Comment aborder en formation la question de l'enseignement du concept de fonction dans une mise en perspective entre collège et lycée?

Y. Girmens
IUFM de Montpellier

Résumé : Pour les professeurs –stagiaires de mathématiques, à l'issue de leurs études, la familiarité avec le concept de fonction est telle qu'ils n'envisagent son enseignement que comme celui d'objet existant à partir d'une définition langagière. L'atelier présente un exemple de démarche utilisée en formation visant à permettre aux professeurs stagiaires de découvrir l'organisation de l'apprentissage du concept de fonction, de l'entrée en collège à la fin de la seconde, conformément aux programmes, conjointement avec une mise en perspective historique. L'atelier montrera comment, à partir du cas « exemplaire » de la fonction, il est possible de dégager, pour les professeurs-stagiaires, les modalités de l'apprentissage, par les élèves, d'un concept mathématique, en relation avec la théorie des concepts de Gérard Vergnaud et la théorie des registres de Raymond Duval.

I- Les dispositifs de formation des PLC2 à l'IUFM de MONTPELLIER

Les stagiaires participent à trois groupes de travail de formation :

- Le Groupe de Formation Disciplinaire dans lequel sont abordés les grands repères didactiques et épistémologiques.
- Le Groupe d'Accompagnement Professionnel consacré à l'analyse des pratiques et à l'accompagnement du stage en responsabilité.
- Le Groupe de Formation Transversale qui regroupe des stagiaires de disciplines différentes pour des travaux sur les aspects de l'enseignement transdisciplinaires.

II- Un témoignage d'une démarche de travail, en groupe de formation disciplinaire, sur l'enseignement de la notion de fonction.

L'expérience des années antérieures a permis d'observer chez beaucoup de professeurs-stagiaires des représentations robustes :

- On ne peut pas commencer un travail sur les fonctions sans commencer par donner une définition de la notion de fonction.
- Un apprentissage ne peut être fait que si l'on dispose de tous les moyens de « représentation » d'une fonction
- L'enseignement sur les fonctions ne commence qu'en fin de collège, dés que l'on introduit les fonctions linéaires et affines.

Pour amener à une remise en cause de ces représentations, les objectifs spécifiques de cette formation sont de permettre aux stagiaires:

- d'identifier comment l'apprentissage de la fonction se structure dans la continuité des programmes.
- De faire un pas de côté par rapport aux connaissances académiques de type « objet ».

Sur un plan plus général, ce travail peut être mis à profit pour :

- analyser un apprentissage par processus dialectique outil/objet

- s’interroger sur la nature d’un objet mathématique et sur l’activité mathématique.

III- La démarche mise en œuvre

Première étape : entrée par les programmes

Un premier travail personnel est demandé aux stagiaires avec la consigne suivante :

« *Au niveau où vous enseignez, relever des types de tâches qui vous semblent avoir un rapport avec l’apprentissage de la notion de fonction* ».

A l’issue de cette première entrée par les programmes, une première mise en commun est organisée, sous la forme d’un travail en groupes par niveau de classe, avec la consigne :
« Comparer les éléments relevés et se mettre d’accord sur une conclusion commune »
Les différents compte-rendus des groupes sont présentés et rassemblés, ce qui permet de mettre en évidence une vue d’ensemble, de la 6e à la 2e, de l’enseignement relatif aux fonctions, tel qu’il apparaît dans les programmes.

Un questionnement collectif permet, en s’appuyant sur cette vision « curriculaire », d’apporter une première clarification sur les aspects suivants :

- le moment de la rencontre de la notion de fonction?
- la notion de « représentation »
- une notion mathématique intervenant en tant qu’ « outil implicite ».

Dans un deuxième temps, toujours sous forme de questionnement en collectif, on est opportun :

- d’expliciter la logique de la structuration de l’enseignement/apprentissage sur la notion de fonction.
- S’interroger sur le moment où intervient l’étiquette « fonction » et une définition langagière d’une « fonction »?
- Se questionner sur la nécessité et rôle d’une définition.

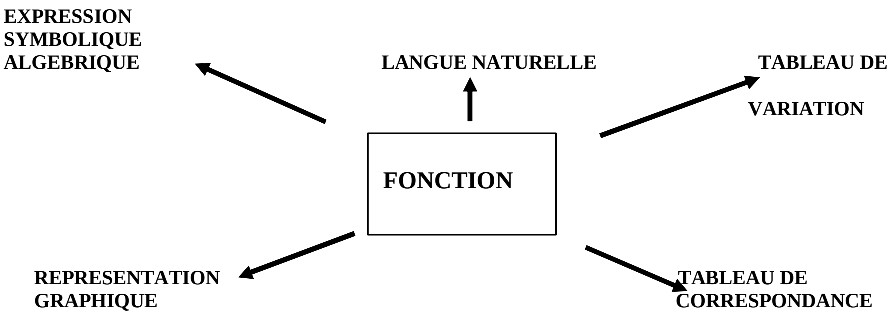
En prolongement, à un deuxième niveau, un éclairage théorique est apporté sur les aspects suivants :

-La nature d’un « objet mathématique » (Selon Raymond Duval)
-La notion de registre de représentation sémiotique (R.Duval)
-Les dimensions outil et objet (R.Douady).

« D’une part, l’appréhension des objets mathématiques ne peut être que conceptuelle et d’autre part, c’est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu’une activité sur les objets mathématique est possible »

Raymond DUVAL *:* « Paradoxe Cognitif de la pensée mathématique »

Il est souligné, qu’un objet mathématique est un objet de la pensée que l’on rend visible par l’intermédiaire d’une représentation sémiotique



Chaque représentation apporte un POINT DE VUE différent sur l'objet étudié

Chaque représentation fournit des connaissances sur l'objet dans le registre correspondant.

La notion de registre de représentation est introduite comme un système de signes permettant trois activités :

- La reconnaissance de l'objet représenté (par l'intermédiaire de signes structurés par une syntaxe)
- Le traitement pour tirer des informations (par des règles propres à chaque registre).
- La conversion dans un autre registre (à l'aide de règles de conversion).

En illustrant par des exemples rapportés par les groupes, il est précisé que :

- Une notion est un « outil » quand elle intervient pour étudier une situation ou résoudre un problème.
- Une notion devient un objet quand elle est formulée de la façon la plus générale avec des mots et un langage approprié.

Enfin, en synthèse, une mise au point est faite sur l'apprentissage d'un concept, se déclinant selon quatre axes :

- Les situations où le concept intervient comme « outil »
- Les moyens d'expressions et de représentations (registres)
- Les invariants opératoires
- Les techniques et savoir-faire

En complément, deux stagiaires sont sollicités pour mettre au propre une synthèse explicitant, pour chaque niveau, de la 6e à la 3e, les principaux « types de tâches » relatifs aux fonctions.

Ce document sera la « trace écrite » de cette première partie du travail.

<u>Deuxième étape</u> : entrée par l'histoire de la notion de fonction.

Il est d'abord demandé à chaque stagiaire, sous forme d'un travail personnel, d'étudier comment la notion de fonction s'est construite dans le temps.

Le support fourni est le document schématique, figurant en annexe 1, extrait de l'ouvrage « Enseigner les Mathématiques » Fascicule 1 –IREM de Poitiers.

La consigne donnée est la suivante : *« Pour chaque époque repérée, expliciter le savoir concernant la fonction, préciser le contexte, identifier la « forme » sous laquelle la fonction est présente »*

Le retour est organisé sous la forme d'une mise en commun suivie de la recherche d'une synthèse.

L'élaboration de la synthèse se fait autour de deux questions :

- Essayer de décrire comment la notion de fonction a été construite et développée par les mathématiciens.
- Peut-on voir un parallèle entre ce processus historique et l'apprentissage prévu par les programmes ?

Troisième étape : entrée par l'apprentissage

Le premier travail, réalisé en collectif, est une analyse critique de définitions de la notion de fonction fournies par des manuels de différentes époques (voir annexe 2):

Pour guider la réflexion, une question est formulée : *Quelles connaissances sur la fonction apporte chaque définition*?

A l'issue de cette analyse, pour amener à une conclusion, la question suivante est formulée :

- *Quelle définition vous semble le mieux convenir comme une formulation de l'objet « fonction »?*

L'étape suivante est un travail en groupes (niveaux de classe mélangés) qui prend appui sur des travaux d'apprentissage relatifs aux fonctions, relevés dans des ouvrages de différents niveaux de classe.

Les consignes sont les suivantes : Pour chaque travail proposé,

- *Préciser si la fonction intervient comme « outil » ou « objet »*
- *Décrire les types de tâches et les registres de représentation en jeu.*

La restitution du travail en groupes permet, à partir des conclusions de chaque groupe, de lancer des discussions et de rechercher une réponse commune.

En synthèse, en s'appuyant sur les travaux étudiés, les mises au point suivantes sont faites :

- Chaque type de tâche met en jeu l'articulation entre deux registres de représentation. (ex : graphique/langue naturelle)
- Chaque registre de représentation fournit un point de vue sur la fonction (les connaissances sont différentes selon la représentation qui est choisie).
- La mise en relation des registres permet l'accès au concept de fonction

En complément, deux types de situations rencontrées sont mises en avant :

-Travail à partir d'une représentation donnée

Le type de tâches est dans ce cas:

- Extraire des informations (connaissances sur l'objet) à partir de chaque représentation à l'aide des règles de traitement internes à chaque registre.

-Travail de passage d'une représentation à une autre

Dans ce cas, on relève deux types de tâches :

- Associer des informations relatives à deux registres.
- Prélever des connaissances dans un registre et les traduire dans un autre registre.

Ces deux types de tâches font appel aux règles de passage d'un registre à un autre (règles de conversion).

En prolongement, un travail personnel est proposé aux stagiaires **:**
« Au niveau où vous enseignez, bâtir une séquence d'apprentissage intégrant les différents aspects mis en évidence »

Bibliographie :

R.Duval « Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée »-Annales Didactique N°5-IREM Strasbourg.
G.Vergnaud « Théorie des Champs Conceptuels »-RDM N°2.3 .
R.Douady « Jeux de cadre et dialectique outil-Objet »-RDM N°7.2 .
Y.Chevallard « Sensibilité de l'activité mathématique aux Ostensifs »-RDM N°19.1.

ANNEXE 1

GENESE DU CONCEPT DE FONCTION DANS L'HISTOIRE

Epoque	Quel savoir ?	Dans quel contexte ?	Sous quelle forme la fonction est présente ?
Antiquité	- tableau de valeurs pour rendre compte de la dépendance entre deux grandeurs.	Etude de la dépendance entre deux quantités : - grandeurs (carré, cube) - valeurs de cordes d'un cercle (sinus)	-tables de nombres ***(tableau de correspondance)***
Moyen-âge	-quantités variables explicites. -dépendance définie.	Etude et analyse d'une dépendance entre deux quantités -grandeurs physiques :chaleur, vitesse, densité…	-description verbale - graphe
16^e et début 17^e siècle	-corrélation de différents aspects : courbes, tableaux, formules et expressions analytiques. - introduction du terme « fonction »(Leibniz)	-Etude des mouvements et des phénomènes physiques.	- courbe - formules (algèbre littérale de Viète)

Milieu 18e siècle.	-expression analytique inadéquate. -définition générale d'une fonction (Bernoulli)	-Etude des mouvements et phénomènes physiques (ex : équations des cordes vibrantes)	-emploi du symbole f et de x.
19e siècle	-théorie des fonctions	-la « fonction » devient un objet d'étude pour lui-même. -Caractéristiques des fonctions : continuité, dérivabilité….	- emploi de f(x²) ou de f(ax +b)
20e siècle	-définition générale du concept de fonction - cadre d'une théorie globale des mathématiques.	Recherche d'une théorie englobant toutes les mathématiques.	- toutes les formes connues à ce jour.

ANNEXE 2

- ***Bordas 3e (1999):***

-a est un nombre connu et fixé.

La fonction linéaire de coefficient a est définie par la relation suivante: à un nombre quelconque x, on fait correspondre le nombre a x.

- ***Hachette 3e (1999)*** :

-Etant donné deux nombres a et b, le procédé qui à tout nombre x fait correspondre le nombre ax + b s'appelle une fonction affine.

On note : $x \longrightarrow ax + b$

- ***Hachette 2e (1998) :***

-Une fonction f définie sur un ensemble D est un lien qui à chaque nombre x de D associe un unique résultat f (x)

- ***Didier 2e (1995) :***

-Définir une fonction sur un intervalle [a ; b], c'est donner un procédé qui à chaque élément x de [a ; b] fait correspondre un nombre noté f (x).

- ***Nathan 4 e (1973)***

-On dit qu'une relation f d'un ensemble A vers un ensemble B est une fonction si et seulement si, pour tout élément x de A, il y a au plus un élément y de B tel que le couple (x, y) soit lié par f.