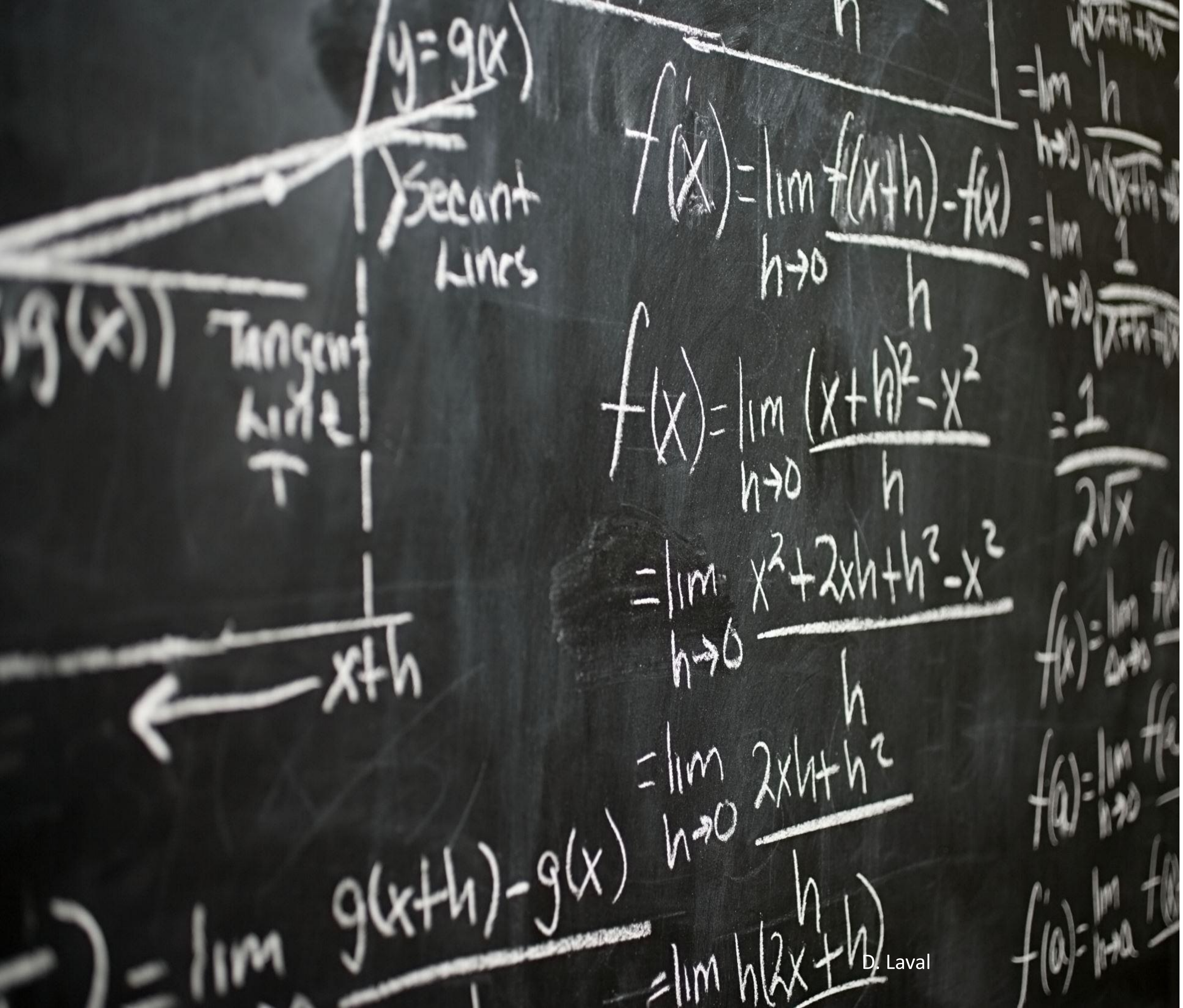
Ce rôle ne relève ni d’une délégation complète, ni d’une simple assistance technique.

Il peut être décrit comme celui d’un amplificateur de structuration didactique, capable de rendre explicites des relations qui restent souvent implicites dans les pratiques ordinaires.

Ce que fait l'IA / Ce que fait l'humain

Par exemple :

IA	Humain
Propose matrice	Valide
Structure	Interprète
Génère	Comprend



Déplacement du travail mathématique et contrôle épistémique

Déplacement du travail mathématique et contrôle épistémique

Si nous revenons au cas de la « parade nuptiale des abeilles », nous avons observé que l'analyse de la situation a mis en évidence un déplacement du travail mathématique.

Alors que l'activité pouvait être centrée sur la production de calculs et de résultats, elle s'est déplacée vers l'interprétation, la mise en relation et la validation.

Ce déplacement confère une importance centrale au contrôle épistémique.

Les productions, notamment celles issues de l'IA, doivent être évaluées, interprétées et validées.

Cette validation constitue une activité mathématique à part entière.

Second terrain : PRISME, école primaire, IA et nouveaux contenus mathématiques

Second terrain : PRISME, école primaire, IA et nouveaux contenus mathématiques

Le protocole PRISME s'inscrit dans un contexte de recomposition profonde du travail mathématique sous l'effet du développement des technologies numériques et, plus récemment, de l'IA générative.

Il ne s'agit pas d'y voir une simple évolution instrumentale, mais une transformation des conditions mêmes de production, de structuration et de validation des savoirs.

Dans cette perspective, PRISME se présente comme un dispositif de recherche-formation visant à articuler plusieurs dimensions du travail mathématique : didactique, cognitive, algorithmique et éthique.

L'enjeu n'est pas de juxtaposer ces cadres, mais de les mettre en relation dans un modèle intégrateur permettant de rendre intelligible la complexité des situations contemporaines.

L'un des apports majeurs de PRISME consiste à déplacer le regard du simple usage des outils vers les transformations du travail mathématique lui-même.

Une recomposition du travail mathématique : entre externalisation et contrôle

L'introduction de systèmes d'intelligence artificielle modifie en effet les équilibres entre production, structuration et validation.

Certaines opérations, autrefois centrales dans l'activité mathématique des élèves, peuvent désormais être partiellement externalisées.

Cette externalisation ne concerne pas uniquement le calcul, mais également la production de raisonnements, de représentations ou de formulations langagières.

Dans ce contexte, la question centrale devient celle du contrôle épistémique :
qui valide ? selon quels critères ? et avec quelles garanties de compréhension ?

PRISME fait l'hypothèse que l'introduction de l'IA déplace le centre de gravité du travail mathématique :

- **de la production vers la sélection,**
- **de l'exécution vers l'interprétation,**
- **et de la résolution vers la validation.**

Second terrain : PRISME, école primaire, IA et nouveaux contenus mathématiques

Une architecture conceptuelle articulée :

Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011 et Kuzniak, Richard, 2014),
ETA (Espaces de Travail algorithmique) (ETA) (Laval, 2018, 2021),
ETC (Espaces de Travail connectés (ETC) (Lagrange et Laval, 2019),

Pour analyser les transformations évoquées précédemment, PRISME mobilise et articule entre autres ces cadres théoriques

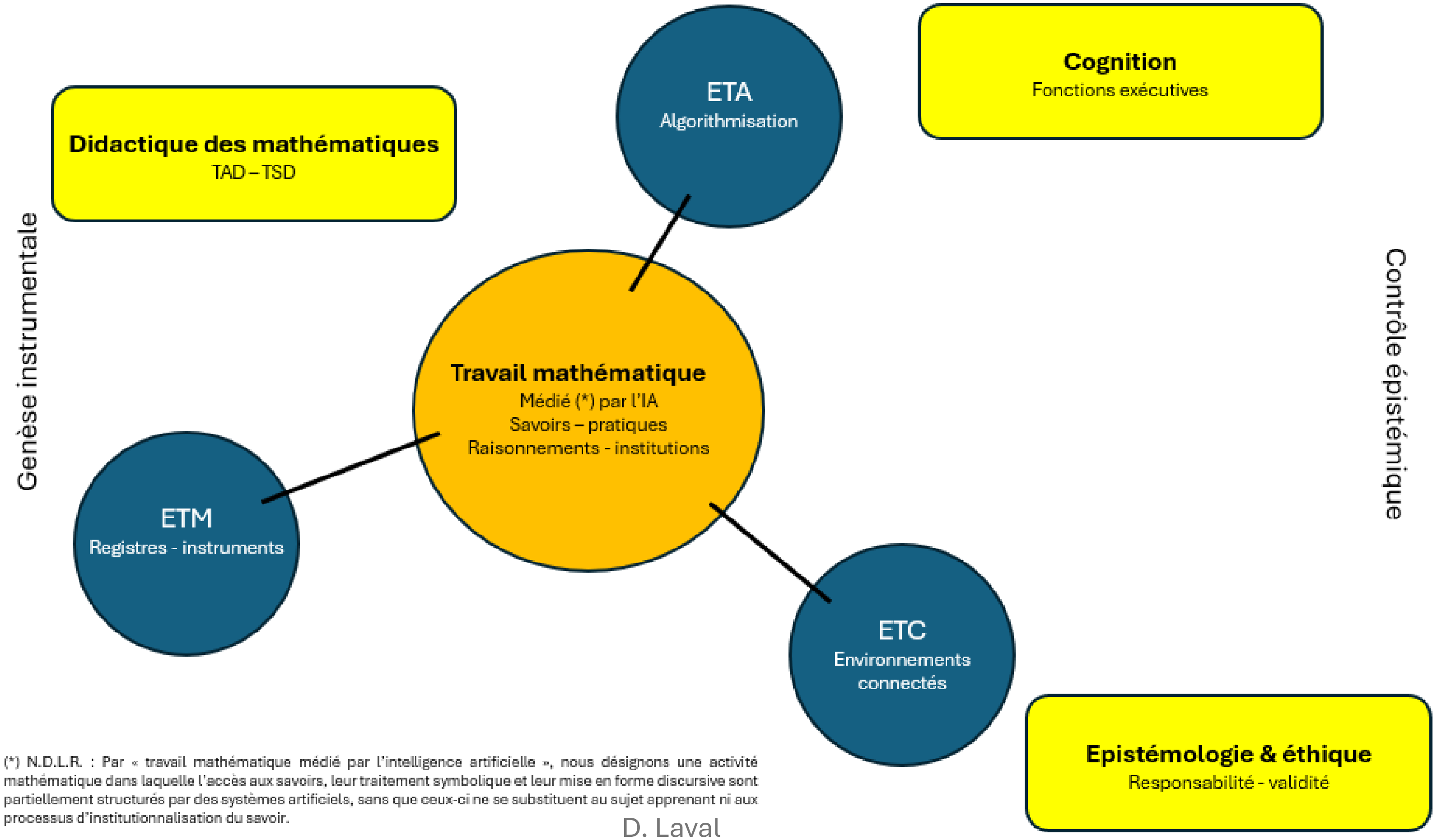
Ces cadres permettent de décrire le travail mathématique comme une activité structurée par :

- des registres de représentation,
- des instruments,
- des règles institutionnelles,
- et des formes de contrôle.

L'originalité de PRISME réside dans l'articulation de ces espaces au sein d'un modèle dynamique, dans lequel l'IA apparaît comme un nouvel acteur de la médiation didactique.

Une architecture conceptuelle articulée : ETM, ETA, ETC

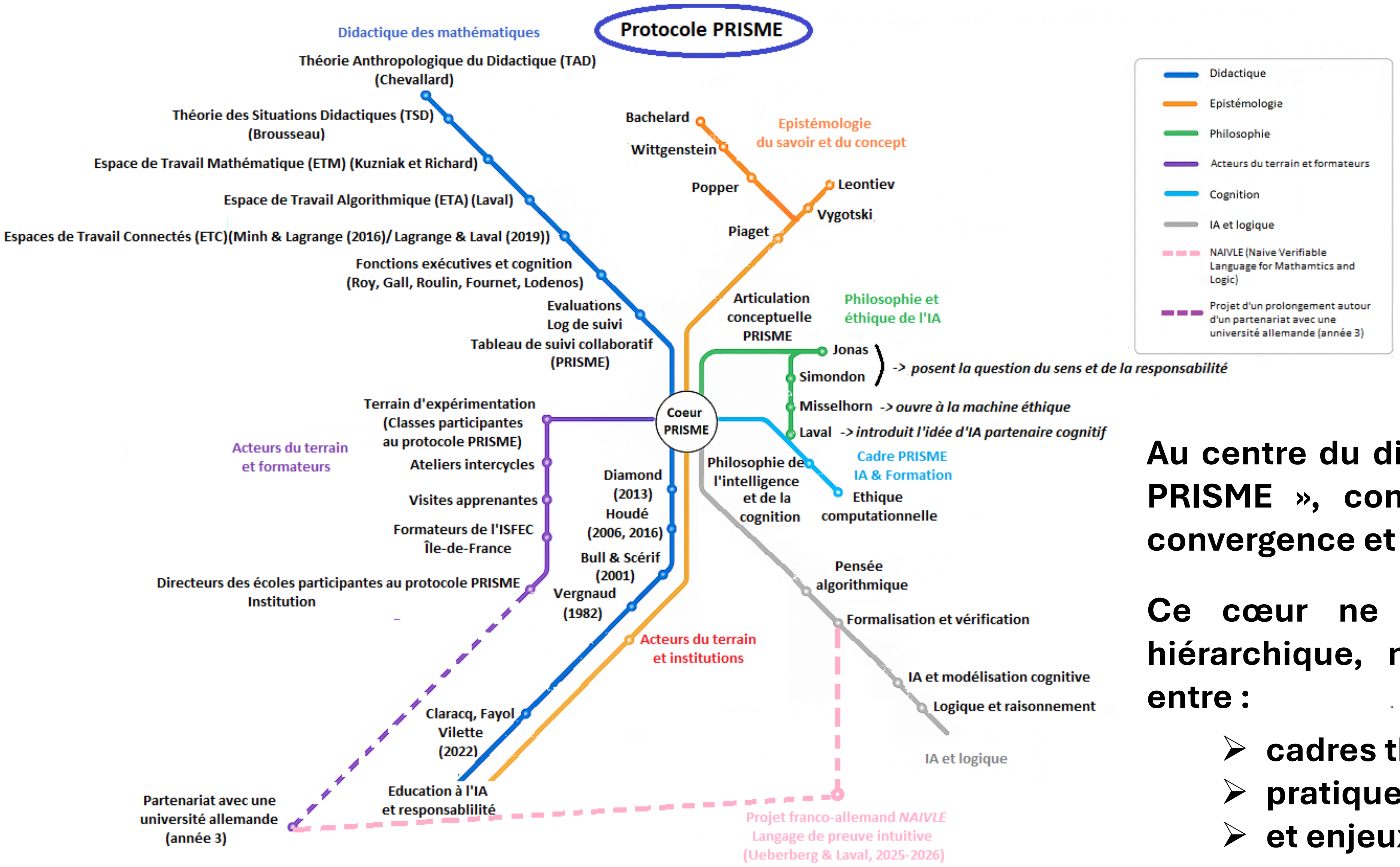
La figure de la « constellation théorique » (cf. figure 1 (Laval, à paraitre)) permet de rendre visible cette organisation, en situant le travail mathématique médié par l'IA au croisement de la didactique, de la cognition et de l'épistémologie.



(*) N.D.L.R. : Par « travail mathématique médié par l'intelligence artificielle », nous désignons une activité mathématique dans laquelle l'accès aux savoirs, leur traitement symbolique et leur mise en forme discursive sont partiellement structurés par des systèmes artificiels, sans que ceux-ci ne se substituent au sujet apprenant ni aux processus d'institutionnalisation du savoir.

Second terrain : PRISME, école primaire, IA et nouveaux contenus mathématiques

Le cœur PRISME : convergence entre théorie, pratique et éthique



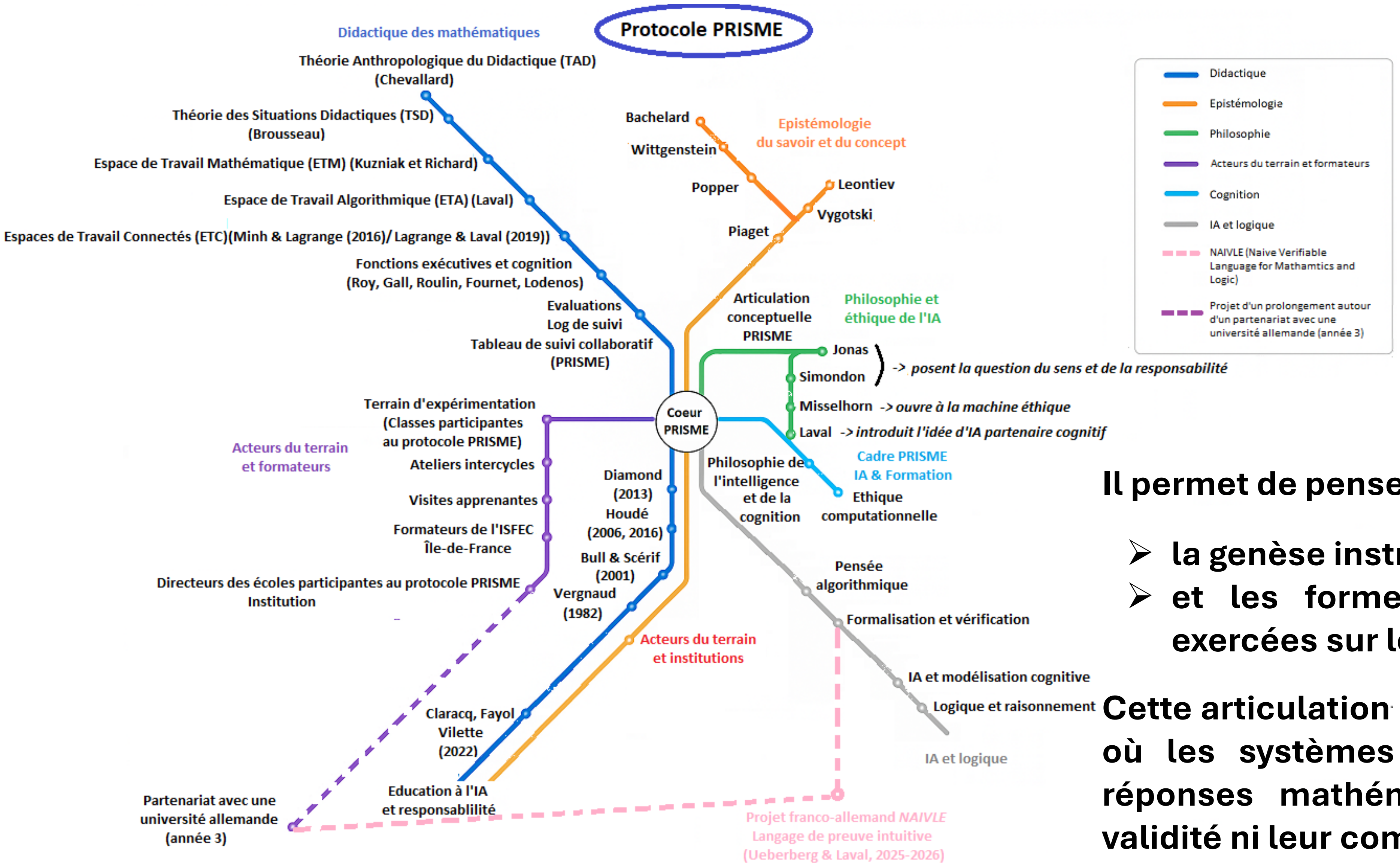
Au centre du dispositif se trouve le « cœur PRISME », conçu comme un espace de convergence et de régulation.

Ce cœur ne constitue pas un centre hiérarchique, mais un lieu d'articulation entre :

- ➢ ***cadres théoriques,***
- ➢ ***pratiques de terrain,***
- ➢ ***et enjeux éthiques.***

Second terrain : PRISME, école primaire, IA et nouveaux contenus mathématiques

Le cœur PRISME : convergence entre théorie, pratique et éthique



Il permet de penser simultanément :

- **la genèse instrumentale des outils,**
- **et les formes de contrôle épistémique exercées sur les savoirs.**

Cette articulation est décisive dans un contexte où les systèmes d'IA peuvent produire des réponses mathématiques sans garantir leur validité ni leur compréhension.

L'IA comme médiateur cognitif et langagier

Dans le cadre de PRISME, l'intelligence artificielle n'est pas envisagée comme un substitut au raisonnement, mais comme un médiateur.

Elle intervient principalement :

- **dans la verbalisation des raisonnements,**
- **dans la structuration des réponses,**
- **et dans la mise en relation des représentations.**

Cette médiation présente un double enjeu :

- **elle peut soutenir le raisonnement,**
- **mais elle peut également produire des illusions de compréhension.**

Dès lors, l'intégration de l'IA nécessite une ingénierie didactique rigoureuse, permettant de maintenir un contrôle sur les savoirs en jeu.

Développer les fonctions exécutives : la clé de la réussite en résolution de problème

Cette question touche directement à la fois la pensée algorithmique, la modélisation cognitive et à la dimension éducative des fonctions exécutives (planification, flexibilité, inhibition, mémoire de travail).

Développer les fonctions exécutives : la clé de la réussite en résolution de problème

Problème : Comment découper un gâteau (carré, rectangulaire ou rond) en 8 parts avec seulement trois coups de couteaux ?

Un échange entre un élève et une IA

Extrait d'un dialogue entre un élève de cycle 3 (CM1) et une IA conversationnelle pédagogique (ChatGPT 5 dans un cadre scolaire).

Élève : Je dois couper un gâteau en 8 parts avec trois coups de couteau, mais je ne vois pas comment faire. Si je fais trois traits, j'obtiens seulement 6 parts, non ?
IA : C'est une bonne remarque. Tu as déjà fait un premier raisonnement.
Regardons autrement : que signifie exactement *un coup de couteau* dans ce problème ?
Élève : Euh... c'est une coupe droite, je crois. Pas besoin de soulever le couteau.
IA : Exactement ! Un coup de couteau peut traverser tout le gâteau.
Maintenant, combien de parts obtiens-tu avec : un seul coup ? deux coups ?
Élève : Avec un coup, deux parts. Avec deux coups, quatre parts si je croise bien les traits.
IA : Très bien. Et si tu ajoutes un troisième coup, où pourrais-tu le placer pour obtenir plus de 4 parts ?
Essaie d'imaginer le gâteau en 3D...
Élève : Ah... en 3D ? Donc je pourrais couper en hauteur ?
Comme une coupe horizontale qui passe au milieu ?
IA : Oui ! Ce troisième coup pourrait traverser *toutes* les parts déjà créées.
Combien de parts obtiens-tu maintenant ?
Élève : Deux fois plus ! Donc 8 parts !
IA : Exact. Peux-tu expliquer comment tu t'y es pris ?
Élève : J'ai d'abord fait deux coupes en croix pour avoir 4 parts, puis une coupe horizontale au milieu pour doubler chaque part.
IA : Très bon raisonnement.
Quelles fonctions de ton cerveau as-tu utilisées, à ton avis ?
Élève : J'ai dû imaginer le gâteau en 3D et retenir ce que j'avais déjà coupé... donc ma mémoire et ma tête qui visualise.
IA : Oui : tu as activé ta mémoire de travail (pour garder les étapes), ta flexibilité cognitive (pour changer de point de vue), et ta planification (pour organiser les trois coupes).
C'est exactement ce que les chercheurs appellent les fonctions exécutives.

Extrait du poster « P.R.I.S.M.E. : Penser et relier les espaces de travail à l'ère de l'IA ***vers une modélisation intégrée entre didactique, cognition et éthique de l'intelligence artificielle*** **» (LAVAL, 2025)**
Colloque JETM4

Vers une didactique de l'intelligence artificielle

Au-delà des analyses ponctuelles, PRISME ouvre la voie à ce que l'on peut appeler, de manière encore exploratoire, une didactique de l'intelligence artificielle.

Il ne s'agit pas de constituer un nouveau domaine disciplinaire, mais de désigner un ensemble de problématiques didactiques spécifiques liées à l'introduction de systèmes capables de produire des contenus mathématiques.

Ces problématiques concernent notamment :

- **la conception des tâches,**
- **les formes d'étayage,**
- **les modalités de validation,**
- **et les processus de genèse instrumentale.**

Dans cette perspective, PRISME contribue à l'émergence d'une culture commune entre didactique des mathématiques et intelligence artificielle, fondée sur une approche critique, réflexive et épistémologiquement située.

PRISME dans le continuum du travail mathématique : articulation avec NAIVLE

Enfin, PRISME prend tout son sens lorsqu'il est mis en regard d'autres dispositifs, notamment le projet NAIVLE.

Si PRISME se situe principalement au niveau de l'enseignement scolaire, NAIVLE opère au niveau universitaire, en interrogeant la formalisation du raisonnement et la preuve.

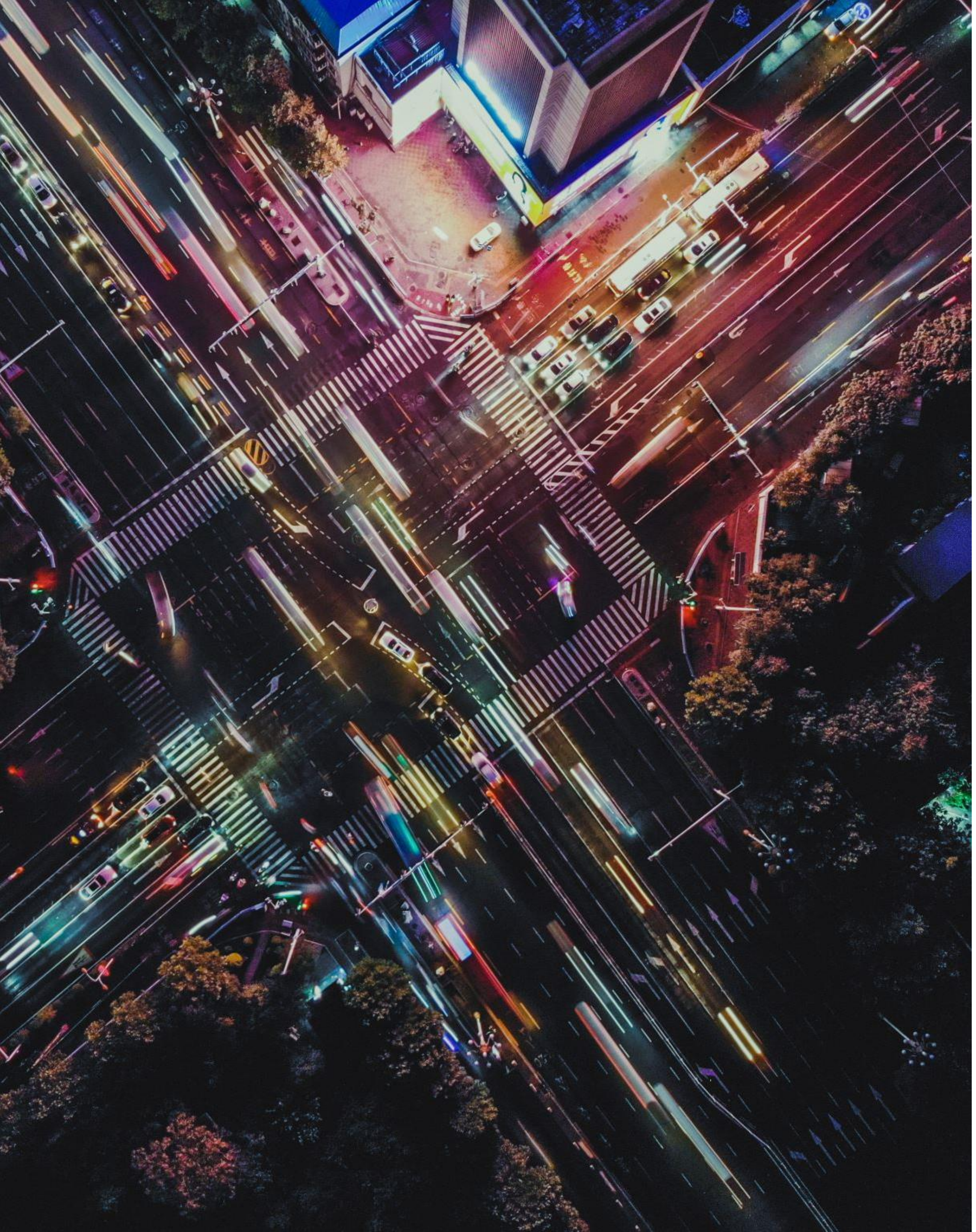
Cette mise en regard met en évidence une continuité épistémologique : les transformations observées à l'école trouvent un prolongement dans les pratiques mathématiques expertes.

Ainsi, PRISME et NAIVLE permettent de penser conjointement les conditions d'un travail mathématique :

- **compréhensible,**
- **validé,**
- **et responsable,**

dans un environnement de plus en plus médié par des systèmes algorithmiques.

PRISME permet de penser ce que devient le travail mathématique lorsque l'on n'est plus seul à produire, mais toujours responsable de valider.



Mise en perspective internationale

Mise en perspective internationale : curriculum, probabilités et travail mathématique médié par l’IA

L’analyse du protocole PRISME ne peut être dissociée des contextes institutionnels dans lesquels s’inscrivent les situations d’enseignement.

Les transformations du travail mathématique induites par l’introduction de l’intelligence artificielle ne se déploient pas dans un espace neutre, mais dans des cadres curriculaires historiquement et culturellement situés.

Dans le cas français, l’introduction récente des probabilités au cycle 3 constitue une évolution significative.

Elle ouvre la possibilité de travailler sur des situations d’incertitude, de modélisation et de simulation, mais pose également des questions nouvelles en termes de conceptualisation et de validation.

À l’inverse, dans le Land de Niedersachsen, le domaine *Daten und Zufall* occupe depuis plusieurs années une place structurante dans le curriculum du primaire.

Les élèves sont progressivement familiarisés avec des situations impliquant le hasard, la collecte de données et l’interprétation de résultats.

Cette différence curriculaire a des conséquences directes sur les formes de travail mathématique mobilisées :

- **en France, ces activités apparaissent comme relativement nouvelles et nécessitent des dispositifs d’accompagnement spécifiques ;**
- **en Niedersachsen, elles s’inscrivent dans une continuité, permettant une structuration plus progressive des concepts.**

Mise en perspective internationale : curriculum, probabilités et travail mathématique médié par l'IA

L'analyse du protocole PRISME ne peut être dissociée des contextes institutionnels dans lesquels s'inscrivent les situations d'enseignement.

Les transformations du travail mathématique induites par l'introduction de l'intelligence artificielle ne se déploient pas dans un espace neutre, mais dans des cadres curriculaires historiquement et culturellement situés.

Dans le cas français, l'introduction récente des probabilités au cycle 3 constitue une évolution significative.

Elle ouvre la possibilité de travailler sur des situations d'incertitude, de modélisation et de simulation, mais pose également des questions nouvelles en termes de conceptualisation et de validation.

À l'inverse, dans le Land de Niedersachsen, le domaine *Daten und Zufall* occupe depuis plusieurs années une place structurante dans le curriculum du primaire.

Les élèves sont progressivement familiarisés avec des situations impliquant le hasard, la collecte de données et l'interprétation de résultats.

Cette différence curriculaire a des conséquences directes sur les formes de travail mathématique mobilisées :

- **en France, ces activités apparaissent comme relativement nouvelles et nécessitent des dispositifs d'accompagnement spécifiques ;**
- **en Niedersachsen, elles s'inscrivent dans une continuité, permettant une structuration plus progressive des concepts.**

Mise en perspective internationale : curriculum, probabilités et travail mathématique médié par l'IA

L'analyse du protocole PRISME ne peut être dissociée des contextes institutionnels dans lesquels s'inscrivent les situations d'enseignement.

Les transformations du travail mathématique induites par l'introduction de l'intelligence artificielle ne se déploient pas dans un espace neutre, mais dans des cadres curriculaires historiquement et culturellement situés.

Dan ive.

Dans ce contexte, l'intégration de l'intelligence artificielle dans les pratiques d'enseignement ne peut être pensée indépendamment de ces cadres.

Les possibilités offertes par l'IA, notamment en termes de simulation, de génération de données ou de visualisation, prennent des significations différentes selon les traditions curriculaires.

Elle mais
pose

À l'i s une
plac

Les nnées
et l'interprétation de résultats.

Cette différence curriculaire a des conséquences directes sur les formes de travail mathématique mobilisées :

- **en France, ces activités apparaissent comme relativement nouvelles et nécessitent des dispositifs d'accompagnement spécifiques ;**
- **en Niedersachsen, elles s'inscrivent dans une continuité, permettant une structuration plus progressive des concepts.**

Mise en perspective internationale : Vers une ingénierie didactique humain–IA au cycle 3 / primaire

La question centrale devient alors celle des conditions de mise en œuvre d'un travail mathématique médié par l'IA dans l'enseignement primaire.

Dans une classe de CM1 ou CM2, comme dans les premières classes du primaire en Niedersachsen, l'IA peut intervenir comme un support de :

- **génération de situations aléatoires ;**
- **simulation de phénomènes ;**
- **explicitation de démarches.**

Cependant, cette intervention nécessite un cadre didactique rigoureux. En particulier, il convient de veiller à ce que l'élève ne se contente pas de recevoir des résultats, mais soit engagé dans une activité de :

- **formulation de questions,**
- **interprétation des productions,**
- **et validation des résultats.**

Ainsi, un travail humain–IA au primaire ne consiste pas à déléguer la résolution de problèmes à un système, mais à organiser des situations dans lesquelles l'IA devient un instrument de médiation, soumis à un contrôle par l'élève et l'enseignant.

Mise en perspective internationale : Une lecture articulée avec la situation de modélisation

Dans cette perspective, la situation de modélisation présentée précédemment (parade nuptiale) peut être interprétée comme un prolongement de ces enjeux à un niveau plus avancé.

Elle illustre comment des outils issus de l'algorithmique et de la modélisation peuvent être mobilisés dans un cadre de collaboration humain–IA, tout en maintenant un contrôle sur les significations mathématiques.

Ainsi, l'articulation entre PRISME, la comparaison internationale et la situation de modélisation permet de penser un continuum du travail mathématique, du primaire à l'enseignement supérieur, dans un environnement médié par l'IA.

Les transformations du travail mathématique liées à l'IA ne sont pas universelles. Elles dépendent des cadres curriculaires dans lesquels elles s'inscrivent.

Usages « faible » et « fort » de l'IA en mathématiques

L'IA ne donne pas une réponse, elle diffracte le problème en plusieurs possibles, ce qui rend nécessaire un travail de reconstruction et de validation.

De l’illustration des limites à l’instrumentation du contrôle : deux usages de l’IA en mathématiques

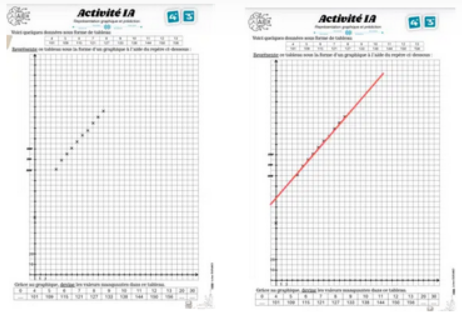
Point de départ : une situation didactique ordinaire, un enjeu contemporain

Ci-contre (*), le texte proposé par Julien Durand présente une situation didactique simple, mais conceptuellement très riche.

Les élèves reçoivent un tableau de données numériques sans indication de contexte.

Ils sont invités à représenter ces données graphiquement, puis à compléter certaines valeurs manquantes.

Les points obtenus sont quasi-alignés, ce qui conduit naturellement les élèves à tracer une droite et à extrapoler.



« Comment faire comprendre aux élèves le lien entre une modélisation mathématique et la prédiction statistique d’un Large Language Model (LLM) ? », interroge Julien Durand, enseignant de mathématiques.

Il propose une activité qui explore les limites de l’intelligence artificielle. Ce travail met en évidence ses « hallucinations » face au bon sens. Concrètement, les élèves reçoivent un tableau de données sans contexte. Ils tracent un graphique et complètent des valeurs manquantes. Les points semblent presque alignés, ce qui incite à tracer une droite.

Les élèves extrapolent alors de façon automatique. Sans contexte humain, le modèle devient absurde. Ils obtiennent des tailles irréalistes à l’âge adulte. La confrontation avec la réalité permet de comprendre l’erreur. Les élèves apprennent ainsi à questionner leurs modèles et ceux de l’IA.

« En confrontant leurs propres erreurs à celles de la machine, les élèves comprennent que la mathématique est un outil de compréhension du monde, et non une simple manipulation de symboles. Pour ne pas « halluciner » comme une IA, il faut garder les yeux ouverts sur le réel ! », souligne l’enseignant.

(*) Source : https://www.cafepedagogique.net/2026/03/31/maths-quand-les-modeles-se-trompent-ou-comprendre-les-limites-de-lia/ (Consulté le 02/04/2026)

Usages « faible » et « fort » de l'IA en mathématiques

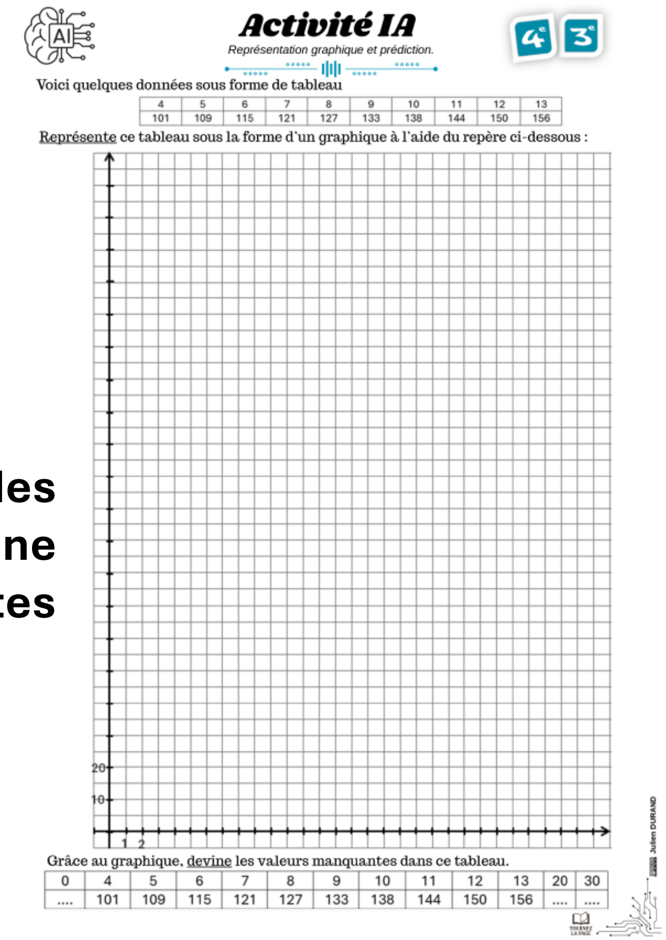
De l'illustration des limites à l'instrumentation du contrôle : deux usages de l'IA en mathématiques

Point de départ : une situation didactique ordinaire, un enjeu contemporain

Ce comportement est mathématiquement cohérent du point de vue technique.

Il correspond à une pratique classique de modélisation fondée sur l'identification d'une régularité locale.

Cependant, cette extrapolation conduit à des résultats manifestement absurdes, comme une taille humaine dépassant largement les limites physiologiques.



Activité IA

Représentation graphique et prédiction.

4e 3e

Voici quelques données sous forme de tableau

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
101	109	115	121	127	133	138	144	150	156

Représente ce tableau sous la forme d'un graphique à l'aide du repère ci-dessous :

Grâce au graphique, devine les valeurs manquantes dans ce tableau.

0	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	20	30
....	101	109	115	121	127	133	138	144	150	156	....	....

Julien DURAND

TOURNEZ LA PAGE

Activité IA

Représentation graphique et prédiction.

4e 3e

Voici d'où proviennent les données du tableau initial.

Compare avec ce que tu as prédit :

Ta prédiction est-elle réaliste ? Pourquoi ?

A retenir...

Les LLM (Large Language Model, comme ChatGPT, Gemini...) font exactement la même chose que vous : elle observe des données, repère une tendance, et essaie de prédire ce qui manque.

Mais si on lui demande une valeur en dehors des données qu'elle connaît, elle extrapole... et peut se tromper lourdement si le contexte ou l'entrainement sont insuffisants, on appelle cela une hallucination.

C'est ce que vous venez d'observer : sans information supplémentaire, même un modèle raisonnable peut produire une estimation complètement fausse.

Julien DURAND

Source : https://mathix.org/linux/archives/22174 (Consulté le 02/04/2026)

De l'illustration des limites à l'instrumentation du contrôle : deux usages de l'IA en mathématiques

Le rôle du contexte : du modèle à l'absurde

La situation repose sur un élément essentiel : le contexte réel est volontairement caché aux élèves.

Les données correspondent en réalité à la croissance d'un enfant entre 4 et 13 ans (Cf. ci-contre) .

Sans cette information, les élèves appliquent un modèle linéaire au-delà de son domaine de validité.

Ce phénomène met en évidence une propriété fondamentale de la modélisation :

Un modèle mathématique n'est pas intrinsèquement vrai.
Il est conditionné par un domaine de validité et un contexte d'interprétation.

La confrontation avec la réalité permet alors un basculement :

de la production de résultats vers leur mise en question

De l’illustration des limites à l’instrumentation du contrôle : deux usages de l’IA en mathématiques

Une analogie directe avec les LLM (Large Language Model)

L’intérêt majeur de cette activité réside dans l’analogie qu’elle permet d’établir avec le fonctionnement des modèles de langage.

Comme les élèves, un LLM :

- **observe des régularités dans des données**
- **construit une forme de cohérence statistique**
- **produit des résultats plausibles**

Mais, en l’absence de contexte suffisant, il peut produire des réponses incorrectes, voire absurdes.

Ce phénomène est désigné sous le terme d’« hallucination ».

Ainsi, l’élève et l’IA adoptent ici un comportement structurellement analogue :

ils prolongent un modèle local sans en interroger les conditions de validité.

De l’illustration des limites à l’instrumentation du contrôle : deux usages de l’IA en mathématiques

Une tension fondamentale : produire ou valider

Cette situation met en évidence une tension centrale du travail mathématique contemporain :

la dissociation entre production et validation.

Dans un cadre classique, produire une réponse constitue déjà une part essentielle de l’activité.

Dans un environnement instrumenté par l’IA, cette production peut être largement facilitée, voire externalisée.

En revanche, la validation ne peut être déléguée.

Elle suppose :

- **une interprétation des résultats**
- **une mise en relation avec le réel**
- **une capacité à identifier les limites du modèle**

De l'illustration des limites à l'instrumentation du contrôle : deux usages de l'IA en mathématiques

Lecture en termes d'ETA et d'ETDIA

Dans le cadre des Espaces de Travail Algorithmique (ETA), l'activité des élèves apparaît comme une mobilisation légitime d'une technique :

- **représentation graphique**
- **identification d'une tendance**
- **extrapolation**

Cependant, l'introduction implicite d'un comportement analogue à celui d'un LLM permet de faire émerger une nouvelle configuration, relevant d'un Espace de Travail Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA).

Dans cet espace :

- **la production devient facilement accessible**
- **les résultats sont plausibles mais incertains**
- **la validation devient une activité centrale**

De l'illustration des limites à l'instrumentation du contrôle : deux usages de l'IA en mathématiques

Usages « faible » et « fort » de l'IA

Cette analyse permet de distinguer deux types d'usages de l'intelligence artificielle en mathématiques.

Un usage « faible » consiste à utiliser l'IA comme un outil de production :

- **génération de réponses**
- **complétion de calculs**
- **suggestion de modèles**

Dans ce cas, l'IA est essentiellement mobilisée pour accélérer ou faciliter l'activité.

En revanche, un usage « fort » consiste à utiliser l'IA comme un objet d'analyse :

- **mise en évidence de ses limites**
- **comparaison avec les raisonnements humains**
- **développement du contrôle épistémique**

Dans ce second cas, l'IA devient un instrument didactique permettant de penser le travail mathématique lui-même.

De l'illustration des limites à l'instrumentation du contrôle : deux usages de l'IA en mathématiques

Vers un déplacement du travail mathématique

Cette situation illustre de manière particulièrement claire le déplacement analysé dans l'ensemble de cette présentation.

Le travail mathématique ne disparaît pas.

Il se transforme.

Il ne consiste plus seulement à produire des résultats, mais à :

- **les interpréter**
- **les valider**
- **les inscrire dans un cadre de cohérence**

Ainsi, l'enjeu central devient le maintien d'un contrôle épistémique sur des productions dont l'origine peut être humaine ou algorithmique.

Conclusion

Conclusion

L'introduction de l'intelligence artificielle générative dans l'enseignement des mathématiques ne se réduit pas à une transformation instrumentale. Elle engage une recomposition plus profonde des formes du travail mathématique, en modifiant les équilibres entre production, structuration et validation.

Les analyses proposées dans cette présentation, qu'il s'agisse des dispositifs de formalisation comme NAIVLE, des situations didactiques étudiées dans PRISME, ou encore des exemples de modélisation issus d'une collaboration humain–IA, convergent vers un même constat : la production des objets mathématiques peut désormais être partiellement externalisée, tandis que les exigences de validation, d'interprétation et de mise en cohérence deviennent centrales.

Ce déplacement confère au contrôle épistémique un rôle structurant. Le travail mathématique tend ainsi à se redéfinir moins comme une activité de production que comme une activité de jugement, d'évaluation et de compréhension des objets produits.

Conclusion

Dans ce contexte, les cadres théoriques de la didactique des mathématiques sont appelés à évoluer.

La notion d'Espace de Travail Didactique instrumenté par l'IA (ETDIA) constitue une première tentative pour modéliser ces nouvelles configurations, en prenant en compte l'intervention de systèmes capables de produire des contenus mathématiques.

Plus largement, ces transformations invitent à reconsidérer les finalités de l'enseignement des mathématiques.

Dans un environnement où la production de réponses peut être en partie automatisée, l'enjeu se déplace vers :

- **la compréhension des concepts,**
- **l'interprétation des résultats,**
- **et la capacité à exercer un contrôle critique sur les productions.**

Ainsi, l'intelligence artificielle ne conduit pas à une diminution du travail mathématique, mais à une transformation de sa nature.

Elle ouvre un champ de réflexion nouveau, au croisement de la didactique, de l'algorithmique et de l'épistémologie, dans lequel se redéfinissent les conditions d'un savoir à la fois compréhensible, valide et responsable.

Bibliographie indicative

Didactique, algorithmique, IA et modélisation

➔ Les références suivantes structurent les cadres théoriques, empiriques et épistémologiques mobilisés dans cette présentation.

Bibliographie indicative

Cadres théoriques en didactique des mathématiques

Espaces de travail mathématique (ETM)

Kuzniak A. (2011) L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9–24.

Kuzniak A., & Richard P. (2014) Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. Relime, 17(4.1), 17–26.

Didactique des mathématiques

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–266.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Validation et preuve

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147–176.

Bibliographie indicative

Algorithmique et pensée computationnelle

Fondements de l'algorithmique

Denning, P. J. (2017). *Remaining trouble spots with computational thinking*. Communications of the ACM.

Knuth, D. E. (1973). *The art of computer programming: Volume 1: Fundamental algorithms* (2nd ed.). Addison-Wesley.

Pensée computationnelle

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books.

Wing, J. M. (2006). *Computational thinking*. Communications of the ACM, 49(3), 33–35.

Cadres développés

Lagrange J.-B. & Laval D. (2019) Connected Working Spaces: the case of computer programming in mathematics education. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02418181

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques* (Doctoral dissertation, Université Sorbonne Paris Cité).

Laval, D. (2021). Les espaces de travail mathématique et algorithmique connectés. Étude d'une activité algorithmique comme objet d'apprentissage de savoirs spécifiques et d'usage : Cas d'une ingénierie « dichotomie continue ». In A. Chesnais & H. Sabra (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020* (pp. 88–114). IREM de Paris – Université de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03545511/

Minh T. K., Lagrange J.B. (2016) Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. ZDM Mathematics Education. 48: 793. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z

Bibliographie indicative

Intelligence artificielle, preuve et didactique

IA en éducation

Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial Intelligence in Education*. Center for Curriculum Redesign.

Luckin, R., Holmes, W., Griffiths, M., & Forcier, L. B. (2016). *Intelligence unleashed: An argument for AI in education*. Pearson.

Approches critiques

Bender, E. M., Gebru, T., McMillan-Major, A., & Shmitchell, S. (2021). *On the Dangers of Stochastic Parrots: Can Language Models Be Too Big?* Proceedings of the 2021 ACM Conference on Fairness, Accountability, and Transparency (FAccT).

Selwyn, N. (2019). *Should robots replace teachers? AI and the Future of Education*. (1st ed.) Polity Press.

Terrains et cadres développés

Laval, D. (A paraître). *PRISME : penser et relier les espaces de travail à l'ère de l'intelligence artificielle. Vers une modélisation intégrée du travail mathématique entre didactique, cognition et éthique.* Actes des JETM 4 (2025).

Ueberberg, J. & Laval (en cours) — NAIVLE

Espace de Travail Didactique instrumenté par l'intelligence artificielle (ETDIA) (en cours de formalisation)

Bibliographie indicative

Modélisation, graphes et situations didactiques

Représentations

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37–65.

Graphes, matrices et probabilités

Godsil, C., & Royle, G. (2001). *Algebraic Graph Theory*. Springer.

Grinstead, C.M. and Snell, J.L. (1997). Introduction to Probability. 2nd Revised Edition, American Mathematical Society, Providence, RI, 269-270.

Situations didactiques et IA

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14*(1), 9–42.

Durand, J. (2026). Maths : quand les modèles se trompent ou comprendre les limites de l'IA. Café pédagogique. https://www.cafepedagogique.net/2026/03/31/maths-quand-les-modeles-se-trompent-ou-comprendre-les-limites-de-lia/

Sitographie : https://mathix.org/linux/

Bibliographie indicative

Fonctions exécutives et fonctions cognitives

Borst, G. (2021). Contrôle exécutif, cerveau et apprentissages scolaires. Dans A. Roy, Les fonctions exécutives de l'enfant (51-59). Deboeck.

Diamond, A. (2013). Executive functions. *Annual Review of Psychology*, 64, 135–168.

Fayol, M., & Houdé, O. (2014). *Psychologie cognitive des apprentissages*. Paris : Presses Universitaires de France.

Houdé, O. (2014). *La psychologie du raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.

Epistémologie des sciences

Popper, K. R. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Paris : Payot.

Philosophie de la technique

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Simondon, G. (1958). *Du mode d'existence des objets techniques*. Paris : Aubier.

Ethique et IA

Jonas, H. (1990). *Le principe responsabilité*. Paris : Flammarion.

Misselhorn, C. (2022). *Grundfragen der Maschinenethik*. Stuttgart: Reclam, Universal-Bibliothek.

Bibliographie indicative

Terrains de recherche mobilisés

NAIVLE (niveau universitaire) – Formalisation des preuves ; validation explicite ; collaboration franco-allemande

Laval & Ueberberg (2026). Unvollständigkeit, Formalisierung und epistemische Verantwortung – Von der Analyse mathematischer Arbeit zu den Algorithmischen Arbeitsräumen: der Naivle-Rahmen. (A paraître fin 2026, début 2027)

Ueberberg, J. (2026). *Naivle: A Proof Verification System for Textbook-Style Mathematics.* Non publié.

PRISME (niveau scolaire) – Transformation du travail mathématique ; IA en didactique ; cycles 1 à 3

Laval, D. (2026). PRISME : un protocole de recherche sur l'enseignement des mathématiques aux cycles 1 à 3, avec une analyse des transformations du travail mathématique au cycle 3 face à l'IA. Communication orale Colloque COPIRELEM, Juin 2026.

Merci pour votre écoute et votre patience.

Thank you for your attention and your patience.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Ihre Geduld.