

Traces Ecrites d'élèves

Maryvonne MERRI

Roland POUGET

Analyse des traces écrites de la résolution de problèmes d'élèves de collège et de lycée : l'entrée dans l'algèbre

Roland Pouget

Formateur de mathématiques

I.U.F.M. de Midi-Pyrénées

roland.pouget@toulouse.iufm.fr

Maryvonne Merri

Maître de conférence de psychologie

Ecole Nationale de Formation Agronomique

maryvonne.merri@educagri.fr

1. Présentation du dispositif de recherche et questions posées dans cet atelier

La question de ce que les mathématiciens appellent le « linéaire », les psychologues « les structures multiplicatives » et les anciens « la fausse position », « la règle de trois », « la croix des mélanges »... est une question centrale de tout enseignement des mathématiques. La manipulation stabilisée de techniques linéaires algébriques signe un niveau de culture mathématique.

L'enseignement des problèmes relatifs à ce domaine, des diverses techniques mathématiques pour l'attaque des problèmes et des théories correspondantes commence au cycle 2 de l'école élémentaire avec les premiers problèmes de multiplication. Elle se poursuit jusqu'à l'université avec l'algèbre linéaire, mais encore, par exemple, avec les études de régression et l'analyse factorielle.

Notre équipe de recherche² a centré son activité sur trois objets :

a) La conception d'une banque de **problèmes pour l'étude des problèmes linéaires**.

Un dispositif multimédia destiné à l'étude de classes de problèmes linéaires est actuellement maqueté. L'élève étudie de manière autonome une classe de problèmes et a

² Ce projet engage des chercheurs de quatre institutions :

-L'Institut Universitaire de Formation des Maîtres d'Aix-Marseille (Serge AGOSTINELLI, Maître de Conférence (S.I.C.) et Floriane WOSNIAK, Professeur-Formateur de Mathématiques)

-L'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Midi-Pyrénées (Roland POUGET, Professeur-Formateur de Mathématiques)

-L'École Nationale de Formation Agronomique (Maryvonne MERRI, Maître de Conférence (Psychologie des processus d'apprentissage) et Jean-Baptiste PUEL, Maître de conférence (Informatique))

-L'INRP (Alain MERCIER, Professeur des Universités (S.E. , Didactique des Mathématiques)

accès à un ensemble de techniques et de technologies, y compris celles qui sont en deçà et au-delà de son niveau scolaire.

b) Les compétences d'organisation de l'étude des professeurs de mathématiques.

L'enseignant intégrant la banque de problèmes organise les conditions et les produits de l'étude autonome des élèves. Le professeur peut mettre en place des situations de formulation des procédures développées, des situations de validation des savoirs et l'institutionnalisation de ceux-ci. L'objectif est d'analyser les gestes spécifiques de l'enseignant organisateur de cette étude.

c) Les instruments développés par les élèves dans la résolution d'une suite de problèmes linéaires.

Les productions papier d'élèves de collège et de lycée ayant résolu des problèmes modélisables par deux équations et deux inconnues sont analysées afin de décrire et comprendre :

- les instruments (schémas, textes, écritures numériques et alphanumériques ...) utilisés par les élèves et leurs fonctions ;
- l'évolution de ces objets en relation avec la répétition de l'étude des problèmes d'une même classe et des sauts informationnels introduits par les chercheurs.

C'est ce troisième volet de recherche que nous présentons dans cet atelier.

1.1. L'étude d'une classe de problèmes

La plus grande partie du travail mathématique de l'élève de collège et de lycée n'a pas comme finalité la résolution d'un problème donné mais l'étude d'une technique de résolution³ d'une classe de problèmes. Dans le cadre de l'activité mathématique, on parlera de technique en relation, non pas avec la résolution d'un problème, mais d'une classe de problèmes. Car la nécessité de l'apparition d'une technique est évidemment fondée sur le fait que l'on a plusieurs fois le même type de problème à résoudre.

³ Dans son dictionnaire de didactique, Yves Chevallard définit (en suivant Marcel Mauss dans Sociologie et Anthropologie) une technique comme un savoir faire permettant d'accomplir les tâches d'un type de tâches donné. Il ajoute « qu'une technique apparaît comme le fait d'une construction sociale, et non comme le résultat d'une création individuelle - même s'il existe souvent des micro-variations interpersonnelles, que les sujets tendent d'ailleurs à survaloriser -, d'autre part comme un construit particulier, qui aurait pu être autre qu'il n'est ».

La mise en place d'une technique de résolution d'un problème ne peut se faire sans que ce problème apparaisse nécessairement aux yeux des élèves -car nous nous situons dans un système didactique- comme un exemplaire d'un ensemble de problèmes voisins. Un problème qui apparaîtrait comme trop particulier ne méritera pas, en général, que les élèves s'y intéressent. Apprendre à résoudre des problèmes nécessite que l'on reconnaisse *le problème* posé comme appartenant à une *classe de problèmes* et que, au delà la résolution de celui-ci, on entrevoie la façon d'en résoudre d'autres. C'est la raison pour laquelle nous présentons aux élèves quatre problèmes simultanément.

1.2. Procédure expérimentale

Quatre problèmes sont proposés à 201 élèves de la 6^{ème} à la Terminale et à 11 professeurs de mathématiques de l'enseignement agricole.

Classe	6 ^{ème}	5 ^{ème}	4 ^{ème}	3 ^{ème}	2 ^{nde}	Terminale	Prof. Maths
Effectif	21	54	36	38	34	18	11

Les quatre problèmes sont regroupés dans un livret et sont résolus par écrit par les élèves individuellement, dans l'ordre de leur choix. Les élèves disposent au maximum d'une séance de cours (55 minutes) pour résoudre les quatre problèmes.

Chaque problème peut être traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x + y = d \end{cases} \text{ où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont des entiers naturels non nuls.}$$

Aux deux contraintes du problème correspondent respectivement une équation. Les coefficients entiers permettent l'émergence de procédures de résolution spécifiques à ce contexte.

Nous avons joué sur quelques variables didactiques⁴. Ce sont, en particulier, la taille des nombres, l'identification immédiate des constantes a , b , c et d dans l'énoncé, la nature des

⁴ Une variable didactique est généralement définie comme un paramètre des situations proposées aux élèves dont la variation ont une incidence sur les procédures de résolution des problèmes.

inconnues (cardinaux ou mesures non discrètes) et une éventuelle représentation en termes de contenant/contenu (lits et chambres).

Le choix des variables didactiques rend à la fois possible la résolution des deux premiers problèmes sans mettre en œuvre une technique algébrique -et on verra ce que font les élèves les plus jeunes- tout en rendant très ou trop coûteuses des procédures non algébriques pour les problèmes suivants.

<u>Problèmes</u>	<u>Commentaires</u>
------------------	---------------------

Problème A <i>A la clinique « la Sauvegarde », il n'y a que des chambres à 1 lit et des chambres à 2 lits.</i> <i>Aujourd'hui, la clinique est complète: 20 malades occupent tous les lits des 13 chambres de la clinique.</i> <i>Combien de chambres à 1 lit et combien de chambres à 2 lits y a-t-il ?</i>	a est donné, b est donné ($a = 1$ et $b = 2$). c n'est pas donné directement, on donne le nombre e de malades. Il y a donc un implicite : 1 malade correspond à 1 lit (l'énoncé dit uniquement qu'il y a plus de malades que de lits : $c \leq e$). x et y sont des entiers non nuls.
Problème B <i>Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à 2 lits et des chambres à 4 lits.</i> <i>Aujourd'hui, elle affiche « complet » : 30 randonneurs occupent tous les lits des 12 chambres du refuge.</i> <i>Combien de chambres à 2 lits et de chambres à 4 lits y a-t-il ?</i>	Mêmes commentaires que pour le problème A.
Problème C <i>Dans ma tirelire, je n'ai mis que des pièces de 2F et des pièces de 5F.</i> <i>Je viens de la casser: j'ai 86 pièces et j'ai économisé 232 Francs.</i> <i>Combien de pièces de 2F et combien de pièces de 5F y avait-il dans ma tirelire ?</i>	a est donné ($a = 2$). b est donné ($b = 5$). c est donné ($c = 232$). d est donné ($d = 86$). x et y sont des entiers non nuls. ax, by, et c sont des mesures (ici des francs).
Problème D <i>Dans ma ferme, il n'y a que des poules et des lapins. Je compte 54 têtes et 176 pattes.</i> <i>Combien de poules et de lapins y a-t-il ?</i>	a, b ne sont pas donnés. Les valeurs de a et b sont implicites : une poule a 2 pattes et un lapin a 4 pattes. De plus d n'est pas donné mais d' avec $d' = d$ (à une tête correspond un animal). c est donné ($c = 176$).

1.3. La lecture d'écrits qui ne relèvent pas de techniques enseignées

Ces quatre problèmes relèvent tous implicitement de la même classe pour la personne qui dispose d'une technique comme la technique de substitution algébrique. En termes plus généraux, le fait de disposer d'une technique crée la classe de problèmes pour le sujet.

L'enseignement actuel des mathématiques⁵ ne prévoit pas de période de latence entre les problèmes qui relèveraient de l'algèbre et l'enseignement des techniques correspondantes. Les écrits de résolution de problèmes de l'élève sont destinés à montrer au maître l'utilisation conforme de la technique de résolution enseignée. D'autres fonctions de l'écrit ont peu de chances d'apparaître et peuvent même être peu souhaitées : la justification et la preuve pour autrui, l'accompagnement de la pensée privée, le travail par l'élève d'instruments sémiotiques de résolution de la classe de problèmes.

Les ruptures observées sont alors, le plus souvent, accidentelles, comme le montre l'exemple ci-dessous. Après un enseignement sur la résolution des problèmes du premier degré à une inconnue, le professeur-stagiaire propose à ses élèves de 4^{ème} un exercice d'évaluation. Voici la copie de l'un de ses élèves :

Chez le boulanger Sébastien achète 100 gr de bonbons et 27 F de croissants.
Aline, elle, achète 200 gr de bonbons et 15F de croissants. Ils payent tous les deux la même somme.

II. Jeir de 100g de bonbons.
mise en équation
Aline a dépensé 12F de moins que Sébastien, en croissants.
Mais elle a acheté 2 fois plus de bonbons que Sébastien,
donc $12F \times 2 = 24F$ $15F + 24F = 39F$. Aline a dépensé 39F
ainsi que Sébastien qui a acheté 2 fois moins de bonbons
que Aline donc $24 : 2 = 12F$ et en effet $27 + 12 = 39F$.
Donc les 100 g de Bonbons valent 12 francs.
(24 francs le prix de 200g de bonbons)

Extrait 1 : Résolution d'un problème du premier degré à une inconnue par un élève de 4^{ème}

L'enseignant ne retrouve pas de trace de son enseignement, c'est-à-dire l'utilisation de la technique algébrique et une rédaction « standard ». Il ne comprend pas la démarche de l'élève et pense que ce dernier a trouvé la solution par hasard. Cette hypothèse est confortée par une utilisation incorrecte du « donc ». Or, l'écrit proposé par cet élève a une fonction de justification de la réponse probablement trouvée « de tête ». Le contrat dans la classe lui interdit de donner une réponse directe sans explication.

⁵ Ce qu'Alain Mercier appelle "le nouveau régime" lors de sa conférence à cette 8^{ème} rencontre inter-IUFM.

Ne disposant pas des moyens de comprendre le raisonnement proposé par l'élève, l'enseignant ne lui accorde que 1 point sur 6.

Compte tenu des exigences du programme et du temps didactique « qui passe », l'enseignant aura donc tendance à éviter la réapparition de ce type de production ce qui l'amènera, par exemple, à changer les paramètres du problème ou à renoncer aux problèmes d'égalisation. Pour les élèves de 6^{ème}, 5^{ème} ou 4^{ème}, les problèmes posés relèvent de techniques algébriques non disponibles. Les écrits recueillis ne peuvent donc pas être lus en termes d'écart à des techniques enseignées et nous observons, de ce fait, une situation inhabituelle.

Deux questions se posent alors :

- Pourquoi proposer à des élèves des problèmes pour lesquels ils n'ont pas de technique ?
- En quoi est-il intéressant d'analyser des productions de ce type avec des professeurs-stagiaires ?

Des éléments de réponse à ces questions viendront de l'analyse des productions des élèves.

2. Description des écrits des élèves

On distinguera ici trois catégories d'écrits :

- Les écrits qui sont la manifestation de l'application claire de techniques enseignées pour la classe de problèmes proposée ;
- Les écrits qui manifestent l'émergence de nouveaux « instruments sémiotiques » ;
- Les écrits de traitement arithmétique des problèmes : raisonnement et écritures numériques.

2.1. Des instruments adaptés à la classe de problèmes : les résolutions algébriques des systèmes de deux équations à deux inconnues

L'enseignement des techniques algébriques de résolution de problèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues est prévu dans les programmes dès la classe de 3^{ème}. Nous trouvons donc dans notre corpus des élèves (ou des enseignants) ayant à leur disposition des techniques de résolution algébriques de problèmes de deux équations à deux inconnues.

Le tableau suivant donne les effectifs des élèves ou des professeurs résolvant les problèmes proposés suivant une technique algébrique pour au moins l'un d'entre eux.

	Que de l'Algèbre	De l'Algèbre et autre chose	Pas d'algèbre
Profs (11)	6	5	0
Terminales (18)	16	2	0
Seconde (34)	24	10	0

Les élèves et les enseignants disposant d'une technique algébrique de résolution de ce type de problèmes l'utilisent donc majoritairement.

Les problèmes C et D sont tous résolus par une méthode algébrique. Par contre, dans le cas des problèmes A et B, d'autres méthodes de résolution sont utilisées :

- Certains professeurs donnent la réponse « de tête » ;
- L'un des deux élèves de Terminale trouve les résultats de tête tandis que l'autre utilise une méthode d'essais et erreurs ;
- Six élèves de Seconde emploient une *méthode de fausse position* pour les problèmes A et B. Cette méthode est ici favorisée par la relation de contenant à contenu entre chambres et lits. Elle disparaîtra par contre dans les problèmes suivants car cette relation n'est plus présente et la taille des nombres a notablement augmenté, comme on peut le constater sur l'exemple ci-après :

Problème B

A l'Auberge du Cheval Blanc, il n'y a que des chambres à 2 lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui, elle affiche « complet » : 30 clients occupent les 12 chambres que compte l'auberge.

Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il ?

Problème C

Dans un tirelire, je n'ai mis que des pièces de 2 F et des pièces de 5 F. Je viens de la casser : j'ai 86 pièces et j'ai économisé 232 F.

Combien de pièces de 2 F et combien de pièces de 5 F y avait-il dans mon tirelire ?

30 clients 12 chambres

- 2 lits
4 lits

Dans chaque chambre, il y a au moins 2 lits

donc $30 - (12 \times 2) = 30 - 24 = 6$.

il reste donc 6 lits que l'on répartit
2 par 2

il y a donc 3 chambres à 2 lits
et 3 chambres à 4 lits.

soit x le nombre de pièces de 2 F
soit y le nombre de pièces de 5 F.

$$\begin{cases} x + y = 86 \\ 2x + 5y = 232 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x = 86 - y \\ 2x = 232 - 5y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 86 - y \\ x = \frac{232 - 5y}{2} \end{cases}$

donc $86 - y = \frac{232 - 5y}{2}$

donc $2(86 - y) = 232 - 5y$

donc $172 - 2y = 232 - 5y$

donc $172 - 232 = -5y + 2y$

donc $-60 = -3y$

donc $y = 20$

$x = 86 - y$
donc $x = 86 - 20 = 66$

Il y avait donc 20 pièces de 5 F et 66 pièces de 2 F.

Il est probable que dans un contexte scolaire habituel cet élève aurait utilisé une méthode algébrique pour résoudre le problème B.

2.2. L'émergence de nouveaux instruments sémiotiques

Pour résoudre ces problèmes, certains élèves n'ont pas de technique de résolution immédiatement disponible. C'est le cas des élèves de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} et également de ceux de 3^{ème} car l'expérimentation a lieu en début d'année scolaire.

Certains d'entre eux vont donc développer des systèmes de signes et des modes d'utilisation de ces systèmes de signes pour résoudre les problèmes proposés. Nous appellerons *instrument sémiotique* cette entité à deux faces composée d'un *artefact* (ici un système de signes) et d'un *schème* (pour l'utiliser)⁶.

Le système de deux équations à deux inconnues et la méthode de substitution constitue alors, selon cette définition, un instrument sémiotique. Le système de deux équations à deux inconnues et la méthode de combinaison (ou d'élimination) en constitue un autre.

Certains élèves partent d'un système de signes préexistant (ex : les formules) et inventent une nouvelle façon de s'en servir pour résoudre le problème posé (en faisant des essais sur les formules, par exemple).

D'autres élèves créent un système de signes à partir d'emprunts à des systèmes de signes antérieurs et des manières particulières de s'en servir⁷.

On parlera d'émergence de nouveaux instruments sémiotiques pour désigner les deux mouvements précédents.

2.2.1. L'émergence d'un nouvel instrument algébrique

⁶ Rabardel : « Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains » Armand Colin 1995

⁷ Les instruments sémiotiques peuvent être analysés à partir de la description des fonctions qu'ils prennent en charge :

- la fonction de représentation prenant en charge les contraintes du problème (fonctions épistémiques au sens de Rabardel avec une dimension calculable possible du problème) ;
- la fonction pragmatique permet la transformation de la situation et l'obtention d'un résultat ;
- la fonction de contrôle ;
- la fonction de communication (expérimentation dans un cadre de communication avec un enseignant ou un chercheur) fournit des explications et des preuves au lecteur de travail écrit.

Problème D (3)

Dans ma ferme, il n'y a que des poules et des lapins. Je compte 54 têtes et 176 pattes.

Combien de poules et combien de lapins y a-t-il ?

Il y a 54 tonnes de poultes et de lapins. On sait que les poultes ont que 2 petites et les lapins 4.

~~Pense 17 C: 1 = 18 patte de poulet~~
~~11: 1 = 11 patte de lapin~~

~~$$x + 2x = 20$$
$$3x = 20$$
$$x = \frac{20}{3}$$~~

~~y appelle x le nombre de points à 2 pates et y le nombre de lignes à 4 pates.~~

~~$x + y + z =$~~

l'appelle 2 les pattes des poules et 3c les pattes des lapins

$$x + 2x = 176$$

3x = 176

$$x = \frac{176}{3}$$

$$\begin{array}{r} 176 \overline{) 3} \\ 26 \overline{) 5} \\ 2 \end{array}$$

51

D'autres élèves vont cependant tenter de faire évoluer ces techniques vers celles de la résolution des systèmes sans nécessairement y parvenir.

Nous reproduisons ci-dessous les écrits de résolution de deux problèmes par deux élèves de 3^{ème} codés respectivement 336 et 311.

- L'élève 336 résout les problèmes dans l'ordre C, D, B, A. Pour le problème C, il produit une écriture utilisant deux lettres x et y pour désigner les inconnues mais ne parvient pas à une écriture cohérente du problème. Il tente de traduire l'ensemble des contraintes du problème par une seule équation, conformément aux techniques apprises en classe de 4^{ème} pour résoudre les problèmes à une seule inconnue. Cela l'amène à traduire le problème C par l'équation $86 = 2x + 4y$.

Dans le problème D, il parvient à traduire à partir de l'expression des contraintes le problème par deux équations à deux inconnues mais échoue dans la résolution en l'absence de technique algébrique adaptée.

Pour le problème B, l'élève revient à une seule équation semblable à celle utilisée pour le problème C ($12 = 2x + 4y$) et abandonne tout recours à l'algèbre pour le problème A.

Extrait 6 et 7 : Résolution des problèmes C et D par un élève de début de 3^{ème} (élève 336)

- L'élève 311 propose deux équations à deux inconnues dès le problème A. Si l'une des deux équations traduit bien l'une des contraintes du problème ($x + y = 13$), ce n'est pas le cas de l'autre ($x + y = 20$).
L'écriture cohérente des deux équations apparaît au problème C et est maintenue au D. Il travaille successivement sur chaque équation sans produire de solution.

Extraits 8 et 9 : Résolution des problèmes A et D par un élève de début de 3^{ème} (élève 311).

« L'invention » se situe dans les deux exemples précédents davantage au niveau de l'artefact car l'élève n'a pas su développer des moyens d'utiliser celui-ci pour résoudre le problème. Même si ce phénomène reste limité à quelques élèves dans la classe, il reste qu'ils sont arrivés à ce type de production en une heure de travail et sans aide. Le professeur est donc en droit de compter sur ces phénomènes de genèse instrumentale. Ils constituent alors le point de départ d'un travail sur la résolution des problèmes de deux équations à deux inconnues.

2.2.2. *La genèse d'instruments non algébriques*

Mais les systèmes de signes inventés par les élèves ne relèvent pas tous de l'algèbre. On observe également des instruments qui s'élaborent au cours de la résolution des problèmes à partir d'emprunts à des systèmes de signes dont les élèves disposent parfois depuis l'école élémentaire ou le début du collège.

- Le premier exemple de production proposé ci-dessous est celui d'un élève de 6^{ème} (élève 601).

Il commence par tracer un tableau de d cases (ici $d = 12$), puis répartit au hasard a objets (ou b objets) par case. Il calcule ensuite le nombre total d'objets c_1 . Constatant que $c_1 > c$, il enlève $|a - b|$ objets par case jusqu'au moment où il en a enlevé $c_1 - c$. La solution est alors donnée par la lecture sur l'état final du tableau du nombre de cases à a éléments et du nombre de cases à b éléments. Remarquons que cet instrument prend en charge la contrainte $x + y = d$. Les conditions d'apparition de cet instrument sont liées à la nature du problème : problème de répartition ou de relation de contenant à contenu.

L'emploi d'un tel instrument n'est raisonnable que si les valeurs de d , a et b sont raisonnablement petites sinon le tracé du tableau devient fastidieux.

Une amélioration de cet instrument est envisageable. Si la différence entre c_1 et c est grande, alors la procédure des soustractions successives peut évidemment être remplacée par une division. On retrouverait alors une méthode de fausse position.

Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y-a-t-il ? *Il y a 3 chambres à 2 lits et 3 chambres à 4 lits.*

Extrait 10 : Résolution des problèmes A et D par un élève de 6^{ème} (élève 601).

- L'extrait qui suit correspond à la résolution du problème B par un élève de 3^{ème} (élève 326).

L'élève choisit une valeur x_1 pour x et y_1 pour y de telle sorte que $x_1 + y_1 = d$, puis il calcule ax_1 , by_1 . Il calcule ensuite $ax_1 + by_1$ qui donne c_1 . Comme $c_1 > c$, il choisit une valeur x_2 pour x et y_2 pour y de telle sorte que $x_2 + y_2 = d$ avec $x_2 > x_1$. Il continue à diminuer la valeur choisie pour x jusqu'à obtenir $c_1 = c$.

Le pattern de fonctionnement de cet instrument est décrit ci-dessous. Il permet le contrôle des contraintes et l'exécution des calculs mais ne prend pas en charge le choix des valeurs de x et de y . Cet instrument contrôle en particulier la contrainte $x + y = 12$.

$$12 \text{ chambres } \left\{ \begin{array}{l} x_i \text{ chambres de 2 lits} = 2x_i \\ y_i \text{ chambres de 4 lits} = 4y_i \end{array} \right\} \text{ somme } 2x_i + 4y_i \text{ égale à } c_i$$

Les pas de l'algorithme correspondant à ce pattern sont les suivants :

1. faire un choix arbitraire x_1 de x et y_1 de y
2. si $c_1 = c$ c'est fini
sinon
si $c_1 > c$ alors prendre $x_2 = x_1 + 1$ (et alors y_2 est nécessairement égal à $12 - x_2$)

si $c_1 < c$ alors prendre $x_2 = x_1 - 1$ (et alors y_2 est nécessairement égal à $12 - x_2$)
et on retourne en 1

Cet algorithme converge vers la solution.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x \text{ chambres à } 2 \text{ lits} \\ x \text{ chambre à } 4 \text{ lit} \end{array} \right\} = 12 \text{ chambres pour } 30 \text{ personnes.} \\
 \\
 12 \left[\begin{array}{l} 2 \text{ chambres de } 2 \text{ lits} \\ 2 \text{ chambres de } 4 \text{ lits} \end{array} \right] = 12 \\
 \\
 12 \left[\begin{array}{l} 6 \text{ chambres de } 2 \text{ lits} \\ 6 \text{ chambres de } 4 \text{ lits} \end{array} \right] = 12 = 36 \\
 \\
 12 \left[\begin{array}{l} 7 \text{ chambres de } 2 \text{ lits} \\ 5 \text{ chambre de } 4 \text{ lit} \end{array} \right] = 16 \\
 \quad \quad \quad = 20 \\
 \\
 12 \left[\begin{array}{l} 9 \text{ ————— de } 2 \text{ lits} = 18 \\ 3 \text{ ————— de } 4 \text{ lits} = 12 \end{array} \right] = 30 \text{ personnes pour } 30 \text{ lits.} \\
 \\
 \text{Il y a donc } 9 \text{ chambres de } 2 \text{ lits} \\
 \text{et } 3 \text{ chambres de } 4 \text{ lits}
 \end{array}$$

Extrait 11 : Résolution du problème B par un élève de 3^{ème} (élève 326).

- Le dernier extrait correspond à la résolution du problème B par un élève de 4^{ème}.

Il écrit les équations traduisant l'ensemble du problème. La seconde des deux équations est conçue comme une contrainte pour les valeurs de x et y de la première équation.

Il choisit une valeur x_1 pour x et choisit $y_1 = 12 - x_1$ puis exécute le calcul $2x_1 + 4y_1$ noté c_1 .

Comme $c_1 > c$, il choisit une nouvelle valeur pour x_2 pour x et y_2 pour y de telle sorte que $x_2 + y_2 = d$ avec $x_2 > x_1$.

La première équation (ou formule ?) fonctionne comme un pattern qui permet l'exécution et le contrôle des calculs. La deuxième équation traduit une condition pour la première. Le schème d'utilisation est semblable à celui de l'instrument précédent. Il n'y a pas de calcul littéral à partir des équations. x et y fonctionnent comme des emplacements où vont venir s'inscrire les différents choix de valeur faits par l'élève.

L'artefact n'est pas améliorable dans la perspective d'un enseignement d'une méthode algébrique de résolution du problème. Il s'agit alors de modifier le schème d'utilisation qui relève du calcul littéral et du calcul sur les égalités.

$$2x + 4y = 30 \quad (\text{si } y + x = 12)$$

$$x = 12 - y$$

$$2(12 - y) + 4y = 30$$

$$24 - 2y + 4y = 30$$

$$24 + 2y = 30$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

$$x = 12 - 3 = 9$$

y a 9 chambre à 2
et 3 chambre à 4
 $9 + 3 = 12$

Extrait 12 : Résolution du problème B par un élève de 4^{ème} (élève 436).

Enfin, il existe des protocoles dans lesquels les élèves utilisent les « formules des problèmes », non seulement pour rendre compte de la solution avec des fonctions de validation et de preuve, mais véritablement comme des instruments de la résolution de ces problèmes.

En effet, les formules sont utilisées pour faire des essais et pour contrôler l'une des deux contraintes.

Par exemple, dans le cas du problème A, on verra des écritures du type :

$$4 \times 1 + 9 \times 2 = 22 \text{ et } 4$$

$$+ 9 = 13$$

$$5 \times 1 + 8 \times 2 = 21 \text{ et } 5$$

$$+ 8 = 13$$

et enfin

$$6 \times 1 + 7 \times 2 = 21 \text{ et } 6$$

$$+ 7 = 13$$

Il s'agit là encore d'un véritable instrument sémiotique au sens où il permet de travailler le problème par une stratégie d'essais et d'ajustements. L'apparition des formules du problème permet un passage relativement aisé aux formules littérales puis aux méthodes algébriques.

2.3. Les instruments issus du traitement arithmétique des problèmes

Les protocoles relevant d'un traitement arithmétique des problèmes correspondent à deux catégories d'élèves :

- ceux qui ont identifié la structure du problème
- ceux qui ne l'ont pas identifiée, une grande partie d'entre eux assimilant ces problèmes à des problèmes de partage.

Certains élèves de la première catégorie parviennent à résoudre une partie des problèmes : il s'agit alors le plus souvent des deux premiers.

Ces élèves peuvent produire « les formules » du problème. Par exemple, pour rendre compte de la solution du problème C, l'élève 527 de classe de 5^{ème} produit l'écrit suivant :

Problème C

Dans ma tirelire, je n'ai mis que des pièces de 2 F et des pièces de 5 F.

Je viens de la casser : j'ai 86 pièces et j'ai économisé 232 F

Combien de pièces de 2 F et combien de pièces de 5 F y avait-il dans ma tirelire ?

Il y a 201 pièces de 2 F et 6 pièces de 5 F.

$$(101 \times 2) + (5 \times 6) = 202 + 30 = 232$$

Extrait 13 : Résolution du problème C par un élève de 5^{ème} (élève 527).

Cet élève produit une écriture rendant compte de l'une des contraintes du problème (la somme totale est de 232F) mais ne respecte pas l'autre contrainte (le nombre total de pièce est égal à 86).

Ces écrits ont uniquement une fonction (identifiable) de communication de la solution et de preuve. Certains élèves s'emparent de ces formules pour en faire des instruments de résolution des problèmes.

L'extrait ci-dessous correspond à la résolution du problème A par un élève de 4^{ème} (élève 405) :

Problème A

A la clinique « Le Sauvage », il y a que des chambres à 1 lit et des chambres à 2 lits.

Aujourd'hui, la clinique est complète : 20 malades occupent tous les lits des 13 chambres de la clinique.

Combien de chambres à 1 lit et combien de chambres à 2 lits y a-t-il ?

Nombre de chambre a 2 lit.

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 26} \\ 40 \\ \hline 20 \\ 60 \end{array}$$

Il y a 5 chambre à deux lits

Nombre de chambre a 1

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 10} \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Il y a 8 chambre a 1 lit.

Extrait 14 : Résolution du problème A par un élève de 4^{ème} (élève 405).

Cet élève identifie le problème A comme un problème de division pour produire un nombre qui sera, pour lui, l'une des réponses au problème. L'autre réponse est obtenue en tenant compte de la contrainte $x + y = 13$.

On peut noter qu'une majorité d'élèves de collège de niveau inférieur à la 3^{ème} propose des solutions à partir d'une ou plusieurs divisions ou multiplications.

3. La lecture des écrits de résolution des élèves dans la formation des professeurs-stagiaires de mathématiques

La principale fonction de l'écrit dans les dispositifs didactiques actuels est l'ostension, par l'élève, de la maîtrise d'une technique préalablement enseignée. Une technique est caractérisée par les gestes, les signes qui la fondent. Nous reconnaissons donc immédiatement les élèves qui utilisent la technique de résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues par les signes utilisés (accolades, équations, inconnues, modes de transformation des écritures comme substitution, élimination, déterminant...).

Mais notre dispositif expérimental ne permet pas seulement, on l'a vu, de reconnaître des techniques enseignées. Elle réalise également les conditions de genèse d'instruments sémiotiques pour une partie des élèves les plus jeunes de notre panel.

Si les dispositifs didactiques prescrits par l'institution scolaire rendent peu probables la production et l'usage de tels écrits, en quoi est-il intéressant d'analyser des productions de ce type avec des professeurs en formation initiale ?

Nous pensons que ce type de travail permet de comprendre :

♦ **Les différentes fonctions de l'écrit :**

- la fonction de représentation prend en charge les contraintes du problème ;
- la fonction pragmatique permet la transformation de la situation et l'obtention d'un résultat ;
- la fonction de contrôle assure la gestion de l'activité ;
- la fonction de communication fournit des explications et des preuves au lecteur du travail écrit.

Ces fonctions se dégagent naturellement de l'observation des productions des élèves les plus jeunes de notre panel car les traces écrites ne peuvent alors être analysées en termes d'écart à une technique enseignée. Par contre, dans le cas des « solutions standard », les phénomènes de naturalisation des techniques ne permettent pas aux jeunes enseignants de percevoir toutes les fonctions des instruments sémiotiques dans la résolution des problèmes.

♦ **Les phénomènes qui apparaissent au moment de l'apprentissage des nouvelles techniques.** Ces phénomènes sont les suivants :

- De nouveaux instruments sémiotiques émergent par transformation d'anciens instruments au moment de l'introduction d'une nouvelle classe de problèmes. Ce phénomène peut se maintenir après l'enseignement de la technique de résolution prévue par les programmes lorsque le contexte du problème le permet comme nous l'avons montré dans les extraits 1, 2 et 3.

- Un concept de mathématiques s'appréhende aussi au travers d'un système de signes et d'une manière de l'utiliser.

Examinons par exemple la résolution du problème suivant :

« 7 crayons coûtent 21 francs combien coûtent 3 crayons ? »⁸

Le recours au tableau de proportionnalité donnera :

7	3
21	x

Où x est le prix cherché. Puis la technique du « produit en croix » aboutira à :

$$7 \times x = 3 \times 21 \text{ d'où } x = \frac{(3 \times 21)}{7} \text{ et finalement } x = 9.$$

Le modèle fonctionnel produirait un autre type de travail. Si f est la fonction linéaire qui donne le prix des crayons en fonction de leur nombre n on peut écrire:

$$f(3) = f\left(\frac{3}{7} \times 7\right) = \frac{3}{7} f(7) = \frac{3}{7} \times 21 = 9.$$

Pourtant, plusieurs difficultés se présenteraient si l'on transformait ce dispositif expérimental en un système d'enseignement :

- ❖ Le coût en temps dans l'organisation actuelle de l'étude pourrait être prohibitif puisque le travail sur les problèmes ne débouche pas nécessairement sur une technique à enseigner ;
- ❖ Il se poserait alors le problème de la définition et du statut des traces de ce travail sur le cahier de l'élève.

Ces deux objections ne peuvent être probablement levées qu'au prix d'un changement de l'organisation de l'étude avec des conséquences sur les programmes et sur les gestes professionnels des enseignants. On pourrait alors concevoir une organisation analogue à celle pensée par G.Sensevy pour son travail sur les fractions⁹, organisation qui prend en compte le rapport de l'élève au temps didactique.

⁸ Pour de plus amples commentaires on pourra se référer au travail de Mariana Bosch dans "El semiòtic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proporcionalitat" Universitat Autònoma de Barcelona 1991 ou dans l'article d'Yves Chevallard "Les outils sémiotiques du travail mathématiques" dans SKHOLÉ, IUFM d'Aix-Marseille 1994.

⁹ Institutions Didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire PUF 1998

Dans le cadre actuel, il est néanmoins possible d'aménager des temps de travail dans le sens du travail sur les narrations de recherche de l'IREM de Montpellier¹⁰.

Une fréquentation des problèmes de ce type dès la sixième, voire avant, permettrait alors de préparer « la vie bonne »¹¹ au moment où il sera temps, dans le cursus scolaire de l'élève, d'apprendre les techniques de résolution de cette classe de problèmes.

En effet, la fréquentation précoce de cette classe de problèmes en assure la compréhension avant toute technique algébrique car un certain nombre de ces problèmes peuvent être résolus avec les instruments antérieurs de l'élève. La technique est alors rendue nécessaire aux yeux de l'élève par le jeu sur les variables didactiques qui lui donnent le meilleur rapport coût/efficacité.

¹⁰ Narration de recherche A.Chevalier & M.Sauter IREM de Montpellier

¹¹ Selon une expression d'Y.Chevallard lors d'une conférence dans le cadre d'une formation expérimentale de mathématiques de l'Académie de Toulouse.