Fonctions et TICE

J-F. Chesné, M-H. Le Yaouanq
IUFM de Créteil

Résumé : C'est par un travail sur les représentations d'une fonction dans différents registres que l'élève construit peu à peu ce concept. L'atelier propose des exemples d'utilisation des TICE pour articuler différentes représentations d'une fonction, mais aussi pour aider l'élève à négocier la transition entre arithmétique et algèbre, à produire des relations fonctionnelles, à travailler différents aspects d'une expression algébrique. Un moment de réflexion et d'échanges sur la formation initiale des professeurs à l'utilisation des TICE en algèbre est également prévu.

L'utilisation d'outils informatiques figure dans les programmes du second cycle, dans des documents ressources pour le collège ou documents d'accompagnement pour le lycée. En particulier, le travail sur la notion de fonction peut être l'occasion d'utiliser de nombreux logiciels : tableurs, grapheurs, logiciels de géométrie dynamique et logiciels de calcul formel. La modification des programmes de collège consistant à introduire la notion générale de fonction en classe de 3^e^, auparavant introduite en classe de seconde, est un élément nouveau favorisant la comparaison entre collège et lycée.

Nous commencerons par présenter rapidement la place de cette notion de fonction dans les programmes considérés puis nous nous intéresserons plus spécifiquement sur une situation donnée à l'utilisation de différents outils informatiques en collège et en classe de seconde.

I. **Fonction et TICE dans les programmes de collège et de seconde** (programme de collège Août 2008, programme de seconde Mai 2002).

Au collège

Les objectifs figurant dans le Préambule pour le collège pour l'Organisation et Gestion de données sont les suivants :

- *maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;*
- *approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;*
- *s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur*
- *acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive et se familiariser avec les notions de chance et de probabilité*

Deux thèmes relatifs aux fonctions sont dorénavant à étudier en classe de 3^e^ :

- l'approche de la notion de fonction de façon générale
- l'étude des fonctions linéaires et affines, apparaissant comme des cas particuliers de fonctions.

L'algèbre est un outil de modélisation, extra mathématique avec des situations de la vie courante ou issues d'autres disciplines, mais aussi intra mathématique avec l'étude de grandeurs associées à des situations géométriques et l'étude des fonctions linéaires et affines qui apparaissent en synthèse du travail effectué sur la proportionnalité depuis l'école primaire.

La notion de fonction est cependant utilisée comme outil implicite depuis la classe de 6^{e} comme le montrent ces extraits des programmes dans le domaine « Organisation et gestion de données, fonctions ».

- En 6^{e}, au sujet des représentations usuelles :
  « La capacité visée concerne l'aptitude à faire une interprétation globale et qualitative de la représentation étudiée (évolution d'une grandeur en fonction d'une autre).»
- En 5^{e} :
  « Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de fonction est exclue. »
- En 4^{e} :
  « Comme en classe de cinquième, le mot 'fonction' est employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle de la notion de fonction soit donnée. »

Le programme de 3^{e} propose donc une première prise de contact avec la notion de fonction en tant qu'objet :

« *L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre. »*
Ceci s'accompagne sur le plan symbolique de deux nouvelles notations, la flèche d'association ainsi que la notation composée $f\ (x)$. La notation f n'apparaît pas en revanche dans le programme.

Le travail dans le cadre fonctionnel avec les types de tâches évoqués dans ce programme met en jeu différents registres de représentation de l'objet fonction. Outre le registre de la langue naturelle, les registres graphique et algébrique, le registre des tableaux (tableaux de données) sont mentionnés dans le programme.

D'un point de vue informatique, l'utilisation du tableur-grapheur est mentionnée explicitement dans le programme en lien avec les concepts de fonction et de variable : « *l'usage du tableur-grapheur contribue à la mise en place du concept, dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques* ».
Ceci prolonge le travail proposé par le programme en classe de 4^{e} :
« *Les tableurs-grapheurs, dont l'usage a été introduit dès la classe de cinquième, donnent accès à une façon particulière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans le tableau. Cette nouveauté est un enrichissement pour le travail sur la notion de variable, effectué sur des exemples variés* ».

En classe de seconde :

Les fonctions sont toujours des outils de résolution de problèmes mais l'objet fonction acquiert une plus grande visibilité par l'étude de certaines de ses propriétés : variation, périodicité, propriétés de symétrie de sa courbe représentative. C'est par un travail sur ses différents registres de représentations que la construction du concept de fonction est visée peu à peu. Le travail sur la mise en équation est conduit en liaison très étroite avec le cadre fonctionnel et les résolutions graphiques.

Contrairement à la classe de troisième, figure dans le programme de seconde un unique « chapitre » intitulé « Calculs et fonctions ». Le travail en algèbre sollicite donc régulièrement plusieurs cadres, géométrique, numérique, fonctionnel, et plusieurs registres de représentation ; certains changements de registres sont favorisés par l'utilisation de calculatrices graphiques dont « *l'utilisation raisonnée et efficace pour les calculs et les graphiques* » figure comme un des objectifs du programme.

L'usage d'autres outils TICE comme les tableurs, grapheurs et logiciels de géométrie dynamique est également prescrit. Le document d'accompagnement précise ainsi que :

- La calculatrice « *permet de relier très facilement et de façon quasi instantanée, les domaines numérique et graphique, et d'enrichir ainsi considérablement l'approche des fonctions*.»
- Le tableur « *apporte un éclairage complémentaire de la notion de variable et de fonction et facilite la mise en œuvre de différentes activités numériques riches d'enseignement en particulier sur les différentes formes possibles d'une même expression* ».
- Les logiciels de géométrie dynamique «*permettent aussi de représenter simultanément une situation géométrique et la représentation graphique d'une fonction liée à cette situation*».

II. Quelle notion de fonction ?

La notion de fonction peut être appréhendée de deux façons différentes, par une définition ensembliste ou comme une relation de dépendance. D'un point de vue épistémologique, c'est la relation de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable. Aucune définition formelle ensembliste n'est donnée dans l'enseignement secondaire en tant que correspondance arbitraire *f* d'un ensemble A dans un ensemble B et c'est l'aspect de co-variation, de relation asymétrique entre deux variations qui est privilégié. Le concept se construit alors par des représentations visuelles, des images mentales, des expériences, comme concept-image (Vinner, Tall).
On dispose alors de plusieurs registres de représentation de cet objet mathématique fonction et l'utilisation des technologies peut favoriser les conversions entre registres. Elle peut également favoriser les articulations entre différents cadres intervenant dans la situation étudiée, par exemple les cadres géométrique et numérique.
Concernant le registre graphique et la représentation graphique d'une fonction, nous serons amenés à distinguer deux aspects :
- un aspect statique, comme ensemble de points ; le processus de construction n'y est pas visible.
- un aspect dynamique de la trajectoire « d'un point P qui bouge, représentant une variable dépendante en fonction d'un autre point variable M sur l'axe des abscisses qui représente la variable indépendante » (Laborde)

III. L'utilisation des TICE

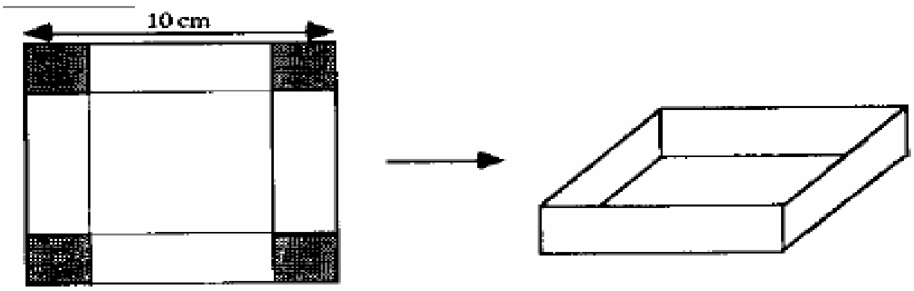
Nous avons choisi une situation particulière et nous sommes intéressés à diverses exploitations à l'aide de logiciels de cette situation.

1. Une situation : le volume de la boîte

Le passage de relation de dépendance entre grandeurs exprimées depuis la classe de 6^{e} par l'expression « en fonction de » à « *la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre* » s'accompagne du passage des grandeurs aux nombres. Cependant le travail sur les grandeurs reste très présent dans le programme de seconde puisque le document d'accompagnement de seconde précise que « *le programme propose de s'appuyer sur quelques situations simples. On privilégiera celles pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question : ainsi on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire : la question à traiter est alors souvent* *un problème de maximum, de minimum, ou même de recherche de valeurs particulières* ».

Nous avons donc choisi une situation mettant en jeu des grandeurs et les questions mentionnées précédemment. Il s'agit de considérer le volume d'une boîte sans couvercle dont le patron est obtenu en enlevant quatre carrés identiques aux sommets d'une feuille carrée. Cette situation, bien connue, figure dans le document ressource « Du numérique au littéral » sous la forme suivante :

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
Quelle doit être la mesure du côté du carré que l'on découpe dans chaque coin pour que le volume de la boîte soit 72 cm³ ?



Cette situation qui est posée dans le cadre géométrique et dans le cadre des grandeurs, est exploitée depuis longtemps en lycée en particulier en classe de 1^{re} puisqu'elle conduit dans le cadre algébrique à la résolution d'une (in)équation polynomiale de degré 3 ou à l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 en cas de recherche du maximum du volume.
Nous retrouvons désormais cette situation au fil des années, la notion de fonction étant implicite ou explicite, de la classe de 4^e, voire de la classe de 5^e, à la classe de 1^{re}. Nous nous intéresserons dans la suite aux classes de 4^e, 3^e et 2^{nde}, excluant ainsi les outils d'analyse ou d'algèbre disponibles en classe de 1^{re}.

Du point de vue des TICE, des animations informatiques avec un logiciel de géométrie dynamique offrant la possibilité de lier la situation dans l'espace à la représentation plane étaient déjà disponibles dans des imagiciels développés par le CNAM en 1992, mais des outils informatiques divers sont utilisables : tableur, grapheur, logiciels de géométrie dynamique, logiciels de calcul formel, calculatrice graphique en classe de 2^{nde}.

2. Dans des manuels scolaires : tableur (ou calculatrice)

En annexe figurent trois exercices issus de manuels des classes de 4^e, 3^e, 2^{nde} traitant de cette situation de la boîte sans couvercle. Ces trois exercices utilisent explicitement un tableur, le choix étant donné en seconde avec une calculatrice graphique.
Il s'agit dans chaque cas de trouver les dimensions de la boîte répondant à une contrainte donnée :
- obtenir une boîte de volume maximal (classes de 2^{nde} et 3^e)
- obtenir une boîte de volume 72 cm^3 (classe de 4^e). On reconnaît là le problème exposé dans le document ressource « Du numérique au littéral ».

Ces énoncés présentent des différences évidentes entre eux : une ou plusieurs variables sont introduites, les étapes de la mise en équation sont plus ou moins détaillées, les notations symboliques fonctionnelles sont utilisées ou non, l'utilisation d'un tableur (ou d'une calculatrice graphique) est plus ou moins guidée, le choix de la longueur du côté de la feuille carrée permet ou non la construction de patrons et influence la nature des solutions trouvées.

Cependant, outre le fait d'être tous situés en fin de chapitre, ces énoncés présentent de grandes similarités du point de vue de leur construction :

- Le passage au cadre algébrique est forcé dès la première question, il est simplement plus ou moins détaillé suivant l'exercice.
- Le problème de l'ensemble de définition est immédiatement posé a priori.
- Un tableur (ou une calculatrice graphique en seconde) est utilisé pour « résoudre » de façon approchée numériquement ou graphiquement (classes de 3^{e} et 2nde)

En 2nde, conformément au programme, le travail est complété par une activité transformationnelle permettant de trouver de façon algébrique le résultat souhaité. Le fait que la solution soit non décimale permet de mettre en évidence l'intérêt de la méthode algébrique.

Du point de vue de l'usage des TICE, nous pouvons noter que :

- Ces activités respectent l'introduction du tableur ou de la calculatrice graphique préconisée dans les instructions officielles.
- Les capacités calculatoires et dynamiques (recopie de formules et réactualisation immédiate des calculs) sont exploitées.
- L'usage d'un tableur ou d'une calculatrice impose le passage des grandeurs aux nombres.
- L'usage d'un tableur (3^{e}, 2nde) permet de faire intervenir le registre graphique, de façon simple et rapide.
- Le travail sur tableur effectué par l'élève nécessite une petite autonomie pour améliorer la précision de la réponse apportée.

Cependant on constate une très faible distance entre cette activité avec tableur et en environnement papier crayon. En effet la « trame » de l'activité est la même que l'on soit dans un environnement tableur ou papier-crayon avec une mise en équation puis l'obtention d'une fonction donnée par son expression algébrique puis l'obtention d'un tableau de valeurs ou d'une représentation graphique ; l'instrumentation requise à l'utilisation du tableur pour répondre aux questions peut être réduite à son minimum.

L'utilisation du tableur se fait donc de façon essentiellement pragmatique pour produire rapidement et facilement des résultats mais dans des tâches qui se différencient peu de celles traditionnellement pensées pour l'environnement papier/crayon et avec un accès privilégié par le cadre algébrique.

Mariam Haspekian a noté dans sa thèse qu'outre une stabilité des pratiques enseignantes, une dimension institutionnelle joue sans doute dans ces choix. Ce sont en effet des tâches conformes au travail en environnement papier-crayon qui guident les objectifs définis pour l'enseignement. Le papier-crayon, "référent", rend les relations entre environnement papier-crayon et environnement technologique dissymétriques.

Cependant de nombreuses difficultés sont ainsi laissées à la charge des élèves en particulier du point de vue de l'activité générationnelle :

- Cette situation met en jeu des grandeurs. Une exploitation de cette situation en problème ouvert en classe de 2nde nous a montré qu'une difficulté apparaît déjà dans le cadre des grandeurs : « le volume d'une boîte sans couvercle est-il le même que celui d'une boîte avec couvercle ? ».

- Une seconde difficulté consiste dans le passage des grandeurs aux nombres. Nous avons ainsi observé des élèves qui effectuent des calculs sur les nombres n'ayant aucun sens en termes de grandeurs.
  Par exemple, pour une feuille de 10 cm de côté, et la recherche d'une boîte de volume 72 cm^3 certains élèves proposent la solution suivante :
  100 – 72 = 28
  28 : 4 = 7 (car il y a 4 carrés).
  Donc l'aire d'un carré est 7 cm².
  Le côté du carré est $\sqrt{7}$.
  L'utilisation des unités dans les écritures (100 cm² - 72 cm^3) leur aurait-elle permis de ne pas s'engager dans cette voie ?
- Des difficultés classiques liées à l'introduction de la lettre apparaissent sans surprise, notamment le fait de travailler avec l'inconnue. L'exemple ci-dessus montre que des élèves restent dans une démarche arithmétique, même en seconde et après avoir traité la séquence sur les généralités sur les fonctions.
- D'autres difficultés sont liées à l'articulation de plusieurs cadres ainsi qu'à celle de plusieurs registres de représentation, par exemple pour lier variable géométrique et variable algébrique.

Apparaissent ensuite d'autres difficultés, que nous ne détaillerons pas ici car elles sont bien connues, dans le traitement et l'utilisation des expressions algébriques trouvées.

3. D'autres utilisations des TICE

D'autres utilisations des TICE sont envisageables afin d'aider à comprendre les objets mathématiques mis en jeu ou de pas confronter l'élève à l'ensemble des difficultés réunies. Ceci nécessite souvent des tâches qui n'ont pas d'analogue direct dans l'environnement papier/crayon, ou pour les tâches *a priori* envisageables dans cet environnement, une reconstruction des scénarios didactiques associés.

a. Un tableur pour travailler la mise en relation et faciliter la mise en équation

Un tableur peut ainsi être utilisé en amont de la mise en équation sous forme algébrique afin de la faciliter, en classe de 5^e ou de 4^e, voire après pour certains élèves.
Un certain nombre de telles utilisations sont maintenant disponibles, par exemple sur Internet, des exemples sont détaillés dans le document ressource « Du Numérique au littéral ». On y trouve bien souvent la construction de tableaux analogues à celui reproduit ci-dessous qui sont obtenus par recopie de formules.

	A	B	C	D
1	Côté du carré découpé	Côté de la base	Aire de la base	Volume de la boîte
2	0	10	100	0
3	0,5	9	81	40,5
4	1	8	64	64
5	1,5	7	49	73,5
6	2	6	36	72
7	2,5	5	25	62,5
8	3	4	16	48
9	3,5	3	9	31,5
10	4	2	4	16
11	4,5	1	1	4,5
12	5	0	0	0

Ecrire la première ligne de calcul, en automatisant les calculs, permet à l'élève de travailler dans un cadre numérique en partant du « connu » comme dans une démarche arithmétique, d'effectuer des calculs arithmétiques. Ces calculs produisent un résultat numérique, évitant ainsi le dilemme processus/produit existant avec l'expression algébrique. Le problème du choix de la mesure du côté et de l'ensemble de définition peut alors apparaître avec l'obtention de longueur et volume négatifs.
Cependant l'élève doit entrer ces calculs en utilisant des formules et des lettres avec une syntaxe précise, pour les automatiser. De plus, pour créer une telle feuille de calcul, il est nécessaire de structurer et de planifier son travail.
L'utilisation d'un tableur peut donc être une aide pour mettre en évidence les relations entre variables dans un problème sans avoir à manipuler d'inconnues. Il sert alors d'intermédiaire entre numérique et algébrique permettant un travail progressif sur la mise en équation.

En observant les ressources et en s'appuyant sur les échanges en formation, deux questions se sont posées à nous, liées à cet usage du tableur comme aide à l'introduction de l'algèbre.

Un tableau
La création d'un tableau comme celui présenté précédemment est la solution proposée dans la très grande majorité des ressources existantes. Ce sont de tels tableaux qui sont présentés comme exemples dans le document ressource « Du numérique au littéral ».
Une autre possibilité nous semble devoir être interrogée : celle d'utiliser une seule ligne en changeant la valeur entrée dans la cellule.

	A	B	C	D
1	Côté du carré découpé	Côté de la base	Aire de la base	Volume de la boîte
2	2,8	4,4	19,36	54,21

L'interprétation d'un tableau complet est certes beaucoup plus aisée pour répondre à la question posée, mais en utilisant une seule ligne, rien n'empêche l'élève de recopier les résultats à la main dans un tableau.
En classe de 4^{e} le programme mentionne que *« Les tableurs-grapheurs, dont l'usage a été introduit dès la classe de cinquième, donnent accès à une façon particulière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans le tableau. Cette nouveauté est un enrichissement pour le travail sur la notion de variable, effectué sur des exemples variés ».*

Ces deux utilisations du tableur par création d'un tableau de plusieurs lignes ou par utilisation d'une seule ligne donnent-elles la même idée de la variable (emplacement d'une cellule dans laquelle on change la valeur numérique ou ensemble de cellules contenant différentes valeurs numériques) ?
La réalisation de plusieurs tableaux différents, statiques, avec différents pas comme 0,1 puis 0,01 et 0,001, dans lesquels les valeurs antécédentes ne seront pas modifiées, et le changement dans une seule cellule des valeurs choisies, avec son aspect dynamique, induisent-elles les mêmes images mentales de la notion de fonction ?

L'imbrication de connaissances mathématiques et technologiques, variable, formule, fonction, qui se co-contruisent, rend cette utilisation du tableur plus délicate que l'utilisation proposée dans les énoncés figurant en annexe. La question de la recopie de formules est en particulier au cœur de la notion de formule et son introduction nous semble nécessiter des précautions, en particulier, malgré son aspect pratique, ne pas intervenir trop tôt lors des premières utilisations du tableur.

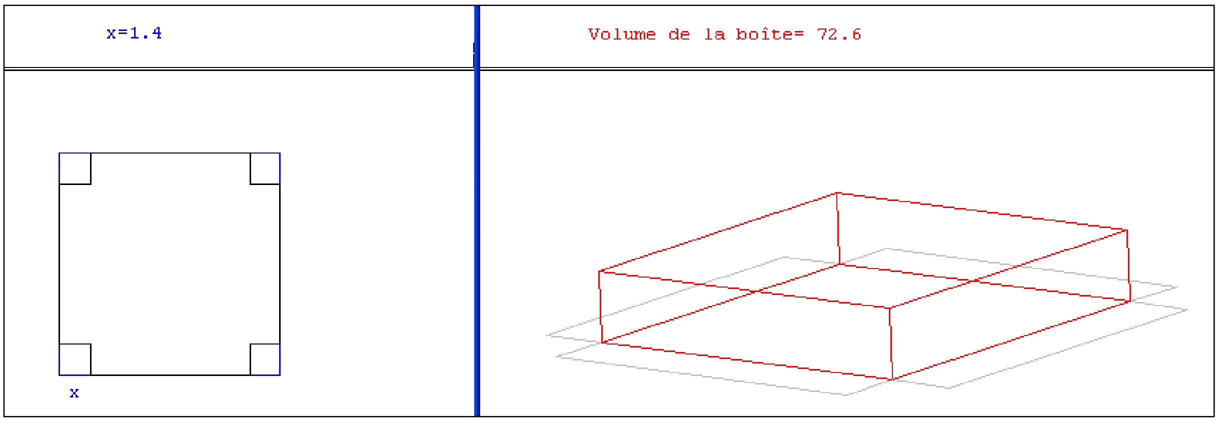
Entrer une formule
Pour entrer l'adresse d'une cellule dans une formule, le clic sur la cellule ou l'écriture de l'adresse sont souvent proposés comme totalement interchangeables.
Cependant est-il indifférent du point de vue de l'entrée dans l'algèbre de cliquer sur une cellule pour « prendre le nombre qu'elle contient » ou d'écrire l'adresse de la cellule, ce qui nécessite le respect d'une syntaxe bien précise et l'usage de lettres ?
Entrer la formule en cliquant sur les cellules concernées facilite l'écriture des relations en restant sur un aspect numérique, mais peut permettre de ce fait à l'élève de rester uniquement du côté numérique. En revanche, faire écrire les formules peut se révéler une vraie difficulté pour certains élèves, leur demandant d'entrer trop vite dans la création de formules.

Une solution intermédiaire nous semble pouvoir être de cliquer sur les cellules dans un premier temps en demandant de lire et de recopier sur une feuille de papier la formule ainsi entrée dans la barre de formules. Cette première étape vers la formule algébrique est suivie d'une seconde où l'élève écrit directement la formule. Le lien entre l'environnement informatique et l'environnement papier-crayon nous semble ici une piste exploitable pour éviter que l'élève ne reste que du côté numérique et s'engage vers la formule algébrique.

b. Des logiciels de géométrie dynamique

Dans le cas de la situation étudiée, le logiciel Geoplan-Geospace permet de relier les figures du plan et de l'espace. Cette réalisation est ici trop technique pour être réalisée entièrement par les élèves. L'étude de nombreuses autres activités à support géométrique portant sur des grandeurs de figures planes (longueurs, aires en particulier) sont cependant accessibles aux élèves par l'utilisation d'un logiciel de géométrie.

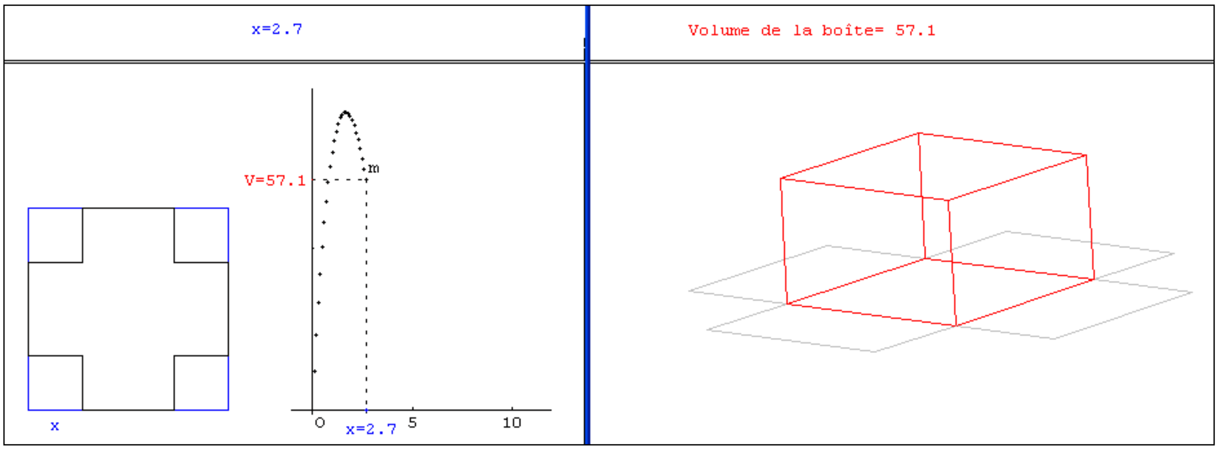
Il est possible de faire afficher directement la longueur variable du côté des carrés enlevés dans les coins de la feuille et le volume de la boîte. Le logiciel ne nécessite donc aucun passage par l'algèbre puisqu'il fournit directement les mesures. L'animation permet d'avoir de plus une illusion du continu.



Cette expérimentation sur logiciel peut venir en complément d'une manipulation à la main avec création d'un patron, d'une boîte et le calcul de son volume, afin de faire varier la mesure des côtés des carrés enlevés, de recueillir automatiquement des mesures des grandeurs en jeu. Ceci permet de répondre au problème posé de façon approchée.

L'aspect dynamique permet de visualiser la co-variation de deux grandeurs, l'une étant « pilote », ce qui met en évidence la dissymétrie. Le pilotage peut se faire en pilotant une variable géométrique, un point, non pas un nombre. La proximité avec la situation initiale est donc grande, le cadre géométrique restant présent.

Il est ensuite possible de faire afficher point par point la représentation graphique de la fonction volume ainsi définie.



La représentation graphique, construite point par point, devient la trajectoire d'un point qui représente une variable dépendante en fonction d'une variable indépendante, contrairement au tableur où la représentation graphique obtenue est statique et son procédé de construction n'est pas visible.

c. Un logiciel de calcul formel

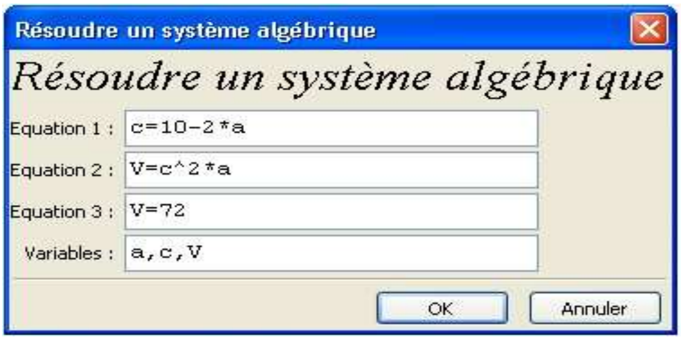
La situation de la boîte figurant dans le document ressource « du numérique au littéral » est accompagnée de la proposition de l'utilisation d'un outil de calcul formel.

> En permettant la résolution de systèmes, l'utilisation d'un outil de calcul formel autorise l'introduction d'inconnues auxiliaires qui facilite la mise en équation et que seul l'expert, qui dispose d'une gamme de problèmes de référence, sait ne pas être indispensable.
> *Dans le problème de la boîte, on voit ainsi des élèves introduire les variables suivantes :*
> *a la mesure des côtés des carrés découpés dans les coins ;*
> *c la mesure du côté du fond de la boîte ;*
> *V le volume de la boîte;*
> *et écrire cette suite d'équations pour rendre compte du problème :*
> $c = 10 - 2a$; $V = c^2 \times a$ et $V = 72$

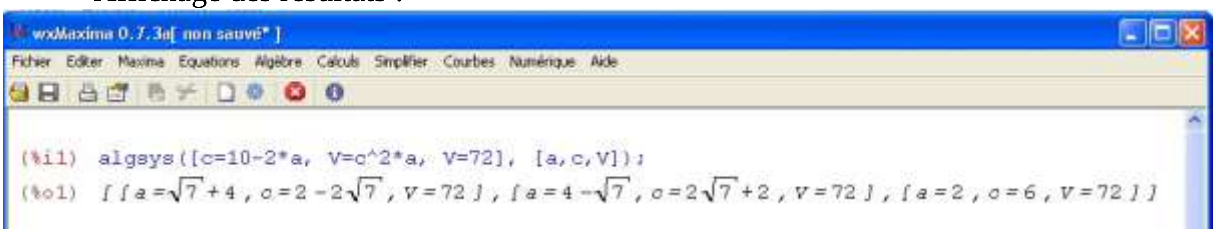
L'objectif visé est donc de travailler la mise en relation des différentes variables et l'écriture générale de ces relations dans un langage algébrique. Un logiciel de calcul formel évite de recourir de façon trop précoce à une résolution experte avec le choix d'une unique inconnue et des transformations obtenues par l'application du principe de substitution.

Nous nous sommes donc interrogés sur les outils qu'il est possible d'utiliser pour résoudre un tel système en collège. De nombreux outils de calcul formel sont disponibles par téléchargement sur Internet : Maxima, Xcas, Scilab, etc.
Monaghan a mis en avant, lors de recherches sur des enseignants anglais, que plus le besoin d'instrumentation est fort, plus l'outil semble difficile à intégrer par l'enseignant. De plus la prise en main nécessaire peut engendrer une augmentation des interventions concernant des questions d'ordre technologique et une diminution de celles consacrées au contenu mathématique. Le choix d'un logiciel paraît donc assez crucial dans le cas de logiciel de calcul formel notamment pour des élèves jeunes.
Voici un exemple d'utilisation d'un logiciel de calcul formel (Maxima) dont l'interface permet une entrée relativement simple du système à résoudre.

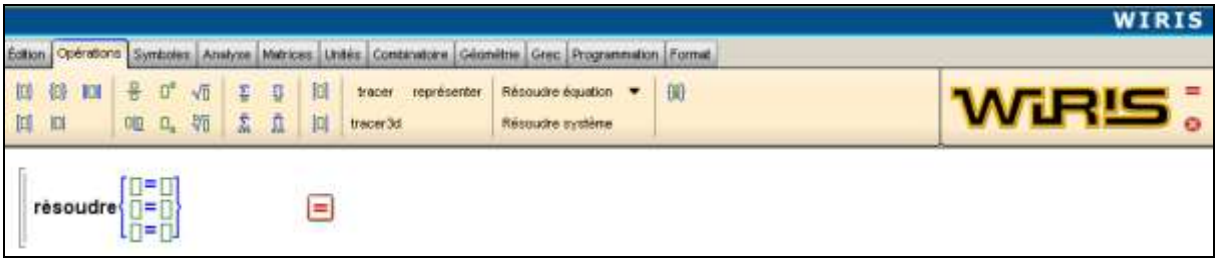
Entrée du système



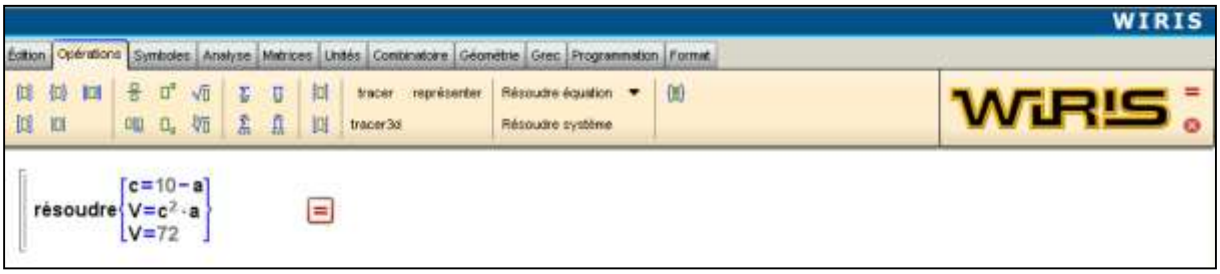
Affichage des résultats :



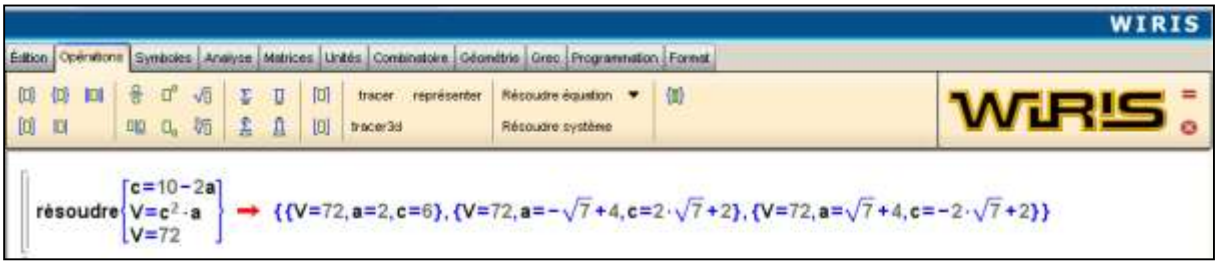
Cependant un outil de calcul formel a retenu plus particulièrement notre attention pour des élèves de collège ou de seconde. Il s'agit de Wiris utilisable en ligne à l'adresse suivante : www.wiris.com
En sélectionnant l'outil « Résoudre un système » on obtient un système avec des zones de texte à compléter dans les différents membres des équations.



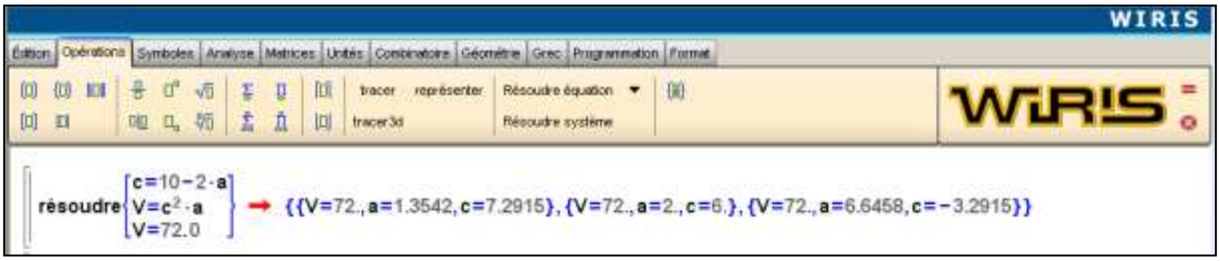
Les opérations, le carré dans le cas présent, mais aussi les écritures fractionnaires, les racines carrées, peuvent être entrées avec la syntaxe algébrique habituelle. La déclaration des inconnues n'est pas demandée.



Les solutions sont alors fournies après avoir cliqué sur le signe d'effectuation (signe d'égalité en rouge), sous la forme suivante :



Les solutions fournies sont bien sûr les solutions exactes. La demande de valeurs approchées décimales n'est pas toujours accessible de façon très simple sur tous les logiciels de calcul formel. Sur Wiris l'entrée d'une des données sous forme décimale permet d'obtenir directement des valeurs approchées sous forme décimale ; nous pouvons supposer que ceci provoque, d'un point de vue informatique, une coercion.



Cependant la validité des solutions fournies par le logiciel est à examiner. Ceci peut apparaître assez facilement ici en constatant la valeur négative donnée à c dans la troisième solution fournie ; la donnée des formes exactes peut en revanche masquer la difficulté. Sinon le problème de la construction des boîtes solutions peut être posé pour provoquer la prise de conscience et montrer à l'élève la nécessité d'opérer un contrôle sur les résultats fournis.
On retrouve ainsi la question de l'ensemble de définition mais il ne s'agit plus d'une question posée a priori, ce sont les résultats fournis par le logiciel qui engendre une nouvelle question mathématique.

Lors des différents stages de formation continue dans lesquels nous avons fait prendre en main cet outil, nos collègues ont apprécié sa facilité d'utilisation et ont considéré que leurs élèves pourraient l'utiliser sans difficulté.
Cependant l'idée même d'utiliser un logiciel de calcul formel se heurte à une résistance très forte de la part des collègues de collège : la crainte de ne pouvoir ensuite enrôler les élèves dans l'apprentissage de la résolution d'équation est exprimée de façon très forte.

IV. Conclusion

Suivant les logiciels utilisés, les chemins de l'antécédent à l'image sont différents, les cadres en jeu sont également différents, la représentation graphique apparaît sous des aspects statique ou dynamique et la distance avec la situation initialement exposée est plus ou moins grande, le travail algébrique est prépondérant ou inexistant.
Même dans le cas de l'utilisation d'un même logiciel, un tableur, sa place, en amont ou en aval d'un travail algébrique est à questionner. En aval, il s'appuie sur l'une des images très répandues de la notion de fonction, à savoir l'expression algébrique avec un signe d'égalité ; en amont, il peut servir d'intermédiaire entre numérique et algébrique et permettre aux élèves d'entrer dans une activité générationnelle de façon plus progressive. Cependant les scénarios didactiques sont dans ce cas à modifier, et la distance avec le travail habituel en environnement papier-crayon est beaucoup plus importante.

Nous constatons d'un point de vue des ressources que, en mai 2008, parmi les ressources disponibles sur Educnet sur les fonctions, on dénombrait :
- pour la classe de 3^{e}, 22 ressources utilisant un tableur, 16 un logiciel de géométrie dynamique.
- pour la classe de 2nde, 14 utilisant un tableur, 50 un logiciel de géométrie dynamique, 6 des calculatrices graphiques.

L'étude des variations d'une fonction en classe de 2nde suggère sans doute davantage l'utilisation des logiciels de géométrie pour leur caractère dynamique. En revanche le tableur est mentionné de façon répétée dans le programme de collège pour travailler sur les concepts de variable et de fonction, les logiciels de géométrie n'apparaissant que dans la partie géométrie. Quant aux 10 manuels de 4^{e} et 3^{e} consultés, les outils informatiques y interviennent en exercices et non pas en activité d'introduction, le tableur étant plus fréquemment présent.

Il ne faut pas négliger les difficultés matérielles pour les auteurs de manuels pour présenter certaines activités en respectant les contraintes de format d'un manuel. Cependant des recherches sur les pratiques enseignantes nous apprennent que les représentations des enseignants concernant le rôle des outils informatiques est essentiellement une projection de leurs représentations concernant l'enseignement des mathématiques et que la tendance observée consiste à utiliser les outils technologiques pour leur valeur pragmatique au détriment de leur valeur épistémique. Les usages qui semblent les premiers accessibles aux enseignants ne sont pas ceux qui tirent le mieux parti des potentialités des technologies considérées (Laborde, 2001),(Monaghan, 2004).

Pourtant, concernant l'usage des technologies, « un point essentiel dans cette approche [l'approche instrumentale] est que ce que nous apprenons et non simplement la façon dont nous l'apprenons est étroitement dépendant des artefacts utilisés pour cet apprentissage (ici calculatrices et logiciels notamment). » (Artigue, 2007, Séminaire national « Utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques »).
D'autres scénarios de séquences d'enseignement, souvent riches et complexes, existent mais comme l'a montré Haspekian dans sa thèse, il s'agit de ressources ponctuelles, isolées, qui ne suffisent pas à organiser dans la durée l'articulation cohérente d'une progression mathématique et instrumentale. De plus, quand des accompagnements existent, ils sont davantage d'ordre mathématique que d'ordre technologique.
Imaginer concrètement la mise en œuvre d'une séance à partir d'un document écrit par quelqu'un qui n'a jamais utilisé l'informatique de la façon envisagée représente une difficulté certaine. Cette difficulté nécessite pour nous formateurs d'envisager un accompagnement très concret en formation initiale et continue pour tirer un meilleur profit de l'utilisation des TICE.

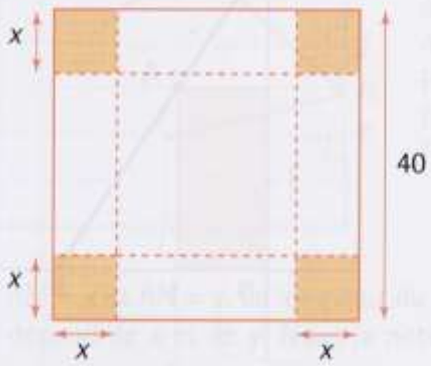
Annexes

En classe de seconde :

92 Boîte optimale

Dans une feuille de carton carrée de 40 cm de côté on découpe les quatre coins puis on replie en suivant les pointillés afin d'obtenir une boite dont la base sera carrée (voir figure). On souhaite obtenir une boîte de volume maximal.

On appellera L le côté (en cm) de la base de la boîte et $\mathcal{V}$ le volume de la boîte (en cm^3).



1. Calculer L, puis $\mathcal{V}$, en fonction de x. Pour quelles valeurs de x ces calculs ont-ils un sens ?

2. La formule obtenue pour $\mathcal{V}$ permet de définir une fonction de x. Quel est son ensemble de définition ?

3. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, observer la représentation graphique de la fonction $\mathcal{V}$. Quelle conjecture peut-on formuler pour le maximum de cette fonction ? Donner une estimation du volume maximal (à 1 près) et une estimation (à 0,1 près) de x permettant d'obtenir ce volume.

4. Calculer le volume $\mathcal{V}_M$ correspondant à $x = \frac{20}{3}$.
Vérifier que :

$$\mathcal{V}_M - \mathcal{V} = \frac{-4(3x-80)(3x-20)^2}{27}.$$

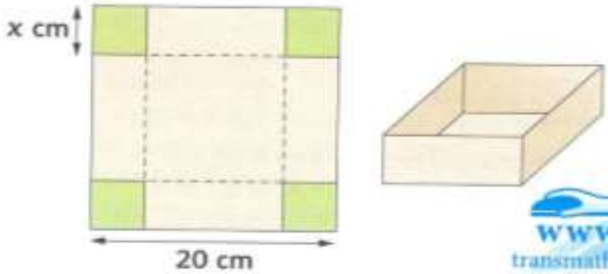
En déduire que $\mathcal{V}_M \geqslant \mathcal{V}$. Comparer avec les observations réalisées en 3 et conclure.

Manuel Fractale 2nde, p.85, éditeur Bordas, 2004

En classe de 3e

47 Avec un ordinateur

Une boîte est fabriquée dans une plaque de carton carrée de côté 20 cm. Pour cela, on découpe les carrés de côté x cm en vert et on plie le long des pointillés comme indiqué ci-dessous.



www.transmath.net

1. a. Pourquoi x est-il compris entre 0 et 10 ?

b. Quelle est la hauteur de la boîte obtenue ?

c. Quelle est l'aire $A(x)$, en cm^2, du carré au fond de la boîte obtenue ?

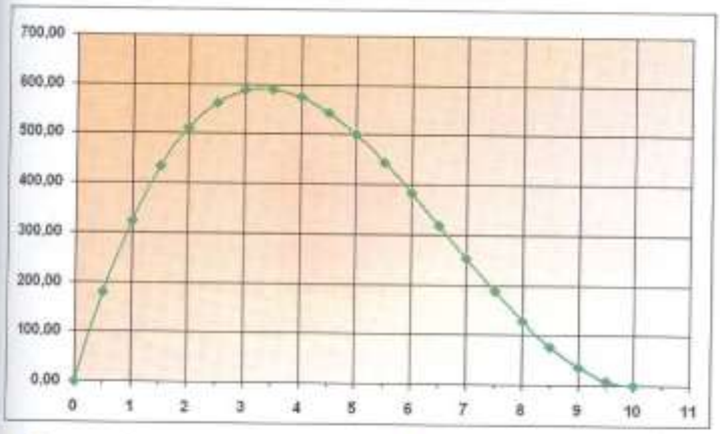
d. Quel est le volume $V(x)$, en cm^3, de la boîte obtenue ?

2. On se propose de savoir pour quelle valeur de x, la boîte obtenue a le volume maximal.

a. Avec un tableur, réaliser la feuille de calcul ci-dessous et la compléter jusqu'à la ligne 22.

	A	B	C
1	x	A(x)	V(x)
2	0	=(20-2*A2)^2	=A2*B2
3	0.5		
4	1		
5	1.5		
6	2		

b. Sélectionner la plage C1:C22 et, avec l'assistant graphique, réaliser le graphique suivant (en effectuant les réglages nécessaires).



c. Reprendre la feuille de calcul du **a** avec, pour x, les valeurs :
3,0 ; 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ; 3,4 ; 3,5 ; 3,6 ; 3,7 ; 3,8 ; 3,9 ; 4.
Conjecturer un encadrement de la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

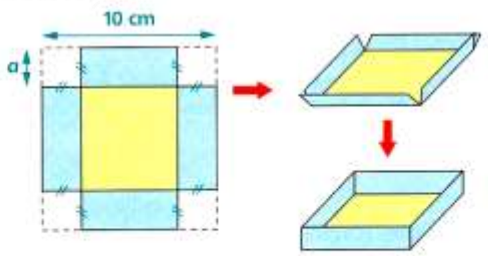
Manuel Transmath 3e, p.119, éditeur Nathan, 2008

Classe de 4e

Avec l'ordinateur

115 Volume d'une boîte

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque on découpe un carré de côté a cm comme indiqué sur la figure.
On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
On se propose de trouver a pour que le volume V de la boîte soit 72 cm³.



1. Formule du volume V

a. Expliquer pourquoi a est compris entre 0 et 5.

b. On note c la longueur en cm du côté du fond de la boîte (en jaune ci-dessus). Exprimer c en fonction de a.

c. Quelle est la hauteur de la boîte ?
Exprimer son volume V en fonction de a et c.
Expliquer pourquoi $V = a(10-2a)^2$.

2. Essais successifs

On se propose donc de résoudre l'équation :

$$a(10-2a)^2 = 72.$$

Pour cela, on utilise un tableur.

a. Réaliser la feuille de calcul ci-dessous et compléter la plage B2:B7.

	A	B
1	**a**	**V**
2	0	=A2 * (10 - A2)^2
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

b. En déduire une solution de l'équation.

c. Reprendre la feuille de calcul précédente en complétant la plage A2:A12 par les nombres 1 ; 1,1 ; 1,2 ; ... ; 2.
Conjecturer la présence d'une deuxième solution ; en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

d. Réaliser de nouvelles feuilles de calcul pour obtenir un encadrement de cette deuxième solution :
- d'amplitude 10^{-2},
- d'amplitude 10^{-3}.

Manuel Transmath 4e, p. 122, éditeur Nathan, 2007