Le passage de l’arithmétique à l’algèbre dans le cadre des fonctions en seconde

Dépendances didactiques des connaissances et de leurs formes.

Eugène COMIN
Lycée Arnaud Daniel et DAESL - Bordeaux

Résumé : Le passage à l'algèbre nécessite, de la part de l'élève, une évolution des formes d'une même connaissance pour modifier son rapport à un savoir donné, ce qui peut expliquer en partie, les difficultés qu'il rencontre dans le passage du collège au lycée. Pour extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs et accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent appréhender la multi-dimensionnalité conceptuelle des notions de variables et de fonctions. Pour accéder à ce processus de conceptualisation, les élèves et les professeurs rencontrent des difficultés dans la mise en ouvre d'une dialectique entre l'arithmétique des grandeurs et l'algèbre élémentaire. L'atelier propose des outils pour l'élaboration d'un curriculum adapté à une évolution possible des connaissances des élèves.

1 Introduction

Le passage à l’algèbre nécessite, de la part de l’élève, une évolution des formes de connaissances pour modifier son rapport à un savoir donné, ce qui peut expliquer en partie, les difficultés qu’il rencontre dans le passage du collège au lycée.

Pour extraire les relations numériques de l’univers des grandeurs et accéder progressivement à des niveaux d’abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent appréhender la multidimensionnalité conceptuelle des notions de variables et de fonctions. Pour accéder à ce processus de conceptualisation, les élèves et les professeurs rencontrent des difficultés dans la mise en œuvre d’une dialectique entre l’arithmétique des grandeurs et l’algèbre élémentaire.

L’atelier avait pour objectif de sensibiliser les participants à ces changements conceptuels en mettant à leur disposition plusieurs résultats d’enquêtes qui les illustrent. L’atelier proposait aussi différents outils pour analyser ces résultats, expliquer les comportements des élèves et élaborer des curriculums adaptés aux évolutions possibles de leurs connaissances.
Le présent texte rapporte ces principaux éléments plus qu’il ne relate le déroulement de l’atelier.

2 De la formule arithmétique à la formule algébrique

Pour dégager de l’univers des grandeurs le formalisme des fonctions numériques, il faut transformer le statut des différents objets qui constituent l’environnement des fonctions et leur signification : les grandeurs deviennent des variables numériques et la dépendance entre grandeurs devient une correspondance entre nombres abstraits (les réels).
Nous envisageons une organisation didactique qui débute par les fonctions modélisables par des formules (que nous nommons « fonctions performatives »), et qui fait évoluer leur statut de l’arithmétique vers l’algèbre. En effet, nous faisons l’hypothèse que la formule est « l’outil transactionnel » le plus apte à assurer la transposition de la notion de fonction d’un cadre à l’autre. Puisque nous prévoyons une transformation progressive du sens que les élèves peuvent attribuer à une formule, il nous faut observer l’état de leurs connaissances à l’issue du collège.

2 – 1 Etats des connaissances des élèves

Les deux exercices suivants, qui référent aux fonctions affines, avaient pour objectif de tester les connaissances des élèves de seconde avant les leçons sur les fonctions. Les participants à l'atelier étaient invités à comparer les structures de ces deux exercices, à montrer en quoi les énoncés sollicitaient différemment les connaissances des élèves puis à conjecturer des différences de réussites pour les confronter aux réponses obtenues.
Les fréquences de réponses sont données en pourcentages pour faciliter les comparaisons ; elles sont calculées sur 34 élèves en 2002-2003 et sur 90 élèves en 2004-2005.

Année 2002-2003 (34 élèves d'une même classe) ; **les contrats de location**

Une personne veut louer une voiture. Elle a le choix entre trois contrats :
Au contrat A : la personne paie un forfait de 80 € et 0,12 € par kilomètre parcouru.
Au contrat B : la personne paie un forfait de 60 € et 0,15 € par kilomètre parcouru.
Au contrat C : la personne paie un forfait de 150 €.
Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des contrats A, B, C :

$f_1(x)=150x$; $f_2(x)=60+0,15x$; $f_3(x)=80x+0,12$; $f_4(x)=80,12x$; $f_5(x)=80+0,12x$; $f_6(x)=150$.

Fréquences des réponses en pourcentage :

Contrat A :	f_1 0	f_2 3	f_3 3	f_4 3	f_5 **97**	f_6 0
Contrat B :	f_1 0	f_2 **97**	f_3 0	f_4 0	f_5 3	f_6 0
Contrat C :	f_1 9	f_2 0	f_3 0	f_4 0	f_5 0	f_6 **94**

Remarquons que presque tous les élèves interrogés donnent la bonne réponse, ce qui laisse entendre que les élèves sont familiers avec ce type de questions.

Année 2004-2005 (trois classes de seconde : environ 90 élèves) ; **les rémunérations**

Trois voyageurs de commerce : Adrien, Marie, Simon ont élaboré un programme pour calculer leur rémunération : la rémunération d'Adrien est fixe, celle de Marie est proportionnelle au montant des ventes et celle de Simon comporte une partie fixe à laquelle s'ajoute une partie proportionnelle au chiffre d'affaire réalisé. Retrouver parmi les fonctions suivantes celle qui permet de calculer la rémunération de chacun des trois voyageurs :

$f_1(x)=680+0,05x$; $f_2(x)=0,15x^2$; $f_3(x)=137$; $f_4(x)=\frac{0,15}{x}+78$; $f_5(x)=0,07x$; $f_6(x)=0,05x^2+78$.

Fréquences des réponses en pourcentages :

Adrien :	f_1 1	f_2 0	f_3 **74**	f_4 0	f_5 2	f_6 3
Marie :	f_1 6	f_2 8	f_3 1	f_4 6	f_5 **49**	f_6 8
Simon :	f_1 **57**	f_2 0	f_3 1	f_4 14	f_5 0	f_6 6

Sur cet exercice, trois quarts des élèves interrogés donnent la bonne réponse pour la rémunération d'Adrien mais seulement la moitié des élèves interrogés fournissent la bonne formule pour Marie et Simon. La réussite est donc plus faible que dans le premier exercice et les réponses sont aussi plus dispersées.

Cette différence de réussite est significative (un test avec la variable normale confirme que les écarts de fréquences entre les réponses des deux exercices sont significatifs au seuil de 1%, pour la fonction constante et la fonction affine). Doit-on pour autant se limiter à l'interpréter comme une différence de niveau entre deux classes ? Ne serait-ce pas la formulation des questions, le milieu de référence, la nature des connaissances qui sont différents ?
Nous allons voir que l'analyse des énoncés et leur comparaison ont apporté des éléments de réponses à ces questions et ont préparé les participants aux concepts de formule arithmétique et de formule algébrique (COMIN ; 2005).

2 – 2 Analyse des formules et caractérisation

Nous allons expliquer comment la distinction entre conception arithmétique et algébrique de la notion de fonction se cristallise dans la différence d'interprétation d'une même formule d'un cadre à l'autre.

Exercice : les contrats de location
Dans cet exercice, les grandeurs mesurées sont fournies et le programme de calcul du montant à payer est suggéré par le prix au kilomètre. Pour calculer le montant de la location au contrat A, il faut ajouter, aux 80 euros forfaitaires, autant de fois 12 centimes qu'il y a de kilomètres parcourus. Programme que l'on peut résumer par une égalité de la forme : *montant à payer = 80 € + 0,12 €* $\times$ *nombre de kilomètres* ou encore $m = 80 + 0{,}12n$. Dans cette expression, les signes « = » et « + » ne sont que des sténogrammes de l'arithmétique et la formule $80 + 0{,}12 \times n$ résume un raisonnement de type arithmétique.

Nous avons caractérisé une formule arithmétique de la manière suivante :
Dans les formules arithmétiques :

- Les lettres ou les mots désignent des grandeurs mesurées ou des mesures.
- Les variables sont des grandeurs.
- Le sens est porté par la structure des grandeurs ; chaque situation nécessite un raisonnement arithmétique (qui est résumé par la formule) et le résultat attendu est une mesure accompagnée d'une unité.

Ce qui peut être représenté de manière plus schématique, par :

Formules arithmétiques $\longrightarrow$ Grandeurs

far $\longmapsto$ *g*

Exemple : $80 + 0{,}12 \times n$ $\longmapsto$ *Montant à payer*

Exercice : les rémunérations
Un des objectifs de l'enseignement en seconde est de conduire les élèves à reconnaître la structure du problème précédent, en multipliant les occasions de rencontre avec une telle structure. On peut considérer que cet objectif est atteint lorsque les élèves reconnaissent à coup sûr une modalité de la fonction affine. C'est ce que nous voulions évaluer avec l'exercice sur les rémunérations.

Dans cet exercice, l'énoncé décrit, dans le cadre des grandeurs, la structure de chacune des trois situations et affirme l'existence d'un programme qui permet le calcul de la rémunération pour chacune d'elles. Les mesures des grandeurs ne sont pas données et on ne demande pas aux élèves de calculer une mesure, mais de reconnaître une structure ainsi que la formule qui modélise la fonction numérique correspondante : soit la fonction constante pour la rémunération d’Adrien, soit la fonction linéaire pour la situation de proportionnalité de Marie, soit la fonction affine pour la rémunération de Simon. Les valeurs numériques, qui figurent dans les formules, apportent des informations qui ne sont d’aucune aide pour la résolution. C’est la forme de l’expression littérale qui doit renvoyer à la bonne situation.

Cet exercice mobilise des connaissances algébriques, chaque formule réfère à une classe de situations.

Nous avons caractérisé une *formule algébrique*, de la manière suivante :
Dans les formules algébriques :

- Les lettres désignent des nombres réels.
- Les variables sont des ensembles numériques (*x* et *y* sont des variables muettes).
- Le sens est porté par la structure de **R** et par le programme de calcul itératif qui engendre une correspondance (donc une fonction). La formule algébrique peut comporter des paramètres quand elle modélise une classe de situations : par exemple, l'expression "$f(x)=ax+b$" regroupe toutes les situations modélisables par une fonction affine.

Ce qui peut être représenté schématiquement par :

Formules algébriques ⟶ Fonctions {}

fal ⟼ *f*

Exemple : ⟼

Conclusion
Ces analyses comparatives montrent qu’une formule ne désigne pas le même objet dans les deux cas. Dans le premier exercice, la formule résume les calculs à faire pour obtenir le montant de la rémunération, dans le second exercice la formule modélise une classe de situations. Pour distinguer les deux significations, nous parlerons de « formule arithmétique » dans le premier cas et de « formule algébrique » dans le second cas (les écarts de fréquences de réussites témoignent de cette distinction).

La difficulté de passage d’une formule arithmétique à une formule algébrique est liée au changement de cadre et de registre. Elle résulte principalement de la différence d'interprétation d’une même formule d’un cadre à l’autre : la formule représente une grandeur en arithmétique alors qu’elle représente une fonction (ou un type de fonction et donc une structure) en algèbre.

Hypothèse :
Cette analyse permet d'envisager deux types de comportements chez un élève correspondant à deux conceptions :

- S'il se place dans le cadre arithmétique, la formule représente une procédure de calcul ou son résultat (une grandeur mesurée) donc pour cet élève :
  - La formule désigne un nombre (en tant que mesure).
  - Les lettres qui entrent dans sa constitution désignent des mesures donc des nombres.
- S'il se place dans le cadre algébrique, la formule représente une fonction (la correspondance) ou une variable fonction (ensemble des images) et pour cet élève :
  - La formule désigne une variable ou une fonction.
  - Les lettres qui entrent dans sa composition désignent des variables.

Bien qu'il soit difficile, en général, de trouver dans les productions des élèves des indices de ces deux conceptions (arithmétique ou algébrique), nous avons vu que le libellé des exercices influence le taux de réussite, car il active de manière privilégiée tel ou tel type de connaissances. Pour conforter l'hypothèse précédente, un questionnaire a été soumis à des élèves de seconde pendant trois ans. Les participants étaient invités à analyser son contenu et à expliquer en quoi ses questions permettent de discriminer une conception arithmétique d'une conception algébrique.

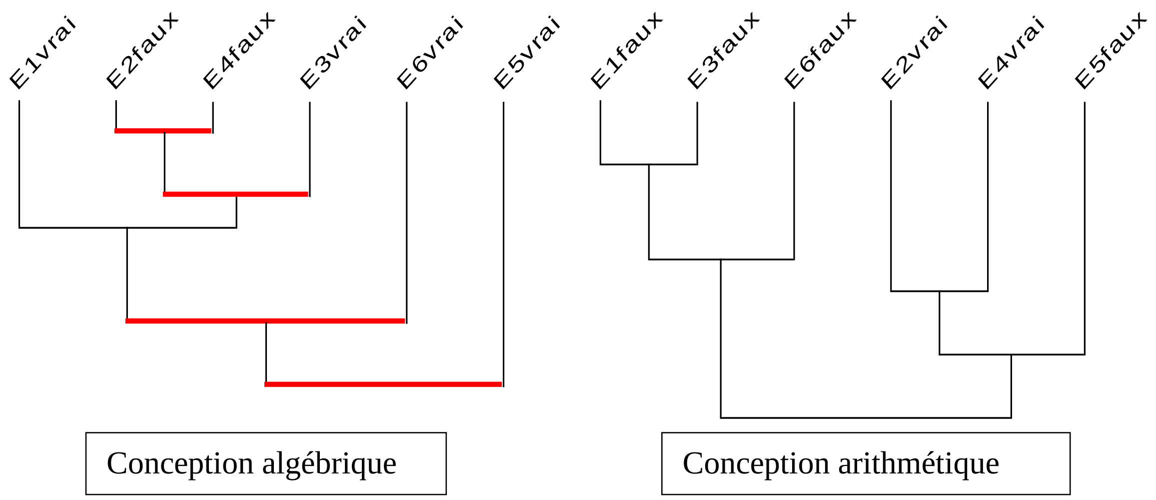
3 Les conceptions des élèves ; utopie ou réalité ?

Les questions qui figurent dans le tableau suivant, avaient pour objet de faire apparaître qu'à l'issue du collège, les élèves attribuent différentes significations aux notions de variable et de fonction. Aucune référence n'est faite aux grandeurs et pourtant la répartition des réponses sur les trois modalités « vrai, faux, je ne sais pas » indique que certains élèves mobilisent le registre de l'arithmétique et d'autres celui de l'algèbre conformément à l'analyse précédente des formules. Ces questions ont été soumises à des élèves de seconde pendant trois années scolaires (2002-03, 2003-04, 2006-07). La comparaison des fréquences de réponses, entre ces trois années, fait apparaître une grande régularité dans les manières de répondre. Un test du chi-2 pour chacune des six questions confirme que les écarts de fréquences ne sont pas significatifs au seuil de 10%. Cette régularité dans les réponses manifeste une stabilité dans la culture des élèves à l'issue du collège. Nous avons regroupé les réponses des trois années scolaires, comme on le ferait de trois échantillons issus d'une même population mère, et nous avons obtenu les fréquences suivantes exprimées en pourcentages calculés sur 98 élèves :

	On considère l'expression suivante : $\frac{1}{3}x^2-4$.			
E1	Dans cette expression "x" désigne une variable.	vrai 46	faux 26	Je ne sais pas 29
E2	Dans cette expression "x" désigne un nombre.	vrai 78	faux 14	Je ne sais pas 08
E3	"$\frac{1}{3}x^2-4$" désigne une variable.	vrai 38	faux 26	Je ne sais pas 37
E4	"$\frac{1}{3}x^2-4$" désigne un nombre.	vrai 65	faux 30	Je ne sais pas 05
E5	"$\frac{1}{3}x^2-4$" définit une fonction.	vrai 70	faux 19	Je ne sais pas 10
E6	"$\frac{1}{3}x^2-4$" est l'image de x par une fonction.	vrai 36	faux 34	Je ne sais pas 31

Les analyses de données, faites sur les six questions communes aux trois questionnaires et sur l'ensemble des élèves interrogés sur trois ans (98 élèves), fournissent des indices significatifs de leurs connaissances à l'issue du collège. Elles font apparaître des groupements de réponses caractéristiques selon notre étude, de deux conceptions que nous avons dénommées arithmétique et algébrique.

Pour chaque question, chacune des modalités « vrai » et « faux » a été éclatée en caractères booléens. Le caractère « E_i vrai » prend la valeur 1 si l'élève a répondu vrai sinon il prend la valeur 0. Le caractère « E_i faux » prend la valeur 1 si l'élève a répondu faux sinon il prend la valeur 0. La classification hiérarchique fait alors apparaître les groupements suivants :

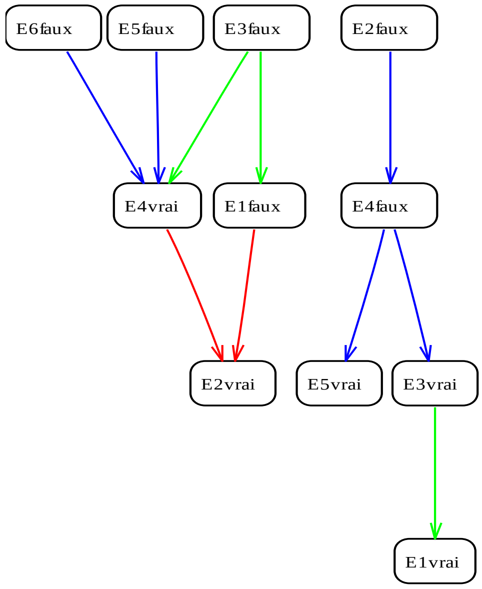


Arbre des similarités : C:\Documents and Settings\xxxx\Mes documents\Cadre E-02-03-06-chic.csv

L'arbre des similarités sépare deux groupes de réponses. Les caractères du premier groupe sont caractéristiques d'une conception algébrique : x et $\frac{1}{3}x^2 - 4$ désignent des variables (E_1vrai, E_3vrai) et non des nombres (E_2faux, E_4faux) ; $\frac{1}{3}x^2 - 4$ définit une fonction (E_5vrai) et est l'image de x par une fonction (E_6vrai). Les caractères du deuxième groupe sont plutôt caractéristiques d'une conception arithmétique : x et $\frac{1}{3}x^2 - 4$ désignent des nombres (E_2vrai, E_4vrai) et non des variables (E_1faux, E_3faux) ; une formule ne définit pas une fonction (E_5faux, E_6faux). Ce partage des réponses s'accompagne d'une discrimination des élèves en deux groupes ; la majorité des élèves (59 sur 98) se trouvent dans la conception arithmétique, 11 élèves sur 98 seulement se trouvent dans la conception algébrique. Les réponses des autres élèves semblent moins cohérentes entre elles.

L'analyse implicative conforte cette dichotomie en faisant apparaître des implications au sein de chaque groupe de caractères.

Dans le graphe implicatif, la première chaîne d'implications montre que les élèves qui ne reconnaissent pas une variabilité dans une formule disent que x ou $\frac{1}{3}x^2 - 4$ désignent des nombres. Ces élèves restent dans le cadre arithmétique. L'autre chaîne implicative est une sorte de contraposée partielle de la chaîne précédente : les élèves qui rejettent l'idée que x ou $\frac{1}{3}x^2 - 4$ désignent des nombres interprètent la formule comme une « variable-fonction » et pour eux la lettre x désigne une variable. Ces élèves se situent dans le cadre algébrique.



Ces résultats montrent que les conceptions arithmétique et algébrique, des notions de variables et de fonctions, cohabitent encore chez les élèves en début de seconde et que la majorité d'entre eux ne sont pas encore passés à l'algèbre.

Les participants à l'atelier devaient critiquer la méthode et commenter ces résultats qui ont suscité les questions suivantes :

1) Les conceptions des élèves ont-elles une influence sur la résolution des exercices, sur les nouveaux apprentissages, … ? (Les résultats aux deux exercices sur les contrats et les rémunérations semblent indiquer que oui.)
2) Est-ce que le professeur de lycée peut repérer ces conceptions chez les élèves qui lui sont confiés ? (La méthode proposée ici requière un questionnaire spécifique.)
3) Comment faire évoluer les connaissances des élèves pour les faire passer d'une conception arithmétique à une conception algébrique de la notion de fonction ?

La dernière phase de l'atelier proposait des modèles et des outils qui apportent des éléments de réponses à cette dernière question.

4 Les contraintes didactiques

4 – 1 Les formes de connaissances

Construire un curriculum (ou une organisation didactique) nécessite d'articuler logiquement les savoirs à enseigner, mais sa mise en œuvre suppose une organisation adaptée à une évolution possible des connaissances des élèves.

Pour décrire l'avancement du processus d'apprentissage, nous considérons une suite de situations, dans lesquelles les connaissances des élèves, lors d'une situation donnée, évoluent grâce à la confrontation entre leurs anciennes connaissances et cette situation nouvelle. Pour que la situation opère le changement espéré, pour qu'elle éveille la pensée du sujet, elle doit être suffisamment proche des situations précédentes. En effet, l'action du sujet est conditionnée par le sens qu'il peut attribuer à chaque situation, or ce sens résulte de la fréquentation des situations antérieures. L'articulation des situations entre elles vise à développer les connaissances des élèves ; mais elle vise aussi à modifier la forme de leurs connaissances en une autre forme. Cette évolution dans l'usage des connaissances conditionne les comportements des élèves et leurs apprentissages futurs.

Nous avons retenu trois formes de connaissances pour analyser un curriculum. Pour les présenter, nous les illustrerons à l'aide des fonctions linéaires et affines.

Usage implicite (Im) : ce premier usage par les élèves concerne les connaissances en cours d'acquisition. Face à une situation nouvelle, un élève n'active pas uniquement des connaissances et des savoirs « anciens » (c'est-à-dire qu'il maîtrise relativement bien). En essayant d'adapter ses anciennes connaissances aux nouvelles questions, il construit des « modèles implicites d'action » (schèmes, axiomes et théorèmes en acte), qui lui permettent d'intervenir sur son milieu, sans toutefois contrôler intégralement ses décisions. Une situation ne sollicite qu'une des modalités d'une notion mathématique ; elle participe à sa conceptualisation sans en recouvrir tous les aspects. Par exemple, au cours des premiers apprentissages, à l'école primaire, l'élève réalise la proportionnalité à partir de la connaissance qu'il a des grandeurs et des opérations sur ces grandeurs, il ne réfère pas encore à un savoir correspondant à ce concept. « La proportionnalité » est en réalité une étiquette commode pour rassembler une multitude de savoirs : nombreuses grandeurs possédant chacune leurs particularités (masse, volume, temps, débit, aire, vitesse, …), variabilité de leur nature mathématique (discrète ou continue) ou de celle des rapports numériques (entiers, rationnels, irrationnels), pluralité des raisons d'y recourir (logique, physique, sociale), etc. Les enseignants sont donc conduits à proposer un vaste choix de situations qui modifient l'idée que les élèves se font de la notion. Les situations nouvelles vont infléchir plusieurs fois leurs conceptions, conférer des sens nouveaux et diversifier leurs prises d'initiative à ce sujet. Ces rencontres enrichissent le répertoire des élèves jusqu'à leur permettre de percevoir la structure mathématique sous-jacente à ces situations, de repérer l'invariant qui autorise une institutionnalisation des techniques propres à la proportionnalité.

Pour modéliser une relation affine entre grandeurs, l'élève peut alors s'appuyer sur ses connaissances de la proportionnalité. En particulier, le repérage de la quantité à l'unité permet à l'élève d'inférer un raisonnement arithmétique approprié à cette nouvelle situation, sans savoir ce qu'est une fonction affine.

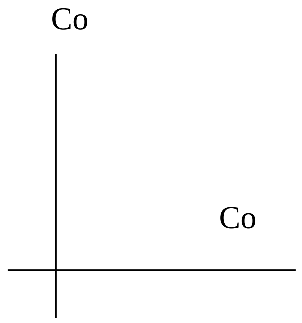
Usage canonique (Ca) : c'est l'usage d'un savoir institutionnalisé.
Lorsque le professeur estime que le processus de conceptualisation a suffisamment avancé, il institutionnalise les différents objets de savoir et la forme de leurs écritures. Pour la proportionnalité, il peut demander aux élèves d'écrire le raisonnement arithmétique en trois lignes en utilisant la quantité à l'unité (une ligne par calcul : règle de trois), ou de résumer cette procédure par une formule arithmétique où figurent les unités de grandeurs, ou de décrire la situation à l'aide d'un tableau en faisant apparaître les têtes de listes et les différents rapports (la quantité à l'unité devient un opérateur ou un coefficient de proportionnalité). La reconnaissance par les élèves de l'équivalence de ces écritures suppose un entraînement et donc une organisation didactique adaptée en amont de l'institutionnalisation. A ce stade de l'avancement didactique, l'élève est supposé capable, lors d'un nouvel exercice sur la proportionnalité, de présenter correctement la solution attendue sous une de ses formes canoniques, conformément aux règles institutionnalisées dans sa classe.
Pour les situations affines, l'organisation didactique peut s'appuyer sur les savoirs de la proportionnalité pour conduire l'élève à produire des solutions sous des formes institutionnelles : tableau, programme écrit sur plusieurs lignes, formule arithmétique résumant ce programme. L'accès au contrôle de ces nouvelles techniques suppose un assortiment de situations qui conduit l'élève à conceptualiser cette nouvelle structure et autorise alors le professeur à institutionnaliser les objets qui lui sont propres et attendus dans la production des élèves.
Le premier exercice sur les tarifs de location sollicite cet usage canonique.

Usage familier (Fa) : C'est un niveau d'expertise.
L'institutionnalisation des techniques résolutoires des problèmes de l'arithmétique élémentaire ancre ces outils dans le cadre des grandeurs. Un élève ne peut pas par lui-même transformer le coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs en coefficient de la fonction linéaire associée. Pour décontextualiser ce savoir et en faire un objet algébrique, le professeur devra multiplier les occasions de rencontrer ce même coefficient dans un cadre puis dans l'autre. C'est au professeur de modéliser chaque correspondance entre grandeurs mesurées par une fonction numérique à l'aide des ostensifs propres à l'algèbre. Seule une forte fréquentation de telles activités permet de dégager les structures communes à certaines situations et de leur donner un sens proto algébrique en modélisant chacune de ces structures par une même formule algébrique ($f(x)=ax$ pour les fonctions linéaires ; $f(x)=ax+b$ pour les fonctions affines). Cette familiarisation progressive contribue à une conceptualisation algébrique de la notion de fonction et permet l'institutionnalisation des objets qui lui sont propres.
Le second exercice sur les voyageurs de commerce sollicite cet usage familier.

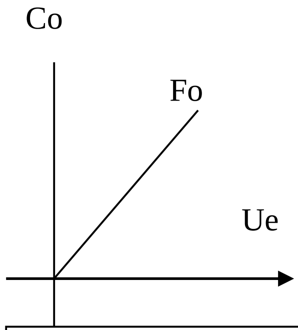
Conclusion : Les changements de formes de connaissances induisent des réorganisations de répertoires d'élèves qui scandent le temps didactique. Les connaissances et leurs formes sont structurées par des relations de dépendance qu'il faut analyser pour ordonnancer les unités d'enseignement (situations, leçons, séquences, programmes, …) et élaborer les situations qui visent à provoquer leur évolution.

Stratégie d'analyse a priori d'un curriculum
Pour organiser un curriculum (non limité au curriculum institutionnel), il ne suffit pas de lister les savoirs visés par le projet. L'organisation de l'enseignement, nécessité par les dépendances

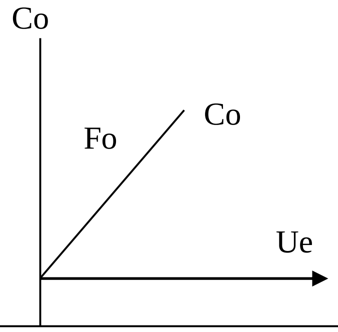
mathématiques entre ces objets de savoir, doit s'articuler sur les possibilités des élèves, c'est-à-dire l'état de leurs connaissances. Il nous reste encore à déterminer une méthode « simple » pour décrire et traiter toutes les dépendances potentielles entre les connaissances et les comportements des élèves (ceux que l'on peut prévoir a priori).
Nous proposons d'inventorier les dépendances à l'aide de trois matrices.
Le rôle de ces matrices est d'interroger les possibilités de modification des connaissances des élèves afin d'élaborer une organisation didactique adaptée à ce qui peut se produire effectivement dans une classe.



Dépendances logiques entre connaissances : Matrice « cc »



Evolution des formes de connaissances : Matrice « cf »



Evolution des formes des dépendances entre connaissances : Matrice « ccf »

Les dépendances logiques entre les objets à enseigner déterminent un pré ordre sur les unités d'enseignement ; pour décrire ces dépendances, la première matrice de dimension 2, croise les connaissances entre elles. Leurs formes (Im, Ca, Fa) sont des états didactiques temporaires appelés à évoluer avec les unités d'enseignement ; la deuxième matrice, de dimension 3, croise les connaissances avec leurs formes et les unités d'enseignement. Or les formes de connaissances affectent aussi les différentes relations entre connaissances, qui elles mêmes évoluent avec les différents apprentissages. La troisième matrice, de dimension 4, a pour objet de décrire cette évolution.

Mais il n'existe pas de méthode qui serait indépendante des contenus. L'atelier proposait de mettre à l'épreuve l'usage de ces matrices après avoir repéré les tâches que doivent réaliser les élèves pour résoudre les exercices sur les contrats et les rémunérations.

4 – 2 Les dépendances logiques

Analyse a priori des tâches potentielles

Pour accéder progressivement à des niveaux d'abstraction qui conduisent vers les modèles algébriques, les élèves doivent extraire les relations numériques de l'univers des grandeurs. C'est dans l'action que les élèves construisent des connaissances qui étayent les concepts de variable et de fonction. Les contraintes des situations qu'ils rencontrent, les obligent à agir en réalisant des tâches significatives de ces connaissances.
Ces principales tâches, décrites en termes d'action pour les élèves, ont été répertoriées suivant trois niveaux de complexité, et ordonnées de T1 à T9 en fonction de nécessités mathématiques (Comin, 2005).

Les tâches

Niveau des connaissances : *milieu des grandeurs et connaissances culturelles, folkloriques*.
T1) Repérer dans une situation : les variables, la dépendance entre ces variables, la correspondance entre les valeurs de ces variables. (Le milieu objectif, en général celui des

grandeurs pour les fonctions linéaires et affines, active des connaissances qui produisent des modèles implicites d'action).

Niveau d'abstraction simple : *milieu numérique et explicitation des relations fonctionnelles*.

T2) Décrire cette relation (situation) avec un des quatre outils : programme, tableau, formule, courbe (P, T, F, C).

T3) Isoler (abstraire) une fonction numérique d'une relation entre grandeurs (la fonction linéaire pour la proportionnalité)

T4) Associer deux des objets : programme, tableau, formule, courbe (P, T, F, C).

T5) Etudier les variations relatives des variables avec un des quatre outils : P, T, F, C (élaborer un tableau de variation)

T6) Prévoir avec des fonctions des valeurs, des évolutions, …

Niveau d'abstraction réfléchissante : *milieu algébrique où les modélisations nécessitent une certaine familiarité avec les objets précédemment décrits.*

T7) Reconnaître dans une fonction numérique (une formule algébrique) le représentant d'une classe de situations, un type de fonction (par exemple la fonction linéaire résume l'ensemble des situations de proportionnalité).

T8) Faire des opérations sur les fonctions avec les différents ostensifs P, T, F, C.

T9) Considérer une fonction comme l'élément d'un ensemble structuré (la formule est une variable qui entre dans des calculs algébriques).

Les participants à l'atelier pouvaient choisir parmi ces tâches celles qui sont à la charge de l'élève pour résoudre les exercices sur les contrats et les rémunérations. Ils devaient ensuite décrire leurs dépendances logiques à l'aide d'une matrice de type cc. Rappelons que dans l'exercice sur les contrats de location, l'élève doit repérer que le montant de la location dépend du prix au kilomètre parcouru (tâche 1) ; puis élaborer un programme de calcul de ce montant qui prend en compte la part forfaitaire (tâche 2). Le choix de la bonne formule (tâche 4) dépend donc des deux grandeurs (prix unitaire et forfait) qui entrent dans le programme. Dans l'exercice sur la rémunération des voyageurs de commerce, l'élève doit reconnaître des structures (tâche 7) après avoir repéré les dépendances entre grandeurs (tâche 1).

Matrice des dépendances logiques :

Nous proposons une illustration de l'usage que l'on peut faire des matrices de dépendances. Nous avons porté en ligne et en colonne, les tâches décrites précédemment. Dans chaque cellule (c_{ij}), le « 1 » indique que la réalisation de la tâche qui figure dans la i^{ème} ligne nécessite la connaissance correspondant à la tâche qui figure dans la j^{ème} colonne. Par exemple, pour pouvoir expliciter une relation fonctionnelle avec un programme, un tableau, une courbe ou une formule (tâche 2), l'élève doit avoir préalablement repéré les variables de la situation et leur dépendance (tâche 1) ; ce que nous figurons par un « 1 » dans la cellule c_{21}.

	T1)	T2)	T4)	T7)
T1) Repérer la dépendance entre variables				
T2) Décrire S avec PTCF	1			
T4) Associer deux des ostensifs PTCF	1	1		
T7) Reconnaître le représentant d'une classe	1	1		

4 – 3 Les dépendances didactiques et leurs évolutions

Nous venons d'expliquer que les dépendances logiques entre les objets à enseigner conditionnent l'ordre de leur enseignement. Mais le choix d'une organisation didactique pèse sur le sens que les élèves peuvent attribuer aux objets enseignés : l'idée que les élèves peuvent se faire d'une

relation numérique extraite d'une relation entre grandeurs diffère de la notion de fonction qui résulte d'une présentation formelle de ce concept. Une organisation ergonomique, apte à produire les effets didactiques attendus, doit aussi prendre en considération les formes de connaissances qui conditionnent le sens que les élèves peuvent attribuer aux objets mathématiques qu'ils rencontrent dans les situations didactiques. Les trois formes : usage implicite (Im), usage canonique (Ca), usage familier (Fa), concernent non seulement les objets de savoir mais aussi les relations que les élèves peuvent établir entre ces objets ; ce qui multiplie par trois les états didactiques envisageables. A cette lourdeur s'ajoute, pour le professeur, la difficulté d'attribuer, a priori, à une classe, une forme à une connaissance. Les conjectures du professeur s'appuient sur son expérience professionnelle et sur les informations qu'il peut recueillir auprès des élèves qui lui sont confiés. Il dispose des interactions qu'il a avec les élèves en situation didactique, des observations qu'il peut faire en situation adidactique (interactions entre élèves pendants les phases d'autonomie), des productions écrites (devoirs surveillés ou en temps libre).
Les participants étaient invités à mettre à l'épreuve l'usage des matrices de dépendances didactiques (cf et ccf) pour les quatre tâches repérées précédemment en conjecturant des formes de connaissances chez des élèves d'une classe de seconde.

Pour conjecturer des formes aux connaissances que les élèves de seconde vont activer pour réaliser ces tâches, nous nous appuyons sur les pratiques supposées des élèves. Depuis l'école primaire, les élèves travaillent sur les grandeurs et la proportionnalité et les programmes scolaires prévoient l'institutionnalisation, en fin de collège, des savoirs sur les fonctions linéaires et affines. A l'entrée en seconde, les élèves sont donc supposés capables de présenter un programme de calcul, permettant de résoudre une situation linéaire ou affine, sous une forme canonique (tâches T1 et T2). Par contre, ils ont plus de difficultés à associer la formule algébrique au programme de calcul (COMIN, 2005) et à reconnaître une structure dans une situation. Nous envisageons une connaissance implicite des tâches T4 et T7.
Dans la matrice suivante, figurent nos différentes conjectures sur les formes de connaissances que les élèves vont activer pour réaliser ces tâches T1, T2, T4, T7. Toute évaluation auprès des élèves peut conduire à invalider ces conjectures et à ajuster l'organisation didactique en conséquence.

Matrice cf : évolution des formes de connaissances pour les fonctions linéaires et affines en seconde.

	Formes supposées des connaissances à l'entrée en seconde	Formes supposées des connaissances après les leçons en seconde
T1) Repérer la dépendance	**Ca**	**Fa**
T2) Décrire S avec PTCF	**Ca**	**Fa**
T4) Associer deux des ostensifs PTCF	**Im**	**Ca**
T7) Reconnaître le représentant d'une classe	**Im**	**Ca**

Un travail identique de conjectures sur la forme supposée du lien que les élèves sont capables d'établir entre les différentes tâches nous a conduit à dresser la matrice suivante. Nous nous intéressons plus particulièrement aux tâches T1, T2, T4, T7. Par exemple, les élèves savent que pour décrire une situation avec au moins un des quatre ostensifs P, T, C, F (tâche T2), il faut préalablement repérer la dépendance entre les grandeurs (tâche T1) ; nous conjecturons que cette connaissance a été institutionnalisée au collège, ce qui est noté Ca dans la cellule c_{21} du tableau suivant.

Matrice ccf : formes supposées des dépendances entre connaissances avant les leçons de seconde, pour les fonctions linéaires et affines.

	T1	T2	T4	T7
T1				
T2	**Ca**			
T4	**Ca**	**Ca**		
T7	**Im**	**Im**	Im	

La reprise de l'étude des fonctions linéaires et affines en seconde a pour but de faire évoluer les connaissances des élèves et les formes de leurs dépendances. Il conviendrait maintenant de refaire cette matrice en projetant les nouvelles formes de connaissances des élèves après les leçons de seconde.

Ces analyses montrent que la complexité engendrée par l'étude des formes de connaissances, peut être maîtrisée, au moins ponctuellement, grâce à la fonctionnalité des différentes matrices des dépendances didactiques.

5 Conclusion et perspectives

Pour que l'étude des fonctions n'apparaisse pas, aux yeux des élèves, comme la construction d'une théorie sans objet, nous avons envisagé un curriculum où les fonctions numériques sont abstraites de relations entre grandeurs avant de devenir des entités algébriques qui résument et réfléchissent les connaissances de l'arithmétique.
Nous avons expliqué l'évolution des comportements d'élèves en modélisant leurs connaissances par des formes qui conditionnent la signification qu'ils peuvent attribuer à différentes situations et objets mathématiques.
Les matrices de dépendances logiques et didactiques peuvent être des outils mis à la disposition des professeurs, pour les aider à élaborer des projets didactiques adaptés aux évolutions supposées des connaissances des élèves et de leurs formes. Mais les répertoires des élèves placés dans les mêmes conditions d'apprentissage, n'évoluent pas tous de la même manière ni à la même vitesse. Or le professeur ne peut pas faire un suivi clinique individualisé. Il doit conduire toute une classe ; au mieux, il peut moduler son enseignement avec des groupes d'élèves. Il faudrait donc lui fournir les moyens de discriminer des groupes homogènes relativement aux formes de connaissances nécessitées par les situations, pour qu'il puisse ajuster l'organisation didactique aux besoins réels des élèves.

Références bibliographiques

BALACHEFF Nicolas. (1995). *Conception, connaissance et concept*. In : Denise Grenier (ed.) Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques, pp. 219-244. Grenoble : IMAG.
BLOCH Isabelle. (2002). *Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction*. Petit x n° 58
BROIN Dominique. (2002). *Arithmétique et algèbre élémentaires scolaires*. Université de Bordeaux I.
BROUSSEAU Guy. (1988). *Le contrat didactique : le milieu*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.9, n°3, pp.309-336
CHAUVAT Gérard. (1998-1999). *Courbes et fonctions au collège*. Petit x n°51.

CHEVALLARD Yves. (1985-1990). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Petit x, n°5, n°19 ; n°23.
CHOPIN Marie-Pierre. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques*. Bordeaux 2.
CIRADE Gisèle et MATHERON Yves. (2001). *Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques, à propos de fonctions*. Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques. La Pensée sauvage éditions.
COMIN Eugène. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.
COMIN Eugène. (2002). *L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 22, n°2-3, p.141.
COMIN Eugène. (2005). *Variables et fonctions, du collège au lycée*. Petit x n°67.
COMIN Eugène. (2008). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions*. Publication prévue dans petit x.
COPPE Sylvie, DORIER Jean-Luc, YAVUZ Ilyas. (2007). *De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.27, n°2, pp.151-186
RENE DE COTRET Sophie. (1985). *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Université du Québec.
DOUADY Régine. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol.7, n°2, pp.5-31.
ESMENJAUD-GENESTOUX Florence. (2006). *Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques*. Petit x, n°70.
GENESTOUX Florence. (2001). *Les assortiments didactiques* ; Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques ; La pensée sauvage éditions.
LACASTA Eduardo. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse, Université de Bordeaux I.
MAUREL Maryse, SACKUR Catherine, DROUHARD Jean Philippe. (2001). *Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse*. SFIDAXVI-Gènes.