L’enseignement des fonctions à la transition lycée – université

Michèle Artigue
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Diderot – Paris 7

Résumé : Dans ce texte, nous présentons d’abord un ensemble d’outils conceptuels que la recherche didactique a progressivement développés, utiles pour comprendre ce qui se joue à la transition lycée-université en ce qui concerne l’enseignement des fonctions. Nous abordons ensuite cette transition, en considérant des tâches qui nous semblent emblématiques de la culture du lycée dans le domaine des fonctions, et en les comparant à celles proposées au début de l’université. Enfin, nous en venons à des informations concernant les étudiants eux-mêmes, en nous appuyant notamment sur des travaux récents réalisés dans le cadre des IREM.

I. Introduction

Ce texte concerne l’enseignement des fonctions. Il cherche à préciser ce qui se joue concernant cet enseignement dans la transition lycée-université en France. Il aborde donc, à travers un domaine mathématique précis, une question plus globale, celle de la transition lycée-université qui a fait l’objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques et nous renvoyons le lecteur intéressé à (Holton, 2001), (Artigue, 2004, 2005), (Gueudet, 2008) pour une présentation synthétique de l’état des connaissances dans ce domaine. L’enseignement et l’apprentissage des fonctions est lui aussi un thème qui a fait l’objet de recherches très nombreuses (cf. (Dubinsky & Harel, 1992), (Tall, 1996), (Kieran, 2007) pour des visions synthétiques) et, pour aborder la question de la transition lycée-université, nous disposons donc en particulier d’un certain nombre d’outils conceptuels que cette recherche a développés ou exploités. Nous présentons brièvement dans la première partie de ce texte ceux qui nous semblent les plus pertinents pour aborder la question à l’étude. La transition étudiée est d’abord, comme toute transition, un phénomène institutionnel. C’est pourquoi nous l’approchons d’abord sous cet angle dans la seconde partie du texte, en essayant de cerner les continuités et discontinuités existantes entre les tâches proposées au lycée et à l’université. Pour cela, nous considérons quelques sujets de baccalauréat récents qui nous semblent emblématiques de la culture développée aujourd’hui au lycée en ce qui concerne les fonctions dans la filière S, et nous les comparons aux tâches proposées dans des fiches de début d’université après avoir évoqué la thèse de Praslon (1999) qui a constitué un travail pionnier dans ce domaine. Nous en venons ensuite dans la troisième partie aux étudiants eux-mêmes et, en nous appuyant notamment sur des travaux récents menés au sein de la commission inter-IREM Université (CI2U), nous montrons la fragilité des connaissances avec lesquelles beaucoup d’étudiants arrivent à l’université, par rapport à ce qui est attendu à la fin de la scolarité secondaire. Cette fragilité ne peut que renforcer les difficultés de la transition[13].

II. Des outils conceptuels pour approcher la transition dans le domaine des fonctions

Comme mentionné ci-dessus, de nombreux outils sont disponibles pour approcher l’apprentissage et l’enseignement des fonctions. Nous présentons dans cette partie un certain

[13] Le fait que l’université constitue en France, pour beaucoup d’étudiants de mathématiques, un choix par défaut contribue sans aucun doute à cette distance observée entre les attentes et la réalité.

nombre d'entre eux qui nous semblent particulièrement efficaces pour l'étude de la transition lycée-université. Cette présentation est très synthétique et nous renvoyons le lecteur aux références données pour plus de détail. Nous abordons successivement des outils qui concernent :

- l'identification de niveaux de conceptualisation de la notion de fonction ;
- l'identification de différents registres de représentation de cette notion et l'analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres ;
- l'identification de différents points de vue possibles sur cette notion ;
- l'identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches engageant la notion de fonction ;
- la caractérisation des organisations mathématiques dans lesquelles intervient cette notion.

II.1. L'identification de niveaux de conceptualisation de la notion de fonction

Nous souhaiterions mentionner dans cette rubrique deux constructions initialement proches mais qui se sont progressivement différenciées. La première, initiée par Ed Dubinsky, est connue sous le nom de théorie APOS (Action – Processus –Objet – Schéma) (Dubinsky & Mc Donald, 2001). Inspirée des théories piagétiennes, cette théorie conçoit la progression conceptuelle comme un mouvement qui partant d'actions sur des objets conduit à des processus puis à des objets qui encapsulent ces processus, objets qui à leur tour peuvent être ensuite engagés dans de nouvelles actions et conduire à de nouveaux processus et objets. Actions, processus et objets s'organisent à leur tour en schémas. Cette construction permet de pointer le saut cognitif qui sépare un niveau conceptualisation où la fonction peut être appréhendée comme un processus de type entrée / sortie et un niveau de conceptualisation où la fonction peut être appréhendée comme un objet en soi, partiellement détaché du ou des processus dont elle émerge. Il est raisonnable de postuler, au vu des résultats des recherches, qu'un niveau de conceptualisation de type processus suffit à la réalisation de nombreuses tâches du secondaire tandis qu'un niveau de conceptualisation de type objet s'impose rapidement dans l'enseignement supérieur.
A cette distinction hiérarchique entre action, processus et objet, la théorie APOS a plus récemment superposé une autre hiérarchie, inspirée des travaux de Piaget et Garcia (1989), la triade « Intra – Inter – Trans ». Elle a elle aussi une valeur générale mais nous l'explicitons ci-après dans le cadre des fonctions.

- au niveau Intra, le sujet considère les fonctions comme des objets isolés et se concentre sur les processus dans lesquels elles sont engagées ;
- au niveau Inter, il commence à faire des connexions entre objets fonctionnels, à donner sens à l'idée de transformation engageant des fonctions ;
- au niveau Trans, il peut considérer des systèmes de transformations et les structures qui en émergent.

La deuxième construction que nous souhaiterions évoquer est celle de Tall (2004) qui perçoit le développement cognitif comme la rencontre de trois mondes successifs :

- l' « embodied world » des expériences sensori-motrices de la quantité et des variations ;
- le « proceptual world » des actions encapsulées en concepts, portées par un symbolisme qui permet de jouer avec flexibilité entre processus et concepts ;
- le « formal world » où les objets sont assujettis à des définitions formelles et les propriétés déduites via des preuves formelles.

Très tôt, pour ce qui concerne le domaine des fonctions, le premier monde est accessible et peut permettre d'approcher des notions généralement considérées comme relevant des mathématiques avancées comme celle de vitesse et d'accélération (Nemirovsky & Borba, 2004). Dans l'enseignement secondaire, l'algèbre des fonctions, les débuts d'une analyse encore très algébrisée, ce que les anglo-saxons appellent Calculus, sont au cœur du second monde, tandis que le troisième serait plus spécifiquement représentatif du rapport aux fonctions développé dans l'enseignement supérieur.

II.2 Les différents registres de représentation

La notion de registre de représentation sémiotique, introduite en didactique des mathématiques par Duval (1995) et très largement utilisée aujourd'hui est aussi une construction qui nous semble utile pour analyser la transition lycée-université dans le domaine des fonctions. A la base de cette notion, se situe le constat que les objets mathématiques ne nous étant pas directement accessibles, nous les approchons et manipulons à l'aide de représentations sémiotiques diverses. La distinction entre l'objet et ses représentations, la capacité à former, transformer, convertir des représentations d'un registre dans un autre sont des éléments clefs de la conceptualisation en mathématiques.
Pour ce qui concerne les fonctions, de nombreux registres sont susceptibles d'intervenir (Coppé, Dorier & Yavuz, 2007) :

- le registre de la langue naturelle ;
- le registre numérique des tables de valeurs ;
- le registre algébrique des formules ;
- le registre graphique des courbes ;
- le registre graphique des tableaux de variation ;
- le registre symbolique intrinsèque (celui des notations comme f, fog, f^{-1}) qui est en particulier mobilisé dans le monde des mathématiques formelles.

La recherche a bien mis en évidence les difficultés que beaucoup d'élèves éprouvent à détacher l'objet fonction de ses représentations, notamment ses représentations algébriques qui sont les plus utilisées, ainsi qu'à jouer avec flexibilité des différents registres, pour choisir le plus approprié à la résolution de telle ou telle tâche. Elle a aussi montré les difficultés qu'engendrent pour beaucoup d'élèves le passage d'un registre à un autre dès qu'il n'y a pas congruence entre eux, c'est-à-dire dès que la conversion ne se résume pas à une traduction mot à mot fidèle à l'ordre des termes. Un exemple souvent cité en est fourni par le cas des fonctions conjointes (cf. figure 1 ci-après)

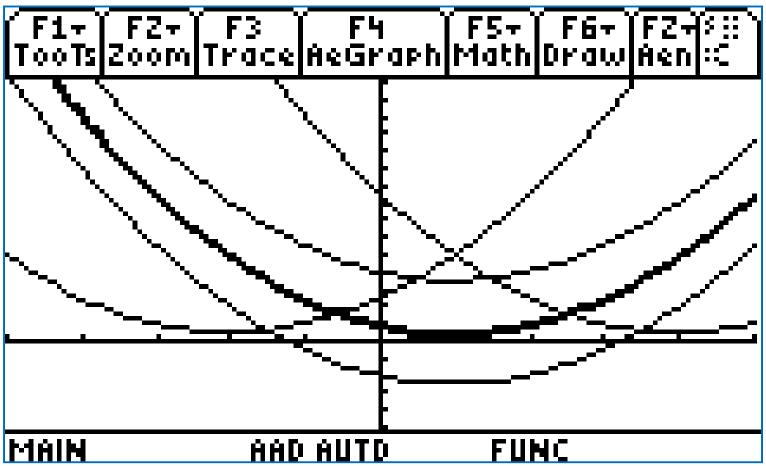


Figure 1 : Fonctions conjointes

Sur cette figure 1, sont tracées plusieurs représentations graphiques associées à des fonctions conjointes de la fonction f dont la représentation graphique est tracée en gras. Il est bien connu que si l'on demande à des élèves de lycée d'associer les représentations tracées à celles des fonctions : $x \to f(x)+3$, $x \to f(x)-3$, $x \to f(x+3)$, $x \to f(x-3)$, il y aura peu d'erreurs dans les deux premiers cas qui sont des cas de conversion congruente, tandis que les réponses tendront à être inversées pour les deux derniers où les conversions sont non congruentes (une translation vers la droite se traduit par une soustraction). On peut là encore raisonnablement postuler que la transition lycée - université s'accompagne de besoins accrus de flexibilité entre registres de représentation dans des cas de non congruence et également d'une mobilisation accrue du registre symbolique intrinsèque.

II.3 Les différents points de vue sur la notion de fonction

A la distinction entre registres de représentation s'ajoute, dans le cas des fonctions, une nouvelle distinction, celle résultant de la diversité des points de vue qui peuvent être développés à propos de cet objet. Nous en distinguerons ici trois : les points de vue ponctuel, local et global. C'est avec une combinaison de points de vue ponctuel et global que débute l'enseignement des fonctions : le point de vue ponctuel de la correspondance entre un élément et son image, mais aussi le point de vue global qui permet de reconnaître les fonctions et les classer en familles : fonctions linéaires et affines, fonctions polynomiales du second degré et fonctions homographiques, fonctions sinusoïdales… Avec l'entrée dans le champ de l'analyse, un autre point de vue doit se mettre en place et s'articuler avec les précédents : le point de vue local, ce qui ne va en rien de soi tant sur le plan mathématique que cognitif comme l'ont montré divers travaux de recherche (Maschietto, 2003), (Chorlay, 2007), (Rogalski, 2008). Cette diversité des points de vue est à articuler également avec celle des registres et le rapport à ces derniers lui-même doit bouger pour leur permettre de supporter un point de vue local alors qu'il n'avaient porté jusqu'alors que des points de vue ponctuel et /ou global. Par un processus de zoom physiquement ou mentalement réalisé, la vision globale de la linéarité dans le registre graphique doit par exemple se localiser mais l'élève doit aussi devenir conscient de l'impossibilité dans le registre graphique de distinguer clairement une proximité d'ordre 0 de la proximité d'ordre 1 qui caractérise la tangence. Cette reconstruction de l'idée de linéarité nécessaire pour faire de la notion de dérivée un objet de l'analyse vue comme champ de l'approximation au-delà de son statut algébrique et formel nous apparaît comme un des enjeux de l'enseignement de l'analyse à la transition lycée – université

.

II.4 Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Une autre notion qu'il nous semble pertinent d'introduire est celle de niveau de mise en fonctionnement des connaissances due à Robert (1998). Cette dernière distingue en effet trois niveaux différents :

- le niveau technique, qui est celui des mises en fonctionnement isolées, des applications immédiates de théorèmes, définitions, formules…
- le niveau mobilisable, qui est celui des mises en fonctionnement guidées mais dépassant l'application simple d'une seule propriété
- le niveau disponible, qui est celui des mises en fonctionnement sans indication des connaissances nécessaires à la résolution

Les travaux de recherche montrent bien comment ces niveaux de mise en fonctionnement des connaissances peuvent varier pour une même tâche, suivant la façon dont elle est énoncée, suivant ensuite la façon dont elle est gérée. On peut raisonnablement faire l'hypothèse que, dans la transition lycée-université, en ce qui concerne les fonctions comme d'autres notions déjà rencontrées au lycée, on observe des sauts dans les demandes faites aux étudiants qui peuvent s'interpréter en utilisant ces niveaux.

II.5 Les organisations mathématiques

Cette dernière construction se situe, quant à elle, dans le cadre plus vaste de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard (1992, 2002). Dans cette théorie, la notion d'institution est une notion première et différentes notions ont été introduites pour soutenir l'analyse des pratiques institutionnelles qui façonnent les pratiques individuelles, et donc les apprentissages possibles des élèves et des étudiants. Les pratiques sont modélisées en termes de quadruplets dénommés praxéologies. Au niveau le plus élémentaire se situent les praxéologies dites ponctuelles constituées d'un type de tâche, d'une technique ou manière de réaliser la tâche, d'un discours technologique qui sert à expliquer et justifier la technique et d'une théorie qui structure et légitime ce discours technologique. Les praxéologies ponctuelles s'organisent ensuite en praxéologies locales fédérées autour d'un type de discours technologique, voire régionales autour d'un corpus théorique. Et c'est via l'étude de ces organisations praxéologiques que s'effectue celle des organisations mathématiques de l'enseignement. Des travaux sur la transition secondaire-supérieur exploitant cette approche comme ceux de Bosch, Fonseca & Gascón (2004) concernant la notion de limite en Espagne ont mis en évidence des différences importantes entre les organisations mathématiques du secondaire et du supérieur. Selon ces travaux, dans les praxéologies de l'enseignement secondaire, souvent incomplètes, c'est le pôle pratique constitué des tâches et des techniques qui est dominant. Les praxéologies ponctuelles vivent souvent relativement isolées sans qu'un effort systématique soit fait pour les structurer au niveau local ou régional. Les associations tâches-techniques apparaissent ainsi comme des associations rigides : à un type de tâche correspond une technique bien précise qui est routinisée. A l'opposé, les praxéologies universitaires sont centrées sur leur pôle théorique et envisagées d'abord à un niveau très général, souvent régional, avec la supposition implicite que les praxéologies ponctuelles et locales développées dans l'enseignement secondaire constituent un socle sur lequel ces praxéologies régionales peuvent prendre sens. La réalité qui est décrite ici est une réalité étrangère et une extrapolation à la situation française risque d'être abusive mais les catégories introduites nous semblent utiles pour questionner cette situation.

III. La transition lycée – université : du côté des tâches

III.1. Le lycée

Comme annoncé, nous allons tout d'abord essayer de cerner les attentes du lycée à travers l'examen de quelques sujets de baccalauréat. Les fonctions étant introduites dans l'enseignement secondaire dans le contexte des fonctions d'une variable réelle, c'est le travail sur ces objets qui façonne le rapport au monde fonctionnel pour les élèves du lycée, et c'est à travers les exercices du baccalauréat qui les concernent que nous avons essayé de cerner les attentes. Ce faisant, nous sommes bien conscients de ne pas envisager le paysage fonctionnel des élèves dans sa globalité. Le travail sur les nombres complexes, l'étude des transformations géométriques par exemple contribue au monde fonctionnel des élèves, même si c'est de façon moins directe que pour les fonctions d'une variable réelle. Nous nous sommes de plus bornés à sélectionner quelques exemples qui nous paraissaient, au vu de l'ensemble des sujets proposés en 2006 et 2007 en filière S, relativement représentatifs mais nous n'avons pas cherché à justifier a posteriori cette

représentativité par une étude systématique de l'ensemble des sujets sur une période donnée. Ce travail reste à faire.
Les sujets sélectionnés sont au nombre de trois : les sujets de bac pour la métropole en 2006 (sujet 1) et 2007 (sujet 2) et le sujet de Pondichery en 2006, plus particulièrement les parties de ces sujets concernant l'étude de fonctions. Les sujets passés en métropole sont ceux qui concernent la grande majorité des étudiants et c'est pourquoi nous les avons choisi. Nous leur avons ajouté le sujet de Pondichery 2006 parce qu'il est différent, au moins pour ce qui concerne les fonctions, et représente un type de sujet qui est apparu avec la réforme du lycée de 2000. Nous reproduisons ci-après les parties des sujets concernées :

Sujet 1 :

Soit f la fonction définie sur *IR* par : $f(x)= x^2 \exp(1-x)$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O,i,j) d'unité graphique 2 cm.
a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Quelle conséquence graphique pour (C) peut-on en tirer ?
b. Justifier que f est dérivable sur *IR*. Déterminer sa fonction dérivée f'.
c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe (C).

Sujet 2 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par : $f(x)= x - \ln(1+x)/(1+x)$
La courbe (C) représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Etude de certaines propriétés de la courbe (C)
1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle de définition de f : $]-1,+\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on pose $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D).

Partie B : Etude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f
1. Démontrer que si x appartient à [0,4], alors $f(x)$ appartient à [0,4]
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0=4$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout n de *IN*.
a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe (C) et la droite (D), placer les points de (C) d'abscisses U_0, U_1, U_2, U_3.
b. Démontrer que pour tout n de *IN*, U_n appartient à [0,4].
c. Etudier la monotonie de (U_n).
d. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. On désigne par l sa limite.
e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de l.
Une représentation graphique de f, non reproduite ici, est donnée.

Sujet 3 :

Evolution d'une population animale en laboratoire
On effectue une étude sur un échantillon de population dont l'effectif initial est égal à 1000 et, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps qui, d'après le modèle choisi est dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$ et satisfait l'équation différentielle (E) y'=-y(3-lny)/20

1. Démontrer que f dérivable, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et vérifie pour tout t f'(t)=-f(t)(3-ln(f(t))/20 si et seulement si, pour tout t, g=ln(f) vérifie g'(t)=g(t)/20-3/20
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle (H) z'=z/20-3/20.

3. En déduite qu'il existe un réel C tel que f(t)=exp[3+Cexp(t/20)]
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
f(t)=exp[3-3exp(t/20)]
   a) Déterminer la limite de la fonction en $+\infty$.
   b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$
   c) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation $f(t)<0{,}02$

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Dans le sujet 1, l'exercice qui correspond à l'extrait proposé est classique : étude d'une fonction combinant exponentielle et polynômes conduisant à un tableau de variation et un tracé de courbe et limité. Dans le second sujet, la fonction étudiée est cette fois une combinaison un peu plus complexe incluant une fonction logarithme. Cette fois-ci une représentation graphique est fournie. L'étude des variations passe par l'étude d'une fonction intermédiaire correspondant au numérateur de la dérivée qui est donnée comme c'est l'usage mais le sens de variation de cette fonction auxiliaire est lui-même donné. On associe ensuite à la fonction f une suite récurrente dont on fait montrer qu'elle converge vers 0, le seul point fixe de f sur l'intervalle considéré (résultat démontré auparavant dans le cadre géométrique et qu'il faut réinterpréter). Le thème du sujet 3 est, lui un peu différent et représentatif d'un type de sujet apparu avec la réforme des années 2000, comme indiqué plus haut. Il concerne l'étude de l'évolution d'une population par l'intermédiaire d'une modélisation faisant appel à une équation différentielle. Celle-ci est donnée directement à l'élève sans aucune justification et il ne lui est pas non plus demandé de la commenter. Par un changement de fonction inconnue, on se ramène à une équation différentielle linéaire que l'élève peut résoudre (pour une fois, le modèle n'est cependant pas le modèle logistique). Puis l'on revient à la solution de l'équation initiale (qui est donnée) et on pose quelques questions dont une dans le langage de la situation après l'avoir faite résoudre mathématiquement.
Nous n'entrerons pas dans les détails de l'analyse de ces sujets mais voudrions souligner qu'ils présentent un certain nombre de caractéristiques qui nous semblent bien représentatives de la culture du lycée, même si l'on peut légitimement penser que les expériences vécues au lycée sont plus riches que ce que nous montrent des sujets de baccalauréat :

- les tâches sont découpées en de multiples sous-tâches ; les niveaux de fonctionnement des connaissances mis en jeu se situent au plus au niveau mobilisable et il y a peu d'adaptations à effectuer ;
- la résolution suit une organisation routinière, tout à fait prédictible ;
- les aides fournies, de manière directe ou indirecte, sont très nombreuses ;
- il n'y a pas d'autonomie donnée à l'élève dans le choix des registres de représentation
- les besoins techniques de la résolution des tâches sont assez limités, les fonctions en jeu familières et spécifiées ;
- des représentations graphiques sont présentes mais elles sont relativement peu exploitées ;
- l'analyse qui y est en jeu est une analyse très algébrisée, encapsulée dans quelques théorèmes puissants, qui peut se satisfaire de conceptions ponctuelles et globales de la notion de fonction.

A quelle distance de cette culture se situe l'enseignement au début de l'université ? C'est ce que nous allons considérer maintenant, en évoquant d'abord un travail pionnier dans ce domaine : la thèse de Frédéric Praslon, un travail déjà ancien puisque la thèse a été soutenue en 1999 mais dont les analyses nous semblent toujours d'actualité.

III.2 La thèse de Frédéric Praslon

Dans sa thèse, Praslon étudie la transition lycée – université en utilisant comme filtre la notion de dérivée et son environnement et il combine pour ce faire une perspective institutionnelle et des critères d'analyse hérités des travaux d'inspiration cognitive et épistémologique comme ceux évoqués dans la parttie I. L'étude des rapports institutionnels, très fine, est effectuée à travers celle des programmes du secondaire, de différents manuels, de fiches d'exercices de DEUG. L'étude des rapports personnels des étudiants de première année à la notion de dérivée et celle de l'évolution s'effectue à travers un test d'entrée à l'université, ainsi que des ateliers organisés sur des questions sensibles (définitions, généralisation…) au fil de l'année.
Que ressort-il de l'étude institutionnelle ? Tout d'abord qu'à la fin du lycée, l'univers des élèves de la filière S en ce qui concerne cette notion de dérivée est déjà un univers conséquent mais qu'il s'enrichit considérablement dans la première année de DEUG. Pour le mettre en évidence, Praslon utilise ce que l'on appelle des cartes conceptuelles où les notions et leurs inter-relations comme les types de problèmes qui leur sont associés sont visualisés. Autre résultat qui n'a rien d'évident à l'époque, il montre que la transition qui n'est pas une transition brutale du proceptuel vers le formel, de l'intuition vers la rigueur, mais qu'elle est le terrain d'une accumulation de micro-ruptures. La transition s'accompagne en effet d'une modification entre divers équilibres :

- entre les dimensions outil et objet de la dérivée, au sens de (Douady 1986) ;
- entre l'étude d'objets particuliers et celles d'objets définis par des conditions générales ;
- entre des techniques algorithmiques et des méthodes plus générales ;
- entre des démonstrations *ornementales* et des démonstrations *outils*.

Elle s'accompagne aussi d'une plus grande autonomie donnée dans le processus de résolution (choix de cadres, de registres de représentation, moins de questions intermédiaires), et du passage d'un répertoire réduit de tâches bien travaillées à une grande diversité de tâches impossibles à routiniser. Il s'ensuit à ses yeux un vide didactique que les étudiants doivent combler essentiellement par eux mêmes. Pour sensibiliser étudiants et enseignants à cette situation, il construit des tâches qu'il estime entre les deux cultures. Nous en donnons ci-dessous un exemple.

> On considère la fonction f d'une variable réelle périodique de période 1 définie par :
> f(x)=x.(1-x) sur l'intervalle [0, 1[(une représentation graphique sur [-2, 2] est donnée)
> Q1 : On demande si cette fonction est continue, dérivable.
> Q2 : On introduit la notion de dérivée symétrique et on demande de calculer les dérivées et dérivées symétriques si elles existent en ½, ¼ et 0 et de les comparer.
> Q3 : On demande de statuer sur les trois conjectures suivantes :
> - C1. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée symétrique en 0.
> - C2. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée en 0.
> - C3. Si une fonction définie sur IR admet une dérivée en a, elle admet aussi une dérivée symétrique en a et les deux sont égales.

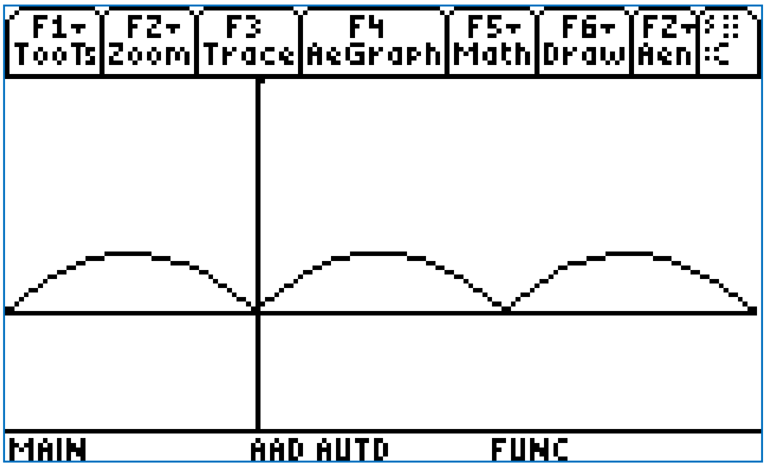


Figure 2 : Représentation graphique de la fonction f avec une calculatrice symbolique

Cette tâche ne nécessite a priori pas à l'époque d'autres connaissances que celles du lycée pour être résolue et pourtant elle est clairement hors de la culture du lycée. On y définit par exemple une fonction par morceaux et il faut comprendre que l'expression algébrique donnée n'est valable que sur un intervalle. On pose des questions sur la continuité et la dérivabilité, ces questions ne sont pas complètement nouvelles, surtout avec l'aide fournie par la représentation graphique mais elles sont marginales au lycée où la dérivée est avant tout un outil. On introduit ensuite une nouvelle notion, celle de dérivée symétrique directement par une définition formelle et il s'agit d'exploiter cette définition. Ceci aussi est non usuel, tout comme les trois conjectures générales qui sont soumises aux étudiants, même s'ils disposent, du fait des questions précédentes, des réponses à certaines d'entre elles.

Nous reviendrons dans la partie suivante sur les réponses des étudiants à ces questions. La thèse de Praslon a maintenant 10 ans, certains vides didactiques ont peut-être été au moins partiellement comblés dans les efforts faits par les universités pour s'adapter aux étudiants qu'elles reçoivent. Par ailleurs, la thèse n'aborde la transition entre lycée et université sur les fonctions que dans un contexte particulier : celui des fonctions d'une variable réelle, et même dans ce contexte, elle se centre sur la notion de dérivée. Il nous faut donc élargir la perspective si nous souhaitons appréhender la réalité de la transition. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant en rendant compte de l'analyse que nous avons faite de fiches proposées à des étudiants en début de licence.

III.3 Les fiches de DEUG (L1)

Encore une fois, nous nous appuyons sur des exemples qui nous semblent représentatifs de certains phénomènes mais l'étude menée n'est en rien systématique. Considérons d'abord deux fiches de début d'année (2007-2008) provenant respectivement de l'université Paris 7 et de l'université Bordeaux 1. Elles s'intitulent respectivement ; « Introduction ensembles, raisonnement et applications » et « Bases de logique et théories des ensembles ». La première comporte 14 exercices dont 7 sur fonctions et applications, la seconde 9 exercices dont 7 sur fonctions et applications. Elles attestent clairement qu'au début de l'université apparaît pour la notion de fonction un nouvel habitat : celui de la théorie des ensembles. Comme visible dans le chapitre concernant les fonctions de (Nardi, 2008) et dans la thèse en cours de Ridha Najar sur les modes de raisonnement à la transition lycée – université justement centrée sur le thème des fonctions, l'extension des objets fonctionnels aux ensembles et ensuite à l'algèbre des structures fait rentrer les étudiants dans un univers fonctionnel très différent de celui avec lequel ils s'étaient progressivement familiarisés dans l'enseignement secondaire. Les heuristiques, les modes d'appréhension, les modes de raisonnement et de preuve s'en trouvent profondément modifiés.
Les 7 exercices proposés dans la première fiche concernent respectivement :

- l'expression formelle de propriétés (exercice 10) ;
- la négation de propriétés (exercice 11) ;
- un calcul de limite (différence de radicaux) (exercice 12) ;
- les applications : relations avec inclusion, intersection, complémentaire (exercice 13) ;
- les notions d'injection, surjection, bijection sur un exemple $f(x)=2x/(1+x^2)$ et la détermination de l'image (exercice 14) ;
- les résultats généraux sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de la composée d'applications entre ensembles (exercice 15) ;
- la détermination d'ensembles de départ et d'arrivée pour la fonction de variable réelle qui à t associe e^{it} pour la rendre bijective (exercice 16).

Les 7 exercices proposés dans la seconde fiche concernent, quant à eux :

- le tracé du graphe de la fonction caractéristique d'une réunion d'intervalles (exercice 4) ;
- la détermination des images directes et réciproques de parties de IR (singletons, intervalles) par la fonction valeur absolue (exercice 5) ;
- la détermination de toutes les applications entre deux ensembles finis (2 et 3 éléments) et l'identification parmi elles des injections, surjections, bijections (exercice 6) ;
- la détermination des composées de deux applications données de IR dans IR² et IR² dans IR, et l'étude de leur injectivité, surjectivité, bijectivité (exercice 7) ;
- le résultat général sur l'injectivité (respectivement la surjectivité) de la composée de deux applications surjectives (respectivement injectives) (exercice 8) ;
- l'étude des fonctions affines de IR d ans IR du point de vue de l'injectivité et de la surjectivité (exercice 9) ;
- la formule du binôme : développement de $f(x)=(1+x)^n$, et exploitation pour obtenir des formules de sommation (exercice 10).

La lecture des énoncés montre bien qu'un effort réel est fait pour assurer un lien avec les connaissances antérieures, aider la prise de sens des nouvelles notions introduites en s'appuyant sur des exemples familiers (exercice 14 dans la première fiche, exercices 5 et 9 dans la seconde fiche), préparer les énoncés généraux par l'étude d'un exemple (enchaînement des exercices 6 et

7 par exemple dans la deuxième fiche), limiter la complexité technique (simplicité de la fonction rationnelle dans l'exercice 14 de la première fiche et des fonctions dont la composition est demandée dans l'exercice 7 de la seconde fiche), aider l'étudiant par des questions intermédiaires ou la donnée des résultats à établir (donnée de l'image de la fonction dans l'exercice 14 de la première fiche, de formules de sommation intermédiaires à établir dans l'exercice 10 de la seconde fiche…). Malgré ces précautions, il est indéniable que ce que demande la réalisation des exercices proposés aux étudiants ne s'inscrit pas dans la continuité des pratiques du lycée en matière de fonctions. Les nouveautés introduites sont multiples et nous nous bornerons à souligner les plus évidentes :

- La formalisation :

La formalisation avec usage des quantificateurs est une nouvelle demande particulièrement explicite dans les exercices 10 et 11 de la première fiche. Dans le premier, 9 propriétés sont à formaliser pour des fonctions f et g de IR dans IR : f est majorée ; f est paire ; f ne s'annule jamais ; f est croissante ; f n'est pas la fonction nulle ; f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ; f atteint toutes les valeurs de IN, f est inférieure à g ; f n'est pas inférieure à g. Les expressions formelles attendues sont en majorité simples au sens où elles ne comportent pas, à l'exception de deux d'entre elles, des alternances de quantifications mais elles ne sont pas ordonnées dans le sens d'une complexité croissante : la première par exemple comporte une alternance de quantificateurs et la thèse de Faïza Chellougui (2004) a bien montré les problèmes qu'elle pose aux étudiants de première année, plusieurs énoncés se présentent sous la forme de négation et demandent un reformulation, le dernier enfin demande la négation d'une implication. L'exercice 11, quant à lui, renforce le travail sur la négation des inégalités et rajoute la négation d'une conjonction mais sans introduire la négation d'une alternance de quantificateurs puisqu'il s'agit de nier les propositions suivantes : pour tout x de IR, $f(x)\leq 1$; f est croissante ; f est croissante et positive ; il existe un réel positif tel que $f(x)\leq 0$.

- La dimension ensembliste :

La description des exercices donnée ci-dessus le met clairement en évidence. Ce sont les questions d'injectivité de surjectivité, bijectivité qui sont travaillées, même lorsque ce sont des fonctions familières de IR dans IR qui sont concernées. L'exercice 14 de la première fiche et l'exercice 9 de la seconde l'illustrent clairement et nous en reproduisons ci-après les énoncés :

Exercice 14 : Soit $f : IR \to IR$ définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$. f est-elle injective ? Surjective ? Montrer que $f(IR)=[-1,1]$. Montrer que f restreinte à $[-1,1]$ est une bijection sur $[-1,1]$. Retrouver le résultat par l'étude des variations.

Exercice 9 : Soient $(a,b)\in IR^2$ et $f_{a,b}$ l'application $f_{a,b} : IR\to IR$, $x\to ax+b$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a,b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors a=c et b=d.
3. Facultatif : Interpréter cette condition en termes d'injectivité d'une certaine application.
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son inverse.

C'est dans ce nouveau langage ensembliste qu'il faut se situer pour démontrer les propriétés des fonctions. On notera la dernière question de l'exercice 14 qui marque le changement de contrat : l'étude familière des variations n'est que le moyen de retrouver un résultat à établir autrement. On notera aussi la question 3 de l'exercice 9 qui oblige à considérer cette fois une fonction de IR^2 dans l'ensemble des applications de IR dans IR, un changement de niveau d'abstraction dont la complexité n'a pas échappé à l'auteur de la fiche comme l'atteste la mention facultatif.

Même les exercices portant sur des fonctions spécifiques ne se limitent pas aux seules fonctions de IR dans IR. L'exercice 16 de la première fiche concerne l'exponentielle complexe, l'exercice 7 de la seconde fiche concerne l'application de IR^2 dans IR qui au couple (x,y) associe xy et celle de IR dans IR^2 qui à x associe le couple (x, x^2).
Enfin on trouve dans les deux fiches les exercices visant à établir les résultats classiques concernant l'image et l'image inverse d'une réunion et d'une intersection, ou les propriétés des composées de fonctions injectives et surjectives.
Les premières fiches sur les fonctions numériques montrent elles aussi des différences évidentes avec les pratiques du lycée, en particulier via l'accent mis sur la dimension locale dans l'étude des fonctions par rapport à la dimension globale et les formes renouvelées d'étude de cette dimension locale :

- études de continuité et de dérivabilité au voisinage d'un point ;
- calculs de limites et de développements limités ;
- problèmes de raccord dérivables ou continus pour des fonctions dépendant de paramètres ;
- preuve d'énoncés généraux.

Nous utiliserons pour illustrer ce point la première fiche sur les fonctions numériques de l'université de Bordeaux 1. Cette fiche comporte 16 exercices qui se répartissent de la façon suivante :

- détermination des domaines de définition de fonctions (exercice 1) ;
- utilisations directes de la définition formelle de la limite (exercice 2) ;
- montrer que la fonction qui à x associé cos(1/x) n'a pas de limite en 0 (exercice 2) ;
- calcul de limites (exercices 3, 15) ;
- continuité, dérivabilité en un point et prolongement par continuité sur des exemples (exercices 4, 5, 10, 11, 12) ;
- convergence d'une suite récurrente (exercice 6) ;
- démonstration d'un énoncé général : continuité sur [a,b] et image finie implique constance (exercice 7) ;
- application du théorème des valeurs intermédiaires à la résolution de P(x)=0 (polynôme particulier puis polynôme impair général) (exercice 8) ;
- montrer qu'une application spécifiée est une bijection. Questions sur la fonction réciproque (exercices 9, 16) ;
- démonstration d'un énoncé général : dérivées fonctions paires et impaires (exercice 13) ;
- calcul de dérivées (exercice 14).

Citons-en quelques exemples :
Exercice 2 :

1. Montrer en utilisant des quantificateurs que $\lim_{x\to 0} x^2=0$.
2. Quelle est la limite l quand x tend vers $+\infty$ de la fonction f : $x\to x/(1+x)$. Pour tout réel strictement positif ε, déterminer A tel que $(x>A \Rightarrow (|f(x)-l|< \varepsilon)$.
3. Ecrire en utilisant des quantificateurs : $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$ et $\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x)=-\infty$. Déterminer un intervalle J centré en 0 tel que : $(x\in J \Rightarrow |\ln(1+x)|<10^{-3})$.
4. En utilisant des suites, montrer que la fonction $x\to\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur IR par : f(x)=cos(x) si x>0 et f(x)=1 – sin(x)² si x≤0.

1. Montrer que f est continue sur IR.
2. Montrer que f est dérivable sur]- ∞,0[et sur]0,+ ∞[et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f est dérivable en 0. Quelle est sa dérivée ?
4. Vérifier que $\lim_{x\to 0}$f'(x)=f'(0) et donc que f' est également continue en 0.

Exercice 12 : Déterminer a et b dans IR de manière à ce que la fonction f définie sur IR+ par : f(x)= rac(x) si 0≤x≤1 et f(x)=ax²+bx+1 sinon soit dérivable sur IR+*.
Exercice 16 : On considère la fonction f définie sur I=]0,π/2[par f(x)=1/(xtanx).

1. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. Soit g sa fonction réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? Dérivable sur J ?
3. Soit b=f(π/4) ; montrer que g est dérivable en b et calculer g'(b).

On voit bien dans ces exercices le travail sur la formalisation, même s'il reste d'une technicité modeste et si l'on n'observe pas un basculement vers une analyse formelle en ε, η ; la prédominance de la dimension objet sur les dimensions outil ou processus dans le travail sur les fonctions numériques associée à la prédominance du point de vue local ; la réduction du nombre de guidages intermédiaires ; la domination des registres symbolique intrinsèque et algébrique et la quasi-disparition du registre graphique dans ses usages traditionnels sans que s'amorce la reconstruction nécessaire d'un autre rapport iconique et heuristique au registre graphique (Maschietto, 2001) ; la quasi-disparition enfin des problèmes emblématiques du lycée. Comment cela se traduit-il du côté des étudiants ?

IV. La transition lycée – université : du côté des étudiants

Nous reviendrons d'abord dans cette partie sur la thèse de Frédéric Praslon et plus particulièrement sur les réponses des étudiants à la tâche présentée dans la partie précédente, puis nous évoquerons les résultats de deux questionnaires récents posés à des étudiants entrant à l'université.

IV.1. Retour sur la thèse de Praslon

Que nous apprennent les réponses des étudiants à la tâche analysée plus haut, située à la transition entre les deux cultures secondaire et universitaire ?
A la question Q1, un tiers environ des étudiants ne perçoivent pas qu'il y a un problème : la fonction est définie par une expression polynomiale donc pour eux continue et dérivable, ou elle est continue et dérivable sur [0,1[pour cette même raison et par périodicité continue et dérivable sur IR tout entier ; un quart environ repère la non-dérivabilité en 0 et/ou en 1 et essaie de la justifier de façon algébrique ou graphique. La nécessité d'une étude locale est visiblement davantage perçue en 1 qu'en 0 et l'on peut sans doute relier ce phénomène au fait que, dans la définition de f donnée, l'intervalle est ouvert en 1 et non en 0. Cette marque symbolique est sans doute attachée pour eux aux cas où les choses ne vont pas de soi. Les arguments de ceux qui repèrent la non-dérivabilité sont du type : « f n'est pas dérivable en 0 car la courbe admet deux demi-tangentes distinctes (respectivement un point anguleux, un pic) », pour les justifications graphiques. Pour les justifications algébriques, les plus élaborées reposent en général sur l'argumentation suivante : f est dérivable ssi f(0)=f(1) et f'(0)=f'(1), puis, en utilisant l'expression donnée f(x)=x(1-x), ils concluent que la seconde condition n'est pas vérifiée puisque f'(x)=-

2x+1. On constate de plus un cloisonnement des réponses suivant les registres utilisés : graphique ou algébrique.

La question Q2, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, montre que l'introduction formelle d'une nouvelle notion ne provoque que peu de blocages ; les calculs des dérivées et dérivées symétriques en ½ et 1/.4 donnent respectivement 95% (dérivée) et 75% (dérivée symétrique) de réponses correctes, tandis qu'au point 0, l'existence et le calcul éventuel ne sont gérés correctement que dans 14% et 3% des cas respectivement. Les étudiants utilisent l'expression algébrique donnée pour f(x) pour mener les calculs, et même lorsque le résultat obtenu est en contradiction avec leur réponse à Q1, ils ne le repèrent pas.

Il y a peu de réponses à la question Q3 et ce n'est pas la fonction f qui est en général utilisée comme contre-exemple à C2 mais la fonction valeur absolue qui est l'une des fonctions de référence au lycée.

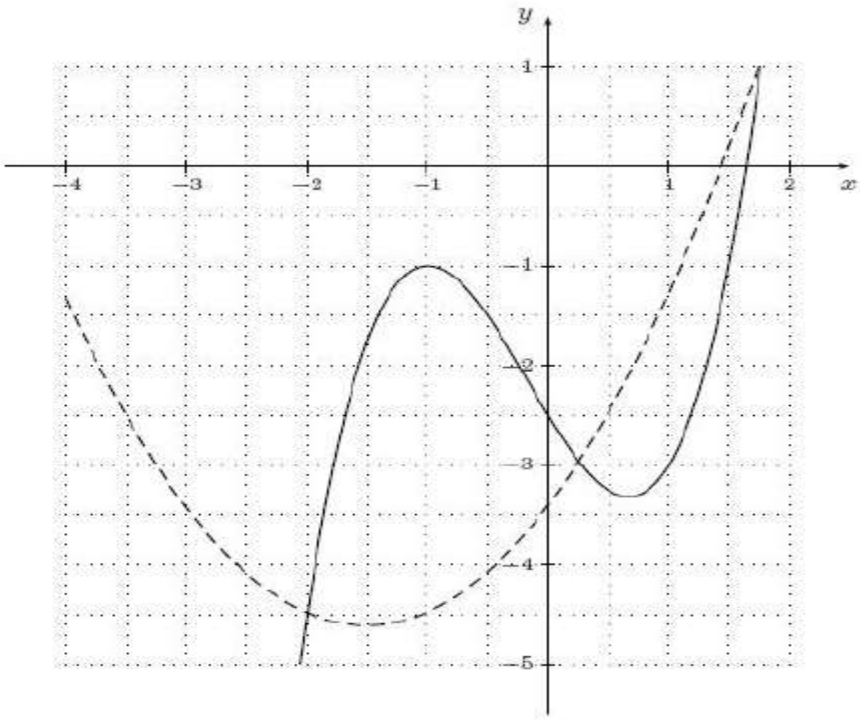
On le voit donc, les étudiants ne sont d'une part pas bloqués face à ces questions non usuelles mais ils sont très peu outillés pour les résoudre. Ceci se trouve confirmé par les différentes expérimentations menées dans le cadre de la thèse, et notamment les ateliers sur les définitions ou sur l'étude des fonctions définies par une propriété générale dite de croissance forte.

IV.2 Des questionnaires réalisés dans le cadre des IREM

Le premier questionnaire a été élaboré par le groupe transition lycée-université de l'IREM Paris Nord et proposé aux étudiants de l'université Paris 13 en 2004/2005. Nous en avons extrait quelques tâches qui concernent plus spécifiquement les fonctions et notamment la suivante qui concerne la résolution graphiques d'équations et d'inéquations.

3. Voici la représentation graphique des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5 \text{ et } g(x) = 0{,}53x^2 + 1{,}6x - 3{,}4$$



a) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- $x^3 + 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5 = -1$ Réponse : ....

Les équations données à résoudre sont les suivantes :
$x^3+0,5x^2-2x-2,5=-1$; $x^3+0,5x^2-2x-1,5=0$; $x^3+0,5x^2-2x-2,5>-2$; $f(x) \leq g(x)$
Il s'agit d'une résolution graphique d'équations a priori dans son principe familière aux élèves entrant à l'université. Vu la façon dont les équations sont données, la résolution nécessite pour les trois premières une reformulation dans le langage fonctionnel : $f(x)=-1$ pour la première, $f(x)+1=0$ pour la seconde qui ramène à la première équation, $f(x)>-2$ pour la troisième, mais ces reformulations ne demandent aucun calcul et l'on pourrait donc s'attendre en début d'université à de très bons taux de réussite. Le tableau ci-après présentant les résultats montre qu'il n'en est rien. Seule la première équation obtient plus de 50% de réussite et elle dépasse à peine ce score médian et la petite transformation que nécessite la seconde équation suffit à faire chuter le score à 14%.

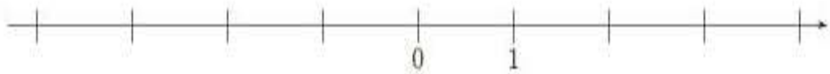
Equation	% réussite	Principaux types d'erreurs
$f(x)=-1$	54%	Une seule valeur – confusion avec $f(x)=0$
$f(x)+1=0$	14%	Confusion avec $f(x)=0$ et $f(0)$
$f(x)>-2$	27%	Un seul intervalle
$f(x) \leq g(x)$	27%	Un intervalle ; erreur de bornes

Tableau 1 : Pourcentages de réussite dans la résolution des équations et inéquations

Un autre exercice de ce questionnaire a attiré notre attention. Il concerne des connaissances élémentaires sur les valeurs absolues, fondamentales pour le traitement des fonctions à l'université et que l'on espère consolidées à la fin du lycée, même si les difficultés rencontrées par les élèves avec la notion de valeur absolue ont été bien mises en évidence dans les recherches didactiques. Les questions posées sont les suivantes :

1. a) x est un nombre réel tel que $|x-3|<1,2$.
Traduire cette inégalité à l'aide d'un intervalle : ....

b) Sur la droite des réels ci-dessous, représenter les nombres réels tels que $|x+1|<0,5$.



2. Exprimer au moyen de valeurs absolues les expressions suivantes :

a) $-1 \leqslant x \leqslant 3$ ....

b) $x \in]2;3[$ ....

c) $5,5 \leqslant x \leqslant 6,5$ ....

Les résultats sont les suivants :

Question	Réussite	Non réponses
1a	20%	35%
1b	21%	31%
2a	8%	64%
2b	7%	69%
2c	3,5%	70%

Tableau 2 : Pourcentages de réussite aux tâches portant sur les valeurs absolues

Ils montrent, pour toutes les questions, un très faible taux de réussite et une difficulté plus grande encore quand il s'agit d'exprimer un intervalle en termes de valeur absolue, même si dans les trois cas considérés, le centre de l'intervalle est un nombre simple : 1, 2,5 et 6. On peut se demander d'ailleurs si le décalage observé ne reflète pas une différence de fréquence des tâches correspondantes dans l'enseignement secondaire. Les réponses erronées engagent les nombres en présence dans des combinatoires variées et une erreur fréquente pour la première inégalité est la réponse]-∞, 4,2[qui consiste simplement à résoudre l'inéquation sans prendre en compte la valeur absolue.
Le deuxième questionnaire a été élaboré par la commission inter-IREM Université (CI2U) et passé par des étudiants provenant de sept universités. Nous en extrayons une tâche sur les limites de suites et fonctions. Les limites concernées et les pourcentages de réussite sont donnés dans le tableau ci-après. Ils concernent la seule correction des limites données.

Suite ou fonction et limites considérées	Réussite
$(-1)^n+1$	48%
$\sqrt{n} - n$	46%
$\sin(2\pi n)$	18%
$\cos(2\pi/n)$	41%
$\exp(x)/x^3$ en $+\infty$, 0 et $-\infty$	78%, 9% et 67%
$x^{10}\exp(x)$ en $+\infty$, 0 et $-\infty$	87%, 71% et 55%
$\cos(2\pi x)$ en $+\infty$	20%
$(\ln x-\ln 2)/(x-2)$ en $+\infty$ et en 2	53% et 13%

Tableau 3 : Pourcentage de réussite aux calculs de limites

Encore une fois, les pourcentages de réussite sont loin de montrer une situation satisfaisante, et ce d'autant plus qu'ils correspondent à des réponses brutes hors justification. Pour la suite de terme général $\sin(2\pi n)$ par exemple, 35% répondent que la suite n'a pas de limite, ne faisant visiblement pas de différence entre cette suite et la fonction sinus. Concernant les fonctions, visiblement, les résultats sur les croissances comparées des fonctions exponentielles, logarithmes et polynomiales au voisinage de l'infini semblent bien installés, avec un écart cependant entre ce qui concerne $+\infty$ et $-\infty$. Comme le montrent les analyses faites par les membres de la commission (Vandebrouck & CI2U, 2008), les étudiants oscillent dans leurs réponses entre conceptions ponctuelles et globales des fonctions, ce qui engendre de nombreuses erreurs dans la détermination de limites qui nécessite une appréhension locale de ce concept.

V. Conclusion

En conclusion, nous voudrions souligner le fait que la transition lycée – université dans le cadre des fonctions met en jeu des discontinuités suivant de très nombreuses dimensions. Elle s'accompagne d'abord d'une extension conceptuelle au monde ensembliste et à l'algèbre des structures qui introduit de nouvelles praxéologies, de nouveaux modes de raisonnement, et demande une maîtrise accrue du symbolisme fonctionnel intrinsèque. Pour ce qui concerne les fonctions d'une variable réelle, objets déjà familiers, la centration sur le local marginalise les praxéologies d'études de fonction routinisées au lycée et crée une réelle nécessité de coordonner ce point de vue local avec les points de vue ponctuel et global prédominants au lycée. Les tâches proposées rendent les conceptions de niveau processus tout à fait insuffisantes et le niveau « Trans » commence à s'affirmer, tout comme l'entrée dans le monde formel. On note enfin un changement important du rapport au graphique accompagné très souvent d'un rejet des outils technologiques (calculatrices graphiques notamment) à travers lesquels beaucoup d'élèves ont élaboré leur rapport au monde fonctionnel au lycée. Ces discontinuités ne signifient en aucun cas

que l'enseignement universitaire reste immobile sans essayer de s'adapter aux étudiants qu'il reçoit comme le montrent bien les premières fiches de travaux dirigés que nous avons analysées. Des tâches y sont proposées qui essaient d'établir des ponts entre les deux cultures et de favoriser l'adaptation mais on voit bien aussi qu'en dépit de ces efforts, les discontinuités sont réelles. De plus, ces tâches s'adressent à des étudiants dont les acquis, même pour ce qui concerne les attentes du lycée, sont fragiles et limités comme le montrent les deux questionnaires dont nous avons présenté quelques tâches. Il y a à cet état de fait des raisons structurelles et notamment le fait que l'université correspond pour beaucoup d'étudiants à un choix par défaut (Convert, 2006), mais ceci aggrave notablement les difficultés d'une transition par essence problématique comme le sont toutes les transitions institutionnelles.
Face à cette situation, il nous semblerait déraisonnable que l'enseignement secondaire cherche à courir après l'enseignement supérieur. Il a à construire sa cohérence propre mais pour cela aussi des évolutions substantielles sont nécessaires, permettant aux élèves de développer progressivement un travail fonctionnel autonome et sûr dans des situations relativement simples sans enfermer pour autant l'enseignement des fonctions dans celui d'un corpus de routines et discours ritualisés, habituant aussi les étudiants à mobiliser leurs ressources pour faire face aux multiples adaptations que requiert la rencontre avec des situations non routinières, car c'est de telles capacités qu'il leur faudra faire preuve à l'université

Remerciements : Je remercie Fabrice Vandebrouck pour les nombreuses fiches de TD qu'il m'a communiquées et les échanges fructueux que nous avons eus lors de la préparation de cette contribution.

Références

Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire /supérieur : que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine ? *Premier Colloque Franco-Canadien de Mathématiques,* Juillet 2004, Toulouse.

Artigue, M. (2005). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Sciences Cognitives et Didactique*, n° 11, 269-288.

Bosch.M., Fonseca, C., Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2.3, 205-250.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 77-111.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* pp. 3-22 & 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chellougui, F. (2004), *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire, entre l'explicite et l'implicite,* Thèse de doctorat en co-tuelle entre l'Université Claude Bernard Lyon 1 et l'Université de Tunis.

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. *Actes du Colloque IREM – INRP « Histoire et Enseignement des Mathématiques : rigueur, erreurs, raisonnements »*, Clermont-Ferrand, mai 2006. IREM de Clermont-Ferrand.

Convert, B (2006). *Les impasses de la démocratisation scolaire. Sur une prétendue crise des vocations scientifiques.* Editions Raisons d'Agir. Paris.

Coppé, S., Dorier, J.L., Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 27/2, 151-186.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.

Dubinsky, E., Mc Donald, M. (2001). APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E, Harel, G. (1992). *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes n°25. Mathematical Association of America.

Duval R. (1995). *Semiosis et Noesis*. Berne : Peter Lang.

Gueudet, G. (2008). La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives. In, A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en Didactique des Mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques,* p. 159-176. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Holton D. (ed.) (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels : Building Meaning for Symbols and their Manipulation. In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 707-762. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

Maschietto M. (2001). Fonctionnalités des representations graphiques dans la resolution de problems d'analyse à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 21 (1-2), 123-156.

Maschietto, M. (2003). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu local/global dans l'environnement de calculatrices*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7. Paris: IREM Paris 7.

Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians. Teaching and Learning Mathematics at University Level*. Springer.

Nemirovsky, R., Borba (Eds.) (2004). Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. PME Special Issue. *Educational Studies in Mathematics,* 57(3).

Piaget, J., Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Colombia University Press.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dan la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université Paris 7. Paris: IREM Paris 7.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18/2. 139-190.

Rogalski M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In, L.Viennot (Ed.) Didactique, épistémologie et histoire des sciences, p. 61-87. Paris : Presses Universitaires de France.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (eds). *International handbook of mathematics education*. 289-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education 2004.*

Vandebrouck, F. & CI2U (2008). Functions at the transition between French upper secondary school and university. Communication à ICME-11, Monterey, Juillet 2008. http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique28