Introduction de la notion de paramètre au lycée
avec un logiciel de géométrie dynamique ou une calculatrice graphique

Dans nos recherches en didactique des mathématiques, nous abordons la question des apprentissages des élèves en classe par l'intermédiaire des activités mathématiques qui leurs sont proposées. L'enseignement d'un contenu donné va alors être caractérisé en relation avec ces activités : nous analysons tout ce qui peut contribuer à définir les activités proposées aux élèves, c'est-à-dire les contenus mathématiques en jeu, leur organisation, les tâches proposées aux élèves mais aussi les déroulements organisés et, de ce fait, les discours des enseignants qui modulent ces activités[1].

Dans cette contribution, nous souhaitons rendre compte des réflexions du groupe IREM de Paris 7 sur l'introduction de la notion de paramètre auprès des élèves, à partir de la classe de seconde, en utilisant les potentialités des outils informatiques, et dans l'objectif de préparer ces élèves à la nouvelle épreuve expérimentale au baccalauréat.

La notion de paramètre est importante du point de vue de l'expérimentation en mathématique et revient sur le devant de la scène dans les activités mathématiques des élèves lorsque ceux-ci travaillent sur les logiciels de géométrie dynamique notamment : chaque déplacement de figure où un certain nombre de propriétés sont conservées correspond plus ou moins à un pilotage de paramètres et ne pas affronter ouvertement cette notion correspondrait essentiellement à utiliser des logiciels de géométrie dynamique sans exploiter les possibilités de déplacement.

Cette notion de paramètre n'est cependant pas une notion facile d'accès pour les élèves, dont certains parfois sont à peine passés en classe de seconde de démarches arithmétiques pour la résolution d'exercices à des démarches algébriques. C'est une notion qui à la fois généralise ce que les élèves ont déjà à leur disposition, unifie ce qui jusque là pouvait être traité indépendamment et enfin formalise différemment ce que les élèves savent déjà faire de façon réduite : il y a en effet un « accident » entre le maniement des lettres désignant des variables dans les expressions et le maniement des lettres désignant les paramètres dans ces mêmes expressions. La potentialité des logiciels de géométrie dynamique pour l'acquisition de cette notion de paramètre réside en particulier dans ce que les gestes (manipulations) associés au pilotage des paramètres ne sont généralement pas les mêmes que ceux associés au pilotage des variables algébriques usuelles. Par exemple, dans le logiciel géogébra, le déplacement d'un point sur une courbe définie par une fonction $x \lozenge f(x)$ est lié au pilotage de la variable indépendante x tandis que le pilotage des paramètres dont peut éventuellement dépendre la fonction f se fait par le déplacement d'un curseur clairement identifié.

La prise en main des fonctionnalités des logiciels, par exemple celle du curseur dans géogébra, doit donc être « orchestrée » par le professeur et articulée avec l'appropriation par les élèves de la notion de paramètre. D'un autre point de vue, cela signifie que cette prise en main des fonctionnalités du logiciel (associées à la notion visée de paramètre) n'est pas une

[1] En ce qui concerne le lien entre les enseignements et les apprentissages, nous reconnaissons l'apport des grandes théories de l'apprentissage, et particulièrement celles de Piaget et Vygotski, qui précisent des conditions favorables à l'acquisition des connaissances. Mais nous les spécifions aux mathématiques, aux grands types de notions à enseigner, aux situations scolaires…

perte de temps didactique dans la classe puisqu'elle permet justement l'appropriation de cette notion par les élèves dans un processus de genèse instrumentale.

Par ailleurs, l'objectif de la préparation de ces mêmes élèves à l'épreuve expérimentale au baccalauréat suppose l'accession à un certain degré d'autonomie des élèves, c'est-à-dire à nos yeux que ces élèves doivent être en mesure de mettre correctement en fonctionnement des connaissances mathématiques, appelées non nécessairement de façon explicite[2], dans des applications non nécessairement immédiates[3]. Les réflexions dans notre groupe ont amené à un certain nombre de conditions nécessaires pour garantir un esprit de l'épreuve expérimentale qui ne soit pas dénaturé et qui permettent notamment une activité expérimentale intégrant les technologies et intéressante pour les élèves :
- des sujets épurés, facilement compréhensibles et appropriables par tous pour permettre la mise en activité de chacun des élèves, sans une aide préalable et dès le début des observateurs ;
- une conjecture qui dans ces sujets ne s'impose pas d'elle-même ou du moins qui ne peut-être que partiellement mise en évidence par l'exploration sur le logiciel, et donc qui appelle un travail papier crayon pour être complétée ;
- enfin un travail exploratoire et un travail dans l'environnement papier-crayon qui se renvoient l'un l'autre au sens où la partie exploratoire guide pour prouver en papier crayon la conjecture et la compléter et où, en retour, le résultat du travail en papier crayon peut être validé par une vérification sur le logiciel.

Ces trois conditions ne sont bien sûr pas garantes à elles seules d'activité mathématique de type expérimentale chez les élèves (traduire, introduire, interpréter, changer de cadre/registre/point de vue…) mais aident à s'en approcher. Comme nous l'avons signalé dès le début de cette contribution, le déroulement des séances en classes ou des épreuves proprement dites, et notamment le discours des enseignants ou des évaluateurs modulent les activités proposées par les sujets, généralement dans le sens d'un appauvrissement de ces activités.

Dans les exemples que nous allons proposer ci-dessous, nous avons essayé d'adapter des sujets de la banque 2007, au niveau des classes de seconde, première, et terminale. Ces sujets mettent ouvertement en jeu la notion de paramètre, dès la classe de seconde. Nous avons essayé de faire des propositions organisées pour comprendre comment peut se jouer l'orchestration par le professeur des genèses instrumentales des élèves, c'est-à-dire la prise en main progressive des fonctionnalités des logiciels associées à l'appropriation de la notion de paramètre. Enfin, nous avons essayé de progresser vers des sujets qui remplissent les conditions que nous avons énoncées plus haut et qui sont pour nous garantes d'une activité mathématique de type expérimentale chez les élèves. La question de l'évaluation de cette activité, et notamment de l'articulation de cette évaluation avec le discours des enseignants et des observateurs qui la modulent est repoussée dans un autre texte, bien qu'importante.

1) En classe de seconde et/ou de première

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$ suivant les valeurs du réel a.

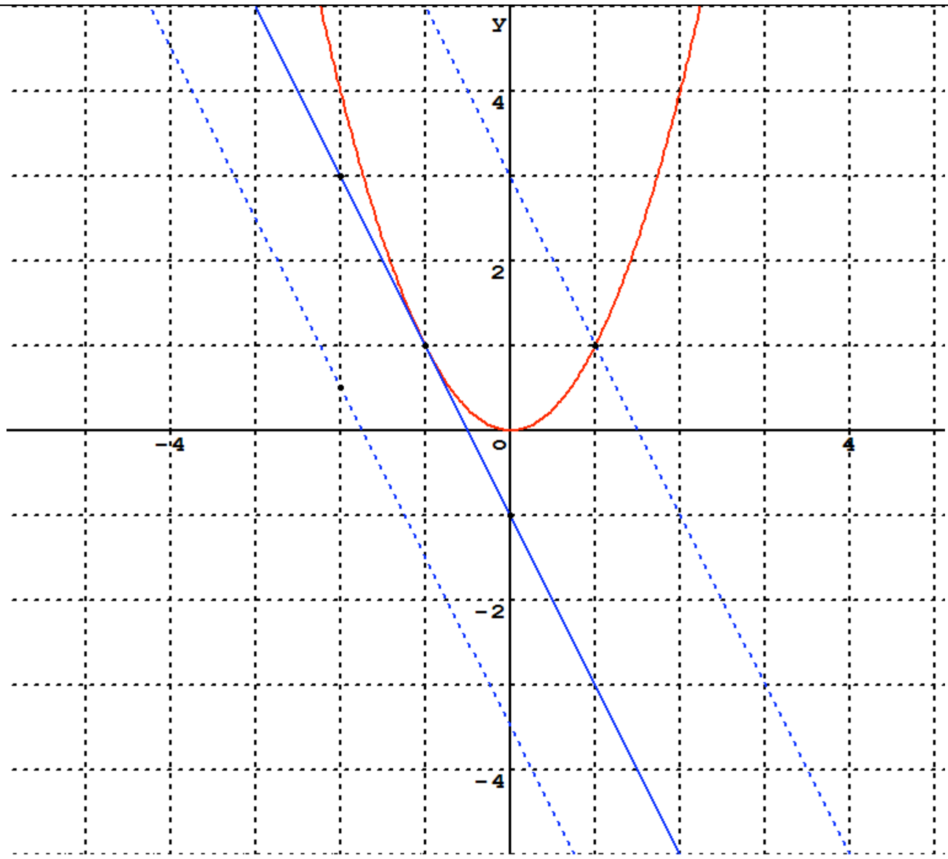
[2] On dit que les connaissances doivent être disponibles
[3] C'est-à-dire qu'il peut y avoir des adaptations de ces connaissances à apporter avant des les appliquer.

1. Ouvrir le logiciel Geogebra.
2. Entrer dans la ligne de saisie f(x) = x^2 puis valider.
3. Cliquer sur le triangle en bas à droite de l'icône  et choisir Curseur puis cliquer dans la feuille de calcul, enfin cliquer sur Appliquer dans la boîte de dialogue. Un curseur symbolisant un nombre a que l'on peut faire varier, est créé.
4. Entrer dans la ligne de saisie g(x) =2 x + a puis valider.
5. Cliquer sur l'icône  puis approcher la souris du curseur a pour le déplacer. **Expliquer pourquoi les droites représentant la fonction g restent parallèles entre elles**.
6. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$ suivant les valeurs de a.
7. Démontrer par le calcul que, si $a = -1$, l'équation admet une unique solution. Donner cette solution **puis la vérifier sur le graphique**.
8. Démontrer que pour tout réel x, $x^2 - 2x - a = (x-1)^2 - a - 1$.
9. En déduire que si $a < -1$, l'équation $x^2 = 2x + a$ n'admet aucune solution.
10. Déterminer les deux solutions de l'équation quand a plus grand que -1.

La prise en main du curseur est assurée par un guidage assez précis des actions des élèves, notamment des représentations des icônes à utiliser. L'instrumentation progressive de la notion de paramètre est gérée par le fait
- que le sujet demande aux élèves de justifier pourquoi le déplacement du curseur a donne à voir des droites qui restent parallèles, pour que le déplacement de ce curseur ne soit pas seulement un jeu de manipulation logicielle ;
- que les valeurs des solutions trouvées dans l'environnement papier-crayon doivent être vérifiées dans l'environnement logiciel à la question 7, ce qui est également attendu dans les questions 9 et 10 mais n'est pas explicitement demandé.
- à la question 10, il doit y avoir une gestion simultanée des variables et du paramètre, ce qui correspond à des manipulations ou observations différentes sur le logiciel au niveau des conjectures ou vérifications.
Dans cette dernière question, la manipulation du curseur donne à voir qu'il y a bien deux solutions lorsque a est plus grand que -1 mais ne permet pas de comprendre pourquoi algébriquement cette valeur -1 est discriminante, ni de trouver déterminer les valeurs de deux solutions comme le demande l'énoncé. Elle appelle donc un travail en papier-crayon qui n'est pas indiqué explicitement. Le retour sur logiciel permet par contre des vérifications (feedbacks) qui peuvent indiquer à l'élève si sa réponse est correcte ou non.

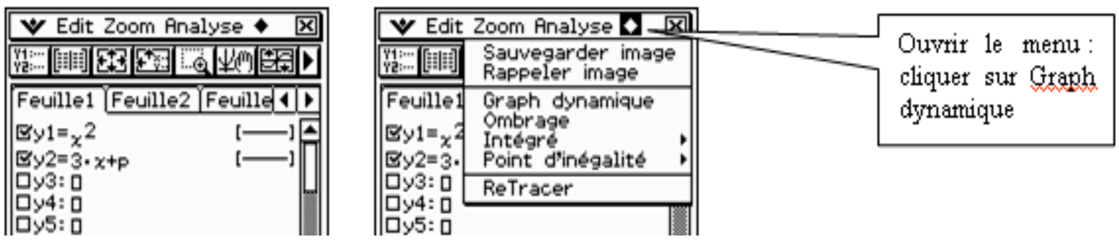
POSITION D'UNE DROITE PAR RAPPORT À UNE PARABOLE

Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère la parabole P d'équation $y = x^2$
1) On considère également la droite D d'équation $y = -2x - 1$.



a) Déterminer les coordonnées du point commun à P et D.
b) A l'aide de la figure ci-dessus, donner l'équation réduite d'une droite D', parallèle à D et n'ayant aucun point commun avec P. Vérifiez algébriquement.

2) On considère maintenant les droites d'équation : $y=3x+ p$ où p est un nombre réel quelconque.
Visualisation graphique



A la place de b mettre p en utilisant le Keyboard.

Dans cette boîte de dialogue :
On choisit de faire varier le paramètre *p* entre les valeurs – 3 et 3 avec un incrément de 1, et en mode manuel.

Dès qu'on a validé cette boîte, le tracé est effectué (avec la valeur initiale $p = -3$). On modifie la valeur du paramètre *p* (donc le tracé de la droite) par des appuis sur les touches de déplacement vertical.

a) **Indiquer une propriété commune à toutes ces droites.**
b) Déterminer **graphiquement et par le calcul** la valeur de *p* pour que la droite correspondante ait un seul point commun avec P.

On dit que la droite obtenue est tangente à P.

3) On considère enfin toutes les droites passant par le point A (-3,4) sauf celle d'équation $x=-3$.
a) Expliquer pourquoi leur équation est de la forme : $y = m(x + 3) + 4$.
b) Déterminer en fonction de *m* le nombre d'intersections de ces droites avec P. En particulier, déterminer les deux valeurs de *m* correspondantes aux deux droites passant par A et tangentes à P.

Dans ce deuxième énoncé, plus spécifique de la classe de première S, la prise en main de la calculatrice est aussi assurée par un guidage précis des actions des élèves. L'instrumentation progressive de la notion de paramètre est ici gérée par le fait
- que le sujet demande aux élèves de donner une propriété commune aux droites paramétrées (même idée que dans le sujet précédent : les actions sur le paramètre dans le logiciel doivent pouvoir être interprétées mathématiquement par les élèves).

- que les élèves doivent apprendre à piloter le pas du paramètre pour trouver graphiquement la valeur décimale exacte attendue. Les boites de dialogue les aident pour ce pilotage. On peut engager un travail explicite sur le concept de nombre réel en choisissant la situation pour que la valeur de *p* soit irrationnelle. Alors comme dans le sujet précédent les élèves ne peuvent que conjecturer une valeur approchée de *p* et doivent d'eux même passer dans l'environnement papier-crayon pour trouver la valeur exacte. La question de l'énoncé doit alors être

b) Déterminer la valeur de p pour que la droite correspondante ait un seul point commun avec P

La question 3) est complémentaire et ne doit être envisagée que si les élèves sont assez forts ou assez avancés. En effet, la notion de paramètre doit déjà être maîtrisée pour que les élèves puissent d'eux même transformer l'information graphique « toutes les droites passant par A(-3,4) » en information algébrique « équation paramétrée par un paramètre *m* ». Les valeurs de *m* attendues sont irrationnelles ce qui oblige à chercher dans l'environnement papier-crayon et à vérifier sur la calculatrice.

On donne enfin pour la classe de seconde ou même de première S un sujet plus proche de ce que l'on peut attendre des élèves lors de l'épreuve de baccalauréat. Le choix est laissé d'utiliser l'un des deux outils précédents (géogébra par exemple comme logiciel de construction graphique).

On se donne un paramètre réel *k*.
On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $-x+3 = k / x$ pour x strictement positif.
1) En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique
a) conjecturer, suivant les valeurs du paramètre *k*, le nombre de solutions de l'équation (E).
Appelez l'examinateur pour valider la conjecture
b) Si $k > 0$, déterminez graphiquement une valeur approchée à deux décimales pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.
Appelez l'examinateur pour valider votre réponse
2) Démontrez vos résultats et calculez les solutions de (E) en fonction du paramètre *k*.

Les élèves doivent mobiliser d'eux même le curseur de géogébra ou le menu adéquate de la calculatrice pour créer un paramètre réel *k*. Sur le plan mathématique, ils doivent transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes mais ce changement de cadre de travail (algébrique ⇓ ◊ graphique) doit avoir été travaillé dans des TP antérieurs (par exemple le premier exemple plus haut où ce changement de cadre est mieux pris en charge par l'énoncé). Le travail antérieur de la notion de paramètre, associé au maniement des logiciels, doit avoir permis aux élèves de distinguer correctement les paramètres des solutions de l'équation paramétrée. Le travail sur le logiciel permet aussi d'approcher la valeur de *k* pour laquelle le nombre de solution de l'équation change (0, 1 ou 2) mais ne permet pas aux élèves d'affirmer que cette valeur trouvée graphiquement est la bonne. Ils doivent donc travailler dans l'environnement papier-crayon pour retrouver cette valeur de *k*. Enfin, le travail sur logiciel ne permet pas de trouver les valeurs des solutions et donc nécessite de poursuivre le travail en papier crayon. Mais à chaque moment, les allers retours entre environnements permettent à l'élève de conforter ses propositions et de progresser.

2) En classe de terminale

On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx$? pour x strictement positif.

1. Ouvrir le logiciel Geogebra.
2. Dans le champ de saisie en bas, définir f(x)= ln(x) et valider.
3. Entrer $k = 1$ dans la zone de saisie puis valider. Ce nombre apparaît dans la fenêtre Algèbre. Dans le champ de saisie en bas, définir maintenant $g(x) = kx$?.
4. Pour faire varier le paramètre k, cliquer avec le bouton droit sur ce nombre et cocher Afficher l'objet. Un curseur apparaît. Cliquer sur l'icône  pour se mettre en mode Déplacer puis déplacer le curseur à la souris.
5. Conjecturer suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$?.

Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

6. Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k à deux chiffres après la virgule pour laquelle l'équation admet une seule solution (on pourra faire un clic droit sur k puis dans Propriétés, Curseur, réduire l'incrément à condition de réduire aussi l'intervalle).

Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

7. Démontrer sur feuille que, pour tout réel $k < 0$, l'équation $\ln(x) = kx$? admet une unique solution.

Les tangentes à la fonction exponentielle possèdent une propriété remarquable : si on prend A un point de la courbe représentative de exp, qu'on considère la tangente à la courbe en A et l'intersection B de cette tangente avec l'axe des abscisses, la différence entre l'abscisse de A et celle de B est toujours la même.
1) Vérifier à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique que cette propriété est bien vraie.
On se donne maintenant un paramètre réel *k.*
2) Vérifier que la propriété reste vraie si on prend la courbe représentative de la fonction qui à x associe exp(kx)
3) Justifier le résultat par un calcul mathématique et déterminer la valeur de cette distance en fonction du paramètre k.

Dans cette séance, on utilisera le logiciel Géogébra. Des aides sont données ci-dessous.

Pour la question 3), on devra
- trouver l'équation de la tangente en un point A d'abscisse xA de la courbe représentative de exp
- trouver en fonction de xA les coordonnées de l'abscisse xB de l'intersection B de cette tangente avec l'axe des abscisses

On note C la courbe représentative de la fonction *exp* dans un repère orthonormal du plan.
1) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, dire si les propositions suivantes

semblent vraies ou fausses :

- la courbe C est dessus de la droite d'équation y=x ;
- pour tout réel x, on a exp(x) > 3x ;
- la droite y =(3e/2) x intercepte la courbe C en deux points distincts ;
- il existe une droite passant par l'origine et tangente à la courbe C.

Appeler le professeur pour vérifier vos réponses.

On se donne maintenant un paramètre réel k. On s'intéresse à la position relative de la courbe C et de la droite d'équation $y=kx$.

2) Conjecturer suivant les valeurs du paramètre réel k la position relative de la courbe C et de la droite d'équation $y=kx$.

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

3) Justifier sur votre feuille ces conjectures.

Aides techniques avec Géoplan

Pour créer un paramètre

- Créer / Numérique / Variable réelle libre dans un intervalle

Pour faire varier un paramètre avec les touches du clavier ↑↓

- Piloter / Piloter au clavier et sélectionner le paramètre à piloter

Pour faire afficher la valeur d'un paramètre déjà créé

- Créer / Affichage / Variable numérique déjà définie

Aides techniques avec Géogébra

Pour créer un paramètre

- 6ème icône en partant de la gauche

Pour faire varier un paramètre avec les touches du clavier ↑↓

- 1ère icône à gauche

TP type BAC sur logiciel de géométrie

On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx$? pour x strictement positif.

1) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

2) Justifier sur votre feuille ces conjectures.