# Grandeurs et fonctions

**André PRESSIAT**

IUFM Centre Val de Loire

Équipe DIDIREM - Université Denis Diderot (Paris 7)

**Résumé** :

Le passage de l'emploi d'expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » à la notion de fonction telle qu'elle est prescrite dans les programmes de $3^e$ et de $2^e$ est problématique, du point de vue de l'enseignement comme de celui de l'apprentissage. Des éléments de réponse figurant dans les projets de documents d'accompagnement des programmes de collège seront rapidement présentés. Concernant le thème de la proportionnalité, ils proposent de donner d'abord une visibilité plus grande aux grandeurs en jeu, non seulement comme éléments de contextualisation, mais également comme moyens de traitement "pré - fonctionnels" ; puis de légitimer ensuite le passage à un unique modèle fonctionnel numérique. Cette dernière étape fera l'objet d'un examen plus détaillé, compte tenu de son importance aussi bien en $3^e$ (classe dans laquelle ce modèle ne peut guère vivre et être véritablement exploité s'il n'est pas mis en relation avec le travail fait dans les classes qui précèdent) qu'au lycée où son étude est reprise : caractérisation des fonctions affines, lien avec la dérivation … Un travail analogue sera proposé pour d'autres "fonctions de référence" du programme de $2^e$ : des grandeurs inversement proportionnelles à la fonction "inverse", …

## 1. Introduction

En avril dernier, lors d'une émission sur une chaîne privée[2], a eu lieu un de ces moments qui "font du bruit" : le ministre de l'Education nationale a été confronté par les organisateurs de l'émission à la résolution d'un problème de "règle de trois", un tableau vert et de la craie lui étant fournis, pour bien montrer le caractère scolaire de l'exercice. Le problème était le suivant : "Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ?". Face à ce problème qu'on n'aurait pas osé poser lors du Certificat d'Etudes Primaires[3], le ministre déclare d'emblée : "Je ne sais pas le faire du tout. Comment faites-vous ? Montrez-moi !", ce qui en dit long sur ce qui est acceptable dans les médias et sans doute dans la société à propos de ce qu'il est possible d'ignorer concernant les mathématiques scolaires, sans pour autant ruiner sa réputation. L'animatrice Ariane Massenet écrit alors au tableau les données du problème sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cc} 4 & 2,42 \\ 14 & \end{array}$$

puis introduit la lettre *x* pour désigner le prix cherché. S'en suivent alors ces échanges :

– On va l'appeler *x*, d'accord ? On va multiplier 14 par 2 euros 42…
– Certes.
– C'est le signe de la règle de trois : là, on multiplie, et là on divise… par 4. Vous comprenez ?

Le signe de la règle de trois en question est dessiné ainsi :

$$\begin{array}{cc} 4 & 2,42 \\ 14 & x \end{array}$$

et le résultat, 8,47 €, est écrit au tableau pour terminer. Les spectateurs ayant fréquenté l'école jusque dans les années 60 auront été surpris de voir ce qu'est devenue la "règle de trois" depuis cette époque. Elle était alors indissociable d'un petit discours bien ritualisé (parfois intériorisé) accompagnant la mise en œuvre de ladite règle :

[2] Le Grand Journal du 3 avril 2008, sur Canal +.
[3] Son énoncé n'a certainement guère été examiné, comme on le verra plus loin.

4 stylos coûtent 2,42 €. Donc 1 stylo coûte 4 fois moins : $\frac{2{,}42 \times}{4}$. Et 14 stylos coûteront donc 14 fois plus : $\frac{2{,}42 \times 14}{4}$.

Ensuite, pour des raisons liées aux techniques de calcul disponibles, l'élève était incité à effectuer la multiplication en premier et enfin la division, l'ordre inverse pouvant, lorsque la division "ne tombe pas juste", être à l'origine d'erreurs d'arrondis. On notera que cette mise en œuvre contient sa propre justification, et ne nécessite ni l'emploi d'une lettre $x$ bien mystérieuse, ni de signe autre que le trait de fraction. La solution proposée par l'animatrice, corrigé en main, n'a pas les mêmes qualités : elle est à peu près incompréhensible (pourquoi commencer par multiplier 2,42 € par 14 ?) ; la lettre $x$ est introduite, mais n'est intégrée à aucun calcul ; son seul rôle est de rendre possible la mise en place d'un signe accompagnant la suite des calculs à faire ("là, on multiplie, et là on divise… par 4"), sans aucunement justifier cette dernière. Le lecteur aura reconnu la justification manquante à laquelle ce signe renvoie : l'égalité des "produits en croix" dans une égalité de deux quotients. Tout irait pour le mieux (une technique n'intègre pas en général sa justification) si ce signe n'était pas étiqueté "signe de la règle de trois". Cette manière de parler montre la vie difficile dans la société de cet objet d'enseignement : nombreux sont ceux qui en parlent (et notamment les ministres, qui en font souvent un emblème), sans toujours se rendre compte qu'ils ne parlent pas de la même chose (dispositif de la technique ; gestes – notamment leur ordre – de la technique ; justification de la technique).

Ariane Massenet, après avoir présenté cette technique hybride "de la règle de trois", précise que l'on peut procéder de manière beaucoup plus simple : on divise 2,42 € par 4 et on multiplie par 14. On reconnaît ici la technique dite de "réduction à l'unité", qui a en commun avec la règle de trois des années 60 les gestes sans en respecter l'ordre, mais se dispense d'un dispositif particulier (comme le trait de fraction structurant les données et les opérations sur ces dernières) en restant dans le registre de la langue naturelle. Or il se trouve que la mise en œuvre de cette dernière méthode conduit à un prix de 0,605 € pour un stylo, ce qui n'est guère conforme aux usages commerciaux. L'emploi de cette technique n'a donc été conduit à son terme ni par l'animatrice ni par ses "conseillers". En résumé, la technique montrée en premier est compliquée et n'est guère intelligible, alors que la mise en œuvre de la dernière, beaucoup plus simple, met en évidence le manque de pertinence des données de l'énoncé (Voir la note 2). L'image donnée au public des mathématiques enseignées n'est guère plus flatteuse que celle du ministre dans cette aventure.

Il est temps d'examiner les techniques de résolution suggérées par les documents d'accompagnement (appellation qui a disparu depuis et a été remplacée par "ressources pour les classes de $6^e$, $5^e$, $4^e$, et $3^e$ du collège"), techniques qui vont nous rapprocher du cœur du thème de cette intervention : grandeurs et fonctions. La plus élémentaire s'appuie sur le fait que pour trouver le prix de 14 stylos connaissant le prix de 4, on peut prendre comme intermédiaire le prix de 2 stylos : c'est la moitié du prix de 4, c'est-à-dire 1,21 €. Quant au prix de 14 stylos, on l'obtient en multipliant par 7 ce prix de 2 stylos. L'oralisation de cette technique ne pose guère de problème. Si on veut en rendre compte par écrit, les choses se compliquent. Les documents d'accompagnement proposent d'utiliser un langage pré-fonctionnel, de type "algèbre syncopée", comme le suivant :

p. de 4 st. = 2,42 €. Donc p. de 2 st. = 1,21 €, et donc p. de 14 st. = 7 × 1,21 € …

Ces mêmes outils sémiotiques peuvent être utilisés pour la mise en œuvre de la technique de réduction à l'unité :

p. de 4 st. = 2,42 €. Donc p. de 1 st. = 2,42 € ÷ 4 = 0,605 € (résultat bizarre !), et donc p. de 14 st. = 14 × 0,605 € …

Le lecteur aura remarqué qu'au lieu de se focaliser sur la réduction à l'unité, cette technique s'appuie sur la définition suivante de deux grandeurs proportionnelles : Deux grandeurs

proportionnelles sont des grandeurs telles que, si l'on multiplie (ou divise) l'une d'elles par un nombre, la grandeur correspondante est multipliée (ou divisée) par *le même* nombre.
Le programme de 6$^e$ agrandit la portée de cette technique : alors qu'à l'école cette dernière est mise en œuvre en multipliant l'une des grandeurs par un nombre entier (ou décimal simple), en 6$^e$ on introduit les quotients d'entiers pour résoudre des problèmes du type : par quel nombre convient-il de multiplier l'entier *a* pour trouver l'entier *b* ? Ici, pour trouver par quel nombre multiplier 4 st. pour obtenir 14 st., on cherche le nombre par lequel il faut multiplier 4 pour trouver 14. Il est ici facile à trouver : 14 est "le milieu" de 12 et 16, produits respectifs de 4 par 3 et 4. Donc, 14 c'est 3,5 fois 4. On peut donc éviter le passage par l'écriture fractionnaire du quotient : $\frac{14}{4}$. On peut donc mettre en œuvre la technique améliorée :

14 st. = 3,5 × 4 st. Donc, p. de 14 st. = 3,5 × 2,42 € = …

L'introduction des quotients d'entiers permet d'étendre la technique aux nombres rationnels, écrits sous forme fractionnaire : c'est la raison d'être de ces quotients, dont le lien avec les problèmes de proportionnalité est vital :

$b$ choses = $\frac{b}{a} \times a$ choses. Donc p. de $b$ choses = $\frac{b}{a} \times$ p. de $a$ choses.

On notera que ces moyens sémiotiques (pré-fonctionnels, et employant des abréviations) se présentent comme un substitut aux tableaux usuels, dont ils n'ont pas la lourdeur. Ils constituent un registre de représentation (au sens de Duval) dans lequel le traitement est congruent[4] avec celui fait dans le registre oral de la langue naturelle.

Du point de vue de l'enseignement de la notion de fonction, ils constituent un premier contact avec cette dernière, non pas axé sur la définition d'une fonction, mais sur une des propriétés essentielles (homogénéité ou "linéarité multiplicative"), qui plus tard sera résumée par : $f(k\,x) = k\,f(x)$. Sur le plan historique, l'exemple des logarithmes le montre bien[5], l'équation fonctionnelle – ou la fonction vue comme une relation qui la caractérise – est apparue avant la notion de fonction, et en particulier avant toute précision d'un domaine de définition, objet auquel l'enseignement actuel reste très attaché malgré les "assouplissements" à son encontre.

Dans la classification de Vergnaud, la procédure précédente est appelée "procédure scalaire", alors qu'il nomme précisément "procédure fonction" la technique dite du "coefficient de proportionnalité". Que dire de cette dernière, si on s'intéresse aux grandeurs dans une situation de proportionnalité, et pas seulement à leurs mesures ?

## 2. Techniques mathématiques scolaires et besoins co-disciplinaires et sociaux : nombres seuls ou grandeurs mesurées ?

Considérons le problème suivant, dit "de l'eau sucrée" :

> Pour faire une expérience de chimie, un professeur verse dans un récipient 6 dL d'eau et 15 g de sucre. Il distribue à chacun de ses élèves un récipient contenant de l'eau. Dans le récipient de Jacques, il y a 8 dL d'eau, dans celui de Pierre il y a 18 dL, dans celui d'Isabelle 15 dL, dans celui de Benoît il y a 30 dL et dans celui de Laurence il y a 12 dL. Le professeur demande ensuite à chaque élève de mettre juste ce qu'il faut de sucre dans son récipient pour obtenir une eau aussi sucrée que la sienne, pas plus, pas moins.
> Quelle quantité de sucre doit mettre chaque élève dans son récipient ?

[4] Deux représentations sémiotiquement différentes représentant au moins partiellement le même contenu sont dites congruentes lorsqu'il y a correspondance sémantique entre leurs unités signifiantes, univocité sémantique terminale et même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations. Lorsque deux représentations sont congruentes, le passage de l'une à l'autre se fait spontanément, sinon le passage n'est plus immédiat (Duval ,1995).

[5] $f\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ : le logarithme transforme une moyenne géométrique en une moyenne arithmétique.

La procédure dite “du coefficient de proportionnalité” peut être décrite comme suit : il faut 15 g de sucre pour 6 dL. Pour obtenir 15, on peut multiplier 6 par 2,5. Donc, pour 8 dL, on multiplie 8 par 2,5 : on trouve 20. Il faut donc 20 g de sucre pour 8 dL.
Avec le registre des tableaux, cette procédure se traduit ainsi :

| | | | |
|---|---|---|---|
| × 2,5 | 6 | 8 | 15 |
| | 15 | | |

Le traitement précédent s’appuie sur les nombres (mesures de grandeur) plutôt que sur les grandeurs. On peut rester dans le cadre des grandeurs, comme le montre ce qui suit :

| | | | |
|---|---|---|---|
| × 2,5 g/dL | 6 dL | 8 dL | 15 dL |
| | 15 g | | |

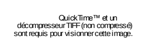
Il apparaît alors que 2,5 est la mesure, exprimée en grammes par décilitre, d’une troisième grandeur : la concentration en sucre, grandeur quotient de la masse (de sucre) par le volume d’eau. Ces grandeurs quotients figurent explicitement au programme de 4$^{e}$ et de 3$^{e}$. Cette procédure trouve sa justification dans la définition suivante de deux grandeurs proportionnelles, que l’on trouve dans les dictionnaires d’aujourd’hui :

> Deux grandeurs sont proportionnelles si leur rapport est constant.

Si on ne s’intéresse qu’aux mesures des grandeurs en question, ce rapport constant est un nombre, appelé *coefficient de proportionnalité* (entre les deux suites de mesures apparaissant dans le tableau) : 2,5 dans l’exemple. Si on reste dans le cadre des grandeurs, ce rapport est une grandeur constante, appelée “concentration en sucre” : 2,5 g/dL dans l’exemple, et cette grandeur est irréductible à un nombre. Alors qu’en multipliant 6 dL par le nombre 2,5 (le “scalaire” 2,5) on obtiendrait un volume (ici, 15 dL), en multipliant 8 dL par 2,5 g/dL, on obtient une masse. La même opération numérique – multiplication par 2,5 – a donc deux significations bien différentes quand on s’intéresse aux traitements faits sur les deux grandeurs en question : la première est une étape de la technique “procédure scalaire” qui, à la fin du 1. a été mise en rapport avec la propriété d’homogénéité d’une fonction linéaire ; la deuxième est l’étape cruciale de la technique “procédure fonction”, procédure qui est en rapport avec la définition “explicite” d’une telle fonction.

L’exemple qui précède met bien en évidence le travail qui reste à faire à partir du seul traitement numérique pour que ce dernier prenne (ou garde) du sens quand on passe dans le cadre des grandeurs. La proportionnalité des grandeurs est un objet d’enseignement qui concerne plusieurs disciplines scolaires : peut-on en découper l’enseignement en consignant les professeurs de mathématiques dans son seul traitement numérique, réservant le passage du cadre numérique au cadre des grandeurs aux professeurs des autres disciplines ? Cette solution n’est guère tenable.

Elle ne l’est pas davantage quand il s’agit de traiter de questions plus familières telles que les achats de marchandises. L’affichage du “prix au litre, au kilogramme, au mètre …” est imposé par la loi, et l’interprétation (et vérification) d’une “facturette” comme la suivante fait partie des compétences de base du futur citoyen que l’école doit former :




On remarque que la balance électronique qui produit la facturette affiche par défaut les facteurs de produits de la forme : $x$ kg × $a$ €/kg, puis dans la dernière colonne, le résultat (arrondi à deux chiffres) : $xa$ €.

Mais le commerçant vendant également des marchandises “à la pièce”, elle traite également ce cas, de manière dérogatoire : s’affichent alors le nombre de “pièces”, le prix à la pièce et enfin le prix du nombre de pièces : 2 pièces × 0,88 €/pièce = 1,76 €.

Compte tenu de l'enseignement reçu, il est certain que les élèves ne rencontrent jamais de telles écritures durant leur scolarité à l'école et fort rarement au collège : phénomène exceptionnel où les pratiques mathématiques de la vie ordinaire n'ont jamais été rencontrées durant la scolarité obligatoire. Qu'il le veuille ou non, le professeur de mathématiques manipule les grandeurs sous-jacentes, les évoque – souvent seulement à l'oral, parfois même pour faire des appels au "bon sens". Cette manipulation est explicite dans l'enseignement des mathématiques en Allemagne, comme le montre l'extrait suivant d'un manuel en ligne sur Internet :

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

Le lecteur aura remarqué que dans ce manuel (qui correspond au niveau de la classe de 5$^{e}$ en France) :

- la relation de proportionnalité est d'abord décrite en faisant allusion à la propriété d'homogénéité (si une grandeur est doublée, triplée …, la grandeur correspondante est doublée, triplée …)
- la grandeur quotient $k$ est introduite pour définir la "relation de proportionnalité" sous la forme $x \longrightarrow k \bullet x$, dans laquelle $x$, $k$ et $k \bullet x$ désignent des grandeurs mesurées, comme l'illustre l'exemple traité, ainsi que la formule entre la masse et le volume. Le "facteur de proportionnalité" $k$ est ici une grandeur, qui n'est pas réduite à sa mesure, le coefficient de proportionnalité.

Les moyens modernes de calcul facilitent ce calcul avec les grandeurs mesurées, comme le montrent les copies d'écrans suivantes, obtenues à l'aide d'une calculatrice symbolique dotée du calcul avec unités :

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

On calcule avec des grandeurs : on peut ajouter des mètres avec des mètres, mais aussi des mètres avec des centimètres …
On peut calculer des grandeurs quotients, par exemple diviser une masse par un volume …
On peut créer ses propres grandeurs et unités, pour calculer par exemple une densité de population, en exigeant que le résultat soit exprimé en habitant/km$^2$…
On peut calculer une aire comme produit de deux longueurs.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

En multipliant une vitesse par une durée, on trouve une distance … sauf si on oublie de mettre des parenthèses autour de “15_s”, auquel cas on divise la une distance par 15 avant de la multiplier par 1_s, ce qui donne une unité bizarre : le “mètre-seconde”, ce qui constitue une alerte …

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

On peut diviser une distance exprimée sous forme littérale (*d* mètres) par une durée exprimée sous forme numérique (15 Cs) : on obtient une vitesse, exprimée sous forme littérale, avec la bonne unité (m/s).

On peut également retrouver la formule $d = vt$, en introduisant des unités : la calculatrice donne le résultat *tv*, au lieu de *vt* … en mettant en évidence l’unité.

Les relations entre grandeurs, et notamment le cas où cette relation est la proportionnalité, sont au cœur des enseignements concernant la notion de fonction, et particulièrement lors du passage de l’emploi d’expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » à la mise en place de la notion de fonction telle qu’elle est prescrite dans les programmes de 3$^{e}$ et de 2$^{e}$. Dans le paragraphe suivant, ce passage sera examiné en ce qui concerne les programmes de collège et les documents ressources associés : “Proportionnalité – Fonctions”, et “Grandeurs et mesures”.

**3. Passage du “en fonction de” à la mise en place de la notion de fonction**

Les programmes proposent de travailler l’emploi de la locution “en fonction de” ou “est fonction de” de la classe de 6$^{e}$ à la classe de 4$^{e}$ (les occasions ne manquent pas), et d’introduire la notion de fonction en classe de 3$^{e}$ et de 2$^{e}$. Deux questions relatives à ce passage sont examinées ici :

- Comment préparer ce passage ?
- Comment le justifier ?

L’idée développée dans les documents ressources est la suivante :
- Travailler dans le cadre des grandeurs mesurées (et pas seulement dans le cadre numérique des mesures de ces grandeurs) (1);
- Avec des registres allant de la langue maternelle à l’emploi d’un langage pré-fonctionnel, permettant de mettre en œuvre la propriété d’homogénéité puis la multiplication par une grandeur-quotient (de la 6$^{e}$ à la 4$^{e}$) (2);
- Pour mettre en évidence en début de 3$^{e}$ que toutes les situations de proportionnalité entre de deux grandeurs – qu’elles soient ou non de même espèce – se modélisent dans le cadre des grandeurs avec des fonctions de l’une des grandeurs vers l’autre ayant toujours les mêmes propriétés (3).
- L’examen de ces modélisations montre que la nature des grandeurs d’une part, le choix des unités d’autre part ne change pas le modèle. Ceci justifie que l’on remplace tous ces modèles locaux par un seul modèle : la fonction linéaire (de l’ensemble des nombres positifs dans lui-même) (4).

Illustrons chacune de ces étapes.

• Pour illustrer l'étape 1, avec le problème de l'eau sucrée, on passe de traitements dans le registre de la langue naturelle tels que le suivant :

30 dL = 5 × 6 dL, donc il faudra 5 × 15 g de sucre, c'est-à-dire 75 g de sucre. …

à un traitement dans le même registre mais élargissant le domaine des scalaires aux décimaux ou rationnels :

$8 \text{ dL} = \frac{8}{6} \times 6 \text{ dL}$ ou $8 \text{ dL} = \frac{4}{3} \times 6 \text{ dL}$, donc il faudra $\frac{4}{3} \times 15$ g, c'est-à-dire 20 g de sucre.

Puis à un traitement dans le registre pré-fonctionnel suivant[6], remplaçant avantageusement le registre des tableaux :

30 dL = 5 × 6 dL, donc m. pour 30 dL = 5 × m. pour 6 dL = …

et plus généralement : m. pour $k$ fois 6 dL = $k$ × m. pour 6 dL,

registre que l'on peut rendre plus performant en introduisant une notation proche de la notation fonctionnelle :

m(30 dL) = 5 × m(6 dL),

plus généralement : m($k$ × 6dL) = $k$ × m(6 dL),

• Puis (étape 2), en mettant en place l'emploi de la concentration, avec chacun des registres précédents :

$\frac{15 \text{ g}}{6 \text{ dL}}$, ou encore 2,5 g/dL. Ainsi pour 8 dL, il faudra : $2{,}5 \text{ g/dL} \times 8 \text{ dL}$ , soit 20 g de sucre.

Plus généralement : m. pour $v$ dL = 2,5 g/dL × $v$ dL = 2,5$v$ g

m($v$ dL) = 2,5 g/dL × $v$ dL = 2,5$v$ g.

• Pour illustrer (3), il convient de comparer les traitements de deux ou trois situations de proportionnalité, où les deux grandeurs en question sont ou non de même espèce. On peut donner un autre exemple de proportionnalité de deux grandeurs d'espèces différentes, par exemple le prix d'une denrée en fonction de sa masse, sachant que 100 g coûtent 16 €. La fonction sera alors notée p. comme "prix", et des écritures telles que les précédentes permettent de travailler dans les mêmes registres :

150 g = 1,5 × 100 g, donc le prix de 150 g est 1,5 fois le prix de 100 g.

p. de 150 g = 1,5 × p. de 100 g …

p. de $k$ fois 100 g = $k$ × p. de 100 g

p. de 140 g = 0,16 €/g × 140 g = 0,16 × 140 €

p(150 g) = 1,5 × p(100 g)

p($k$ × 100g) = $k$ × p(100 g) et plus généralement p($k$ × $m$ g) = $k$ × p($m$ g)

p($x$ g) =0,16 €/g × $x$ g = 0,16 $x$ g.

Il est également indispensable de considérer le cas où les deux grandeurs proportionnelles sont de même espèce (deux longueurs, comme dans le cas des échelles ; deux prix comme dans le cas d'augmentation de prix ou de rabais). Par exemple, une augmentation de prix de 5,2%, notée a, associe à chaque prix $p$ € une augmentation a($p$ €) et on peut la calculer en utilisant l'une des relations suivantes :

a($k$ × 100 €) = $k$ × a(100 €) = $k$ × 5,2 € et plus généralement a($k$ × $p$ €) = $k$ × a($p$ €)

a($p$ €) = 0,052 × $p$ €

La particularité d'un tel cas réside dans le fait que la grandeur quotient est un "nombre pur", ce qui se traduit par l'absence d'unité accolée au coefficient de proportionnalité. Ici, le coefficient de proportionnalité et la grandeur quotient sont confondus.

• Enfin, pour l'étape 4, la comparaison de ces trois modélisations en termes de grandeurs permet de dégager les aspects communs aux trois situations, en passant des grandeurs à leurs mesures. On est alors amené à considérer les trois fonctions numériques, notées respectivement $m$, $p$ et $a$ :

[6] Pour alléger l'exposé, l'emploi de la procédure additive n'est traité pour aucun des exemples qui suivent.

| | | |
|---|---|---|
| $m(v) = 2{,}5v$ ou encore : $m : v \mapsto 2{,}5v$ | $p(m) = 0{,}16m$ ou encore : $p : m \mapsto 0{,}16\,m$ | $a(p) = 0{,}052\,p$ ou encore $a : p \mapsto 0{,}052\,p$ |
| Elle possède la propriété : $m(k\,v) = k\,m(v)$ | Elle possède la propriété : $p(k\,m) = k\,p(m)$ | Elle possède la propriété : $a(k\,p) = k\,a(p)$ |

On mesure mieux l'élévation du niveau d'abstraction pour passer de ces fonctions "linéaires" (contextualisées par le choix de la lettre pour les désigner, et par le choix de la lettre pour désigner la variable, sans que les ensembles de définition et d'arrivée soient clairement précisés) à *l*a fonction linéaire (qui est désignée par une lettre – initiale du mot "fonction" – indépendante de tout contexte, dont les ensembles de départ et d'arrivée sont précisés et étendus sans justification à l'ensemble des nombres en 3e et à **R** en classe de 2e) :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto a\,x$$

c'est-à-dire telle que $f(x) = ax$, et qui possède la propriété : $f(k\,u) = k\,f(u)$.

Les exemples contextualisés du type "prix de *m* kg", puis leurs formes plus symboliques "p. de *m* kg" et p(*m* kg) aident à donner du sens à la lecture orale "*f* de *x*" de $f(x)$.
Il reste à donner un nom à cet objet "*f* de *x*", nom qui évoque le moins possible un contexte précis. Le mot "image" à institutionnaliser, fait référence de manière métaphorique au domaine de l'optique, la fonction étant comparée à un faisceau lumineux qui prend des éléments dans l'ensemble de départ et les "projette" dans l'ensemble d'arrivée[7]. Notons que l'expression "valeur de *f* en *x*" fait implicitement allusion à une mesure de grandeur, non précisée. Quant au mot "antécédent", son emploi fait référence à son étymologie. Dans les pays anglo-saxons, on le remplace parfois par "*preimage*" ou par "*inverse image*".

Faire vivre auprès des élèves les modélisations en termes de fonctions d'une grandeur dans une autre est un moyen pour le professeur de montrer aux élèves ce que l'on va pouvoir abstraire dans toute situation de proportionnalité, … moyen dont il se prive en passant directement à la fonction linéaire abstraite, faute de disposer de notations disponibles pour traiter les grandeurs (présence des unités dans les relations manipulées).
Notons cependant que la modélisation en termes de fonctions d'une grandeur dans une autre est implicitement exigé dans le registre graphique, car il est souvent demandé à l'élève d'indiquer les unités aux extrémités des axes, ce qui revient à utiliser la grandeur longueur $\mathbf{R}^+$[unité graphique] pour représenter symboliquement chacune des deux grandeurs $\mathbf{R}^+$[u] et $\mathbf{R}^+$[v] en question[8].

Tout ce qui précède légitime le choix de $\mathbf{R}^+$ comme ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction linéaire, mais ne justifie pas qu'on l'étende à **R** tout entier. Le traitement de cette difficulté, souvent esquivée dans l'enseignement, est abordé dans le paragraphe suivant.

## 4. Comment justifier le choix de R comme ensemble de départ d'une fonction linéaire ?

Une réponse possible consiste à traiter un exemple de grandeur qui soit une fonction affine d'une autre, et s'intéresser aux accroissements (des mesures) de la première grandeur autour d'une valeur : $x - x_0$. Ceux-ci sont des nombres relatifs, et la prise en considération de tels

[7] Source (entre autres) : Bertrand Hauchecorne, 2003, *Les mots & les Maths*, Ellipses.

[8] Ces notations traduisent le fait qu'une grandeur peut être modélisée comme une demi-droite vectorielle, ayant pour base n'importe quel élément non nul : ici, les lettres u et v désignent les unités choisies dans chacune des deux grandeurs, dont elles constituent une base.

accroissements est une des raisons mathématiques principales de l'introduction de ces nombres (la question de leur dénomination sera abordée au paragraphe suivant). Ces accroissements et ceux qui correspondent pour la deuxième : $f(x) - f(x_0)$, sont tels que leur quotient demeure constant.
Illustrons-le avec l'exemple simpliste suivant :
$f$ est la fonction qui à tout nombre positif $x$ associe $3x + 2$.
On se place en 6, et on considère les accroissements $x - 6$ et $f(x) - f(6)$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 6$ | – 5 | – 4 | – 3 | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x) - f(6)$ | – 15 | – 12 | – 9 | – 6 | – 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |

La fonction $g$, dont la table est esquissée ci-dessus, à un accroissement $h$ (ou $\Delta x$) de la variable $x$, associe $3h$ (ou $3\Delta x$), quel que soit le signe de $h$. Ce résultat justifie l'idée d'étendre l'ensemble de départ d'une fonction linéaire aux nombres "relatifs".

Il reste à trouver une situation dont la modélisation peut faire intervenir des fonctions affines, et rendant assez naturel l'examen de son comportement local autour d'un point. Le modèle empirique de la marée[9], connu sous le nom de "règle des douzièmes", peut être utilisé.
Cette règle s'énonce ainsi : pendant la première heure qui suit la marée basse, la mer monte d'un douzième ; pendant la deuxième heure, la mer monte de deux douzièmes ; pendant la troisième heure, la mer monte de trois douzièmes ; pendant la quatrième heure, de nouveau trois douzièmes puis deux douzièmes dans l'heure suivante et enfin un douzième pour atteindre la marée haute.
Sachant que dans un port, les niveaux de la mer à marée basse et haute sont respectivement de 1 m et 3,5 m, l'application de la règle conduit à la tabulation suivante :

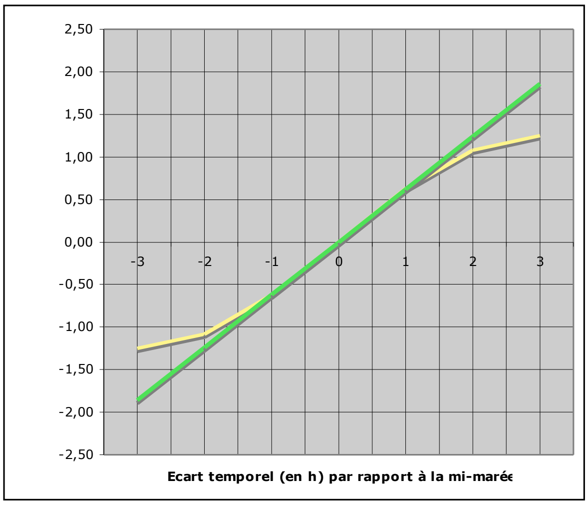
| Horaire | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Niveau (en m) | 1 | 1,21 | 1,63 | 2,25 | 2,87 | 3,29 | 3,5 |

En considérant les écarts par rapport à 3, et les écarts correspondants pour le niveau, on obtient la table suivante :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Écart par rapport à la mi-marée | – 3 | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Écart de niveau correspondant | – 1,25 | – 1,04 | – 0,62 | 0 | 0,62 | 1,04 | 1,25 |

On voit qu'il ne s'agit pas de la table d'une fonction linéaire. Mais, si l'on se restreint à l'intervalle [– 1 ; 1], on constate que la représentation graphique de la fonction affine par morceaux résultant de la méthode des douzièmes coïncide avec celle de la fonction linéaire qui à $x$ associe $0,63\,x$. (Voir la figure de gauche ci-dessous).
L'emploi d'une fonction trigonométrique constitue un modèle encore meilleur, et permet de voir en quoi la règle des douzièmes constitue une assez bonne approximation, facile à élaborer (Voir la figure de droite, où les trois modèles sont confrontés).

[9] L'exemple développé dans ce qui suit est une adaptation d'une situation proposée sur ce thème par Philippe Huet, professeur stagiaire en 2005 à l'IUFM d'Orléans.




QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (Uncompressed)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (Uncompressed)
sont requis pour visionner cette image.

On remarque que la propriété de proportionnalité des accroissements de la variable et des accroissements correspondants de la fonction a été sollicitée précédemment.
La démonstration de sa réciproque montre bien l'intérêt de considérer des accroissements par rapport à une valeur donnée $x_0$, et les accroissements correspondants par rapport à la valeur $y_0$.
En effet, si le quotient de $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ est constant, et égal à $k$, alors de $f(x) - f(x_0) = k(x - x_0)$, on déduit immédiatement $f(x) = kx + b$. Ainsi, $f$ est une fonction affine.

La manière de décrire les grandeurs auxquelles on s'intéresse (accroissement ? écart ? absolu ? relatif ?) est un problème délicat, au cœur des approches pluri-disciplinaires. Cette question fait l'objet du paragraphe suivant.

## 5. Fonctions et grandeurs : éléments de langage

Le programme de Terminale ES de 1997 attirait l'attention sur ce point, dans un paragraphe intitulé "Liaison avec d'autres disciplines", en particulier autour de la notion de croissance, d'où les deux premières colonnes du tableau ci-dessous sont extraites, la dernière faisant l'objet de commentaires de ma part.

| Objets mathématiques | Expressions courantes | Commentaires |
|---|---|---|
| $f(b) - f(a)$ | Accroissement absolu de $f$ entre $a$ et $b$ | Cet accroissement absolu est un nombre relatif, ce qui ne facilite pas le travail du professeur de mathématiques. |
| $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ | Accroissement moyen de $f$ entre $a$ et $b$ | Cette dénomination suppose connu le fait que pour une fonction affine, cet accroissement est constant. D'où l'idée, pour une fonction quelconque, de qualifier cet accroissement de "moyen", comme on le fait pour une vitesse moyenne. |

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ | Accroissement relatif de *f* entre *a* et *b* | Cet accroissement est qualifié de "relatif" car on le compare à la valeur "initiale" prise par *f*. C'est un nombre sans dimension (rapport de deux grandeurs de même espèce), contrairement au taux d'ac-croissement précédent, qui en général n'en est pas un (et qui, selon certaines définitions, n'est donc pas un taux !). |

Pour décrire la croissance d'une fonction sur un intervalle, le programme de 2$^e$ évoque des formulations provisoires telles que "*f* conserve l'ordre" avant de donner la définition formelle attendue, dont la difficulté est bien connue aussi bien du point de vue de l'enseignement que de celui de l'apprentissage.

L'approche par les grandeurs permet des explications d'un autre type : une fonction *f* est croissante sur l'intervalle I si tous les accroissements moyens de *f* entre deux valeurs *a* et *b* de I sont positifs. Ces accroissements moyens ne sont autres que les coefficients directeurs des sécantes à la courbe passant par deux de ses points. Autrement dit, on peut traduire qu'une courbe "monte" par le fait que toutes ses sécantes "montent". Formulation qui a l'avantage de mettre en valeur l'utilité de la quantification sur deux éléments de I, avantage que la formulation transitoire – et très souvent employée – "si *x* augmente, *f*(*x*) augmente" ne présente aucunement.

Savoir interpréter un quotient tel que $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}$ en termes de grandeurs sous-jacentes, par exemple : $\dfrac{f(t)\text{ m}-f(2)\text{ m}}{t\text{ s}-2\text{ s}}$, égal à $\dfrac{f(t)-f(2)}{t-2}$m/s, est indispensable pour comprendre une introduction de la notion de nombre dérivé à partir de la notion de vitesse moyenne et de vitesse instantanée. De même que des écritures telles que :

$$v_0 = \frac{72\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{72000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \frac{36\text{ km}}{1\text{ h}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{v-v_0}{t} = \frac{10\frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\times 60\text{ s}} = \frac{-10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{240\text{ s}} \approx -0{,}04\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

font comprendre que accélération moyenne pour une vitesse passant en 4 minutes de 72 km/h à 36 km/h est égale à – 4 cm/s par seconde, ce que l'on note – 4 cm/s$^2$.

Le lecteur trouvera dans les actes des journées APMEP de La Rochelle une description de l'enseignement en Allemagne des fonctions en relation avec les grandeurs[10]. Le paragraphe suivant examine comment cette question est abordée en Grande Bretagne.

## 6. Fonctions de référence et grandeurs en Grande Bretagne

[10] Conférence intitulée "La place des grandeurs dans la construction des mathématiques" aux Journées de l'APMEP 2008, à La Rochelle, André Pressiat.

L'introduction d'une fonction polynomiale du second degré à l'aide de situations de recherche de maximum d'une fonction décrivant une grandeur en fonction d'une autre est classique. L'aspect grandeur y est souvent rabattu sur leurs mesures. Les manuels anglais montrent l'intérêt de mettre en avant non pas la fonction "carré" elle-même, mais la proportionnalité d'une grandeur au carré d'une autre. Ils utilisent pour cela le symbole α qui signifie "être proportionnel à".

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

Le mot "quantities" signifie "grandeurs". Dans tous les exemples, les lettres $x$ et $y$ désignent des mesures de grandeurs, les unités étant à chaque fois précisées dans les exemples et exercices. Le lecteur notera que les fonctions sont définies à l'aide d'une égalité de la forme $y = \ldots$, la notation $f$ ou $f(x)$ n'étant jamais utilisée. Cette manière de faire facilite la modélisation mathématique de phrases telles que : "La violence d'un choc est proportionnelle au carré de la vitesse", à l'aide de formalisme tels que : $V \alpha v^2$, $V = k\, v^2$. Dans le manuel qui sert ici de référence[11], les lettres utilisées ne se limitent pas au couple $x$, $y$. Un autre exemple classique concerne la chute des corps : la phrase "La distance parcourue par un corps en chute libre varie comme le carré du temps", après le choix convenable d'une origine et d'une unité (m) pour mesurer la distance parcourue $x(t)$ et le choix d'une origine et unité de temps (s) se traduit par : $x(t) = a\, t^2$. La nature un peu mystérieuse du coefficient $a$ peut être éclairée par une formulation moderne du travail de Galilée, qui utilise le langage des proportions et énonce ce que nous noterions aujourd'hui sous la forme[12] :

$$\frac{x(t)}{x(t')} = \left(\frac{t}{t'}\right)^2$$

En donnant à $t'$ une valeur fixée $t_0$, on en déduit : $x(t) = \dfrac{x(t_0)}{t_0^{\,2}}\, t^2$. Le coefficient $a$ est donc la mesure d'une grandeur qui est le quotient d'une longueur par le carré d'une durée, dont l'unité est donc : m/s$^2$.

Le fait de mettre l'accent sur la proportionnalité à une fonction telle que "$y = x^2$" permet de ne pas se limiter à des situations qui se modélisent avec cette fonction, ce qui conduit parfois à

[11] Tony Banks and David Alcorn, Mathematics for AQA GCSE Higher Tier, 2005, Causeway Press Limited.

[12] Galilée ne s'autorise que la considération de rapports de grandeurs de même espèce. Cette utilisation des proportions est souvent considérée comme un obstacle à l'émergence de la notion de fonction.

ajuster d'une manière artificielle les paramètres de la situation à modéliser. Il permet par ailleurs d'expliquer en quoi cette fonction est une fonction "de référence".

Examinons le traitement dans le manuel anglais du sens de variation des fonctions précédentes :

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

Dans la partie précédant le résumé ci-dessus :

- pour $n = 1$, c'est-à-dire pour les fonctions linéaires, la justification donnée est la suivante : lorsque $x$ augmente avec un pas constant, $y$ augmente avec un pas constant ; $k$, constante de proportionnalité est donné par le gradient de la représentation graphique.
- Pour $n > 1$, lorsque $x$ augmente avec un pas constant, $y$ augmente avec un pas qui est lui-même croissant ; lorsque $k$ augmente, la courbe est plus pentue.
- Pour $0 < n < 1$, lorsque $x$ augmente avec un pas constant, $y$ augmente avec un pas qui est cette fois décroissant …

Un chapitre ultérieur, intitulé "Using graphs", donne une large place au traitement graphique des relations fonctionnelles "temps-distance" et "temps-vitesse", comme le montrent les extraits figurant sur la page suivante.

Le lecteur aura remarqué que la notion de proportionnalité inverse tient une place égale à la proportionnalité directe (la notion de proportionnalité étant étendue par rapport à sa signification en France, en passant des seules fonctions linéaires – $y = kx$ – aux fonctions de la forme $y = k\,x^2$, $y = k\,x^3$, …, $y = k\,x^n$). Pour ce qui concerne la proportionnalité inverse, restreignons-nous au cas des fonctions de la forme $y = k\,/\,x$. Au lieu de focaliser l'attention sur la fonction "inverse", l'approche à partir des grandeurs conduit à considérer des fonctions $y$ telles que $y \propto 1/x$, ce qui conduit à travailler avec des grandeurs inversement proportionnelles (selon la terminologie française). Cette manière de faire – l'emploi de la locution "grandeurs inversement proportionnelles est assez rare dans les pratiques en 2^e^ –évite l'introduction d'exemples artificiels dans lequel les paramètres de la situation sont ajustés pour déboucher sur la fonction "inverse". Ainsi, l'exemple des rectangles d'aire constante, où l'on étudie la dépendance d'une des dimensions en fonction de l'autre, est plus facile à mettre en scène pour une aire constante égale à 12 cm$^2$, que pour une aire égale à 1 cm$^2$.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime™ et un
décompresseur TIFF (non compressé)
sont requis pour visionner cette image.

La formalisation proposée précédemment, mobilisant le registre des grandeurs mesurées, donne lieu ici à une mise en forme du type suivant. La longueur d'un rectangle d'aire 12 $\text{cm}^2$ est une fonction, qui à chaque largeur $l$ cm associe la longueur $\dfrac{12\ \text{cm}^2}{l\ \text{cm}}$, c'est-à-dire $\dfrac{12}{l}$ cm :

$$l\,\text{cm} \mapsto \frac{12}{l}\,\text{cm}$$

Le traitement d'un autre exemple classique (vitesse moyenne en fonction de la durée, la distance à parcourir étant constante, égale par exemple à 25 km, conduit de même à la fonction :

$$t\,\text{h} \mapsto \frac{25}{t}\,\text{km/h}$$

La comparaison de ces deux modélisations incite à s'intéresser aux seules mesures des grandeurs en jeu, en faisant abstraction de leur nature et des unités. On est alors conduit à considérer les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{k}{x}$$

La fonction "inverse" est, parmi celle-ci, la fonction "de référence" : c'est d'ailleurs celle dont le manuel anglais donne la représentation graphique (en remarquant qu'elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$).

Une remarque au sujet du choix du repère pour faire de telles représentations : lorsqu'on représente graphiquement une fonction traduisant la dépendance d'une grandeur $G_1$ par rapport à une autre grandeur $G_2$, on choisit sur chacun des axes une unité graphique en relation avec les unités choisies dans $G_1$ et $G_2$. Le repère ainsi constitué n'a alors aucune raison d'être orthonormal (il est orthogonal pour des raisons pratiques : quadrillage des feuilles …). En revanche, lorsqu'on passe aux "fonctions de référence" que ces situations contextualisées en termes de grandeurs permettent de dégager, le recours à un repère orthonormal peut être motivé : c'est précisément le cas si l'on veut évoquer le lien entre la représentation graphique de la fonction "carré" et celle de la fonction "racine carrée", ou si l'on veut faire remarquer que la représentation graphique de la fonction "inverse" admet la droite d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

Le passage de fonctions de la forme $y = k\,x^2$ à la fonction carré, de fonctions de la forme $y = k / x$ à la fonction "inverse" trouve un écho dans les programmes actuels de Terminale. La prise en considération de l'équation différentielle $y' = k\,y$ (au lieu de la seule équation différentielle $y' = y$) est liée au fait que les unités choisies pour mesurer les "quantités" $y'$ et $y$ forcent la présence d'un coefficient $k$ dans l'équation, coefficient qui ne peut pas être rendu égal à 1. L'introduction par ce moyen de la fonction exponentielle "naturelle" est plus délicate …

L'emploi de la "modélisation" pour enseigner les mathématiques rend incontournable la prise en compte du cadre des grandeurs, intermédiaire entre les phénomènes et le divers empirique et les objets mathématiques qui les schématisent (nombres, formules, fonctions, équations, …), les mathématiques ainsi construites permettant en retour une modélisation des phénomènes les plus divers. L'objet de cet exposé était de mettre en évidence certaines étapes de cette schématisation qu'une longue tradition a eu tendance à passer sous silence dans l'enseignement en France, et ceci dès le collège. Ces étapes, prises en charge facilement par certains élèves, manquent à d'autres, les privant de moyens de contrôle de leurs raisonnements et calculs, et du sens de ces derniers. La contrepartie pour le professeur consiste à faire vivre des moyens de représentation transitionnels, à propos desquels des exemples ont été proposés, relatifs à l'articulation entre l'étude des grandeurs et des fonctions.

## Éléments de bibliographie

A.P.M.E.P, (1982) Grandeur, mesure, collection Mots, brochure n° 46.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. (1999-2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x* **55**, 5-32.
CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations, *Petit x* n°59, pp. 43-76, IREM de Grenoble.
Document “Ressources pour les classes de 6$^e$, 5$^e$, 4$^e$ et 3$^e$” :
http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm

- Proportionnalité – Fonctions :
  http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_proportionnalite.pdf
- Grandeurs et mesures :
  http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_grandeurs.pdf

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang (SA), Berne.
PRESSIAT A., (à paraître 2009), *La place des grandeurs dans la construction des mathématiques*, Actes des Journées APMEP 2008 de La Rochelle.