La notion de fonction dans la formation initiale des professeurs : Quelles difficultés ? Quelles solutions ?

Gisèle Cirade *

Résumé. Au plan historique comme au plan scolaire, l'introduction de la notion de *fonction* fait passer d'un monde mathématique à un autre. De là découlent, pour les professeurs de mathématiques, un certain nombre de problèmes, avec lesquels les professeurs en formation initiale à l'IUFM, et tout particulièrement ceux ayant en responsabilité une classe de seconde, se trouvent d'emblée aux prises. Lorsque, en effet, on doit vivre et faire vivre dans les classes le passage des notions (plus ou moins « naturalisées ») de *programme de calcul* et de *formule* à celle de *fonction*, de la notion de *proportionnalité* à celle de *fonction linéaire* puis de fonction *affine*, pour arriver ultérieurement à la notion de fonction *dérivable*, les difficultés sont multiformes.

En nous appuyant sur une recherche ayant eu pour objet la formation dispensée durant plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille, nous nous proposons d'examiner à la fois les *questions* soulevées par les professeurs stagiaires confrontés à l'enseignement de la notion de fonction et les *éléments de réponse* apportés dans le cadre de la formation qu'ils reçoivent, dans laquelle les difficultés ainsi mises en débat sont regardées de façon générale comme révélatrices de problèmes que tout professeur de mathématiques peut avoir à affronter pour assurer un enseignement fonctionnel (et non pas formel) des fonctions en classe de seconde. La prise en charge, au fil des années, des questions formulées par les professeurs stagiaires aboutit à un apport non négligeable de la formation étudiée à la culture professionnelle des professeurs de mathématiques, apport dont nous exposerons, sur le point examiné, quelques éléments, en présentant certains des dispositifs mis en place dans la formation afin de pouvoir assurer cette prise en charge.

1. La notion de fonction dans les programmes

L'introduction et les usages de la notion de fonction font basculer d'un monde mathématique dans un autre, tant au plan historique qu'au plan scolaire. De là découlent alors un grand nombre de problèmes de la profession avec lesquels les professeurs stagiaires, notamment ceux qui enseignent en classe de seconde, se trouvent d'emblée aux prises. Dans la période actuelle, l'*idée* de fonction est censée être présente dans la classe de mathématiques depuis la 6^e^. Le programme en vigueur [14] dans cette classe jusqu'à l'année 2004-2005 comportait par exemple ce subtil commentaire : « Certains travaux conduiront à décrire des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" pourront être utilisées. » Cette distinction est reprise par le programme de la classe de 5^e^, à un détail près : « Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" seront utilisées. » Alors que les expressions mentionnées *peuvent* être utilisées en 6^e^, elles *doivent* l'être en 5^e^. Le programme de 4^e^ reconduit ces prescriptions : « Comme en 5^e^, le mot "fonction" sera employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée. » L'idée clé semble être celle de progressivité dans la montée en puissance du concept de fonction. C'est ainsi que, à propos du calcul littéral, le document d'accompagnement du programme du cycle central (5^e^-4^e^) précise :

* Université de Toulouse II-Le Mirail, IUFM de Midi-Pyrénées & ERT 64 GRIDIFE.

14. Les développements présentés dans cette section reposent sur les « anciens » programmes de collège car la recherche sur laquelle nous nous appuyons a été menée avant la mise en place des « nouveaux » programmes du collège, entrés en vigueur en classe de 6^e^ à la rentrée 2005. Pour ce qui nous occupe ici, ces programmes (anciens et nouveaux) ne présentent pas de différences essentielles.

> En classe de 5e, la substitution de nombres à des lettres permet, comme en classe de 6e, d'exécuter des calculs numériques, de comprendre et de maîtriser les règles d'écriture d'expressions littérales. Cette substitution, accompagnée de la constitution de tableaux de nombres et de la construction de points dans un plan muni d'un repère, prépare à la notion de fonction.

Ce même document annonce ce qui devrait être un changement crucial à opérer en classe de 3e. Commentant la place donnée à l'étude des situations de proportionnalité, ses rédacteurs écrivent en effet :

> La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. Sa bonne appréhension par les élèves est fondamentale, son apprentissage ne peut être que progressif. L'étude de situations familières permet de développer chez les élèves un « mode de pensée proportionnel ». C'est en classe de 3e que les fonctions linéaires sont introduites pour modéliser les situations de proportionnalité.

Ce qui était donc jusqu'alors une manière de penser cède la place à un *modèle mathématique*, celui des *fonctions linéaires* (et, plus largement, des fonctions *affines*). En vérité, le concept de fonction se voit doté d'une double ascendance : d'un côté il fournit un cadre conceptuel général à des entités fonctionnelles particulières, les fonctions linéaires et affines, qui modélisent les situations de proportionnalité ; d'un autre côté, il est un rejeton des manipulations sur les expressions littérales – le programme parle à cet égard « de compléter les bases du calcul littéral et d'approcher le concept de fonction ». Dans l'introduction au secteur des fonctions que propose le programme de 3e, la synthèse de cette double filiation est esquissée dans les termes suivants :

> L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples très simples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre un nombre à un autre nombre. Les exemples mettant en jeu des fonctions peuvent être issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de », déjà amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et sera associée à l'introduction prudente de la notation $f(x)$, où x a une valeur numérique donnée.

Le programme s'attache à marquer le lien qui doit être fait entre l'outil fonctionnel ainsi renouvelé et le passé mathématique des élèves. À propos des fonctions linéaires, indique-t-il ainsi, les élèves devront « connaître la notation $x \mapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée ». Un commentaire met en valeur cette indication dans les termes suivants :

> La définition d'une fonction linéaire de coefficient a s'appuie sur l'étude de situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « je multiplie par a ».

Allant plus loin, le programme de 3e ébauche un certain nombre de développements typiques de l'organisation mathématique classiquement mise en place autour de la notion de fonction. Ainsi inclut-il ce commentaire :

> L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \mapsto ax$ pour la fonction. À propos de la notation des images $f(2)$, $f(-0,25)$…, on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique.

La notion de *représentation graphique* d'une fonction linéaire est un autre objet d'étude canonique, qui fait ici l'objet de ce commentaire :

> L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite.

Cette esquisse d'étude est reprise et complétée à l'occasion de l'abord des fonctions *affines*. Là encore, les élèves devront « connaître la notation $x \mapsto ax+b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées », prescription qui est assortie de ce long commentaire :

> Pour des valeurs de a et b numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme « je multiplie par a puis j'ajoute b ». La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite,

> qui a une équation de la forme $y = ax+b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de x et y.

D'autres éléments classiquement inclus dans l'étude des fonctions seront abordés en 3e, sans pour autant faire l'objet d'une mise en forme arrêtée, comme le précise *in fine* le commentaire suivant :

> On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine.
> Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum.
> Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.

C'est donc en principe en 3e qu'un basculement fort s'opère, comme le document d'accompagnement du programme le souligne encore :

> Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Les transformations géométriques étudiées n'ont pas été présentées comme application du plan dans lui-même. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations numériques ou géométriques, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que « en fonction de » ou « est fonction de » ont été utilisées, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations n'ont pas été explicitées.

On aura noté que ce basculement, bien qu'articulé essentiellement aux fonctions linéaires et aux fonctions affines, n'y est pas entièrement limité, ce que le document d'accompagnement rappelle dans le passage suivant :

> La classe de 3e est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que $x \mapsto x^2$, sur un intervalle). Au lycée, la notion de fonction occupera une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse.

La classe de 3e est ainsi le lieu d'une récapitulation et d'une formulation renouvelée d'acquis des classes antérieures : elle constitue une préparation aux enseignements du lycée, et singulièrement aux enseignements de la classe de seconde. Le document déjà cité précise par exemple :

> La notion de fonction linéaire permet, en 3e, d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

Les points d'articulation avec le programme de seconde sont ainsi plus nombreux que beaucoup de professeurs semblent le penser, comme on peut le constater par exemple à travers les *questions* soulevées par les professeurs stagiaires lors de leur formation, notamment ceux ayant en responsabilité une classe de seconde.

2. Courbe et tableau de variation

2.1. Les questions de la semaine et le forum des questions

À l'IUFM d'Aix-Marseille, la formation des élèves professeurs de mathématiques intègre un dispositif dit des « questions de la semaine » [15]. Chaque semaine ouvrable, dans le cadre du séminaire de didactique des mathématiques, les professeurs stagiaires sont invités à consigner par écrit, individuellement, une difficulté qu'ils ont rencontrée et les interrogations que celle-ci soulève pour eux. Pour l'année 2007-2008, ce dispositif était présenté comme suit.

> La sous-rubrique *Questions de la semaine* requiert de chaque participant au Séminaire, chaque semaine ouvrable, qu'il consigne par écrit – au démarrage de la séance [du groupe de formation professionnelle] du mardi matin – une difficulté rencontrée dans le cadre de sa formation au métier de professeur de mathématiques, y compris bien sûr dans les stages de terrain, c'est-à-dire à l'occasion des enseignements qu'il assure ou auxquels il est associé. Les questions ainsi formulées sont regardées, sauf exception, comme des questions *qui se posent à la profession* à travers l'un de ses nouveaux membres, et non comme l'affaire personnelle de tel ou tel. Leur étude éventuelle dans le cadre de la formation concerne donc *tout professionnel de l'enseignement des mathématiques*, et pas seulement celui qui, ayant porté témoignage de la difficulté rencontrée, aura ainsi contribué au *développement de la profession* que cette année de formation doit promouvoir. Le contenu de ces questions sera présenté la semaine suivante dans la rubrique *Question de la semaine* du Séminaire de façon à dégager les *problèmes de la profession* rencontrés et soumis à l'étude par la classe.

Ce dispositif vit en étroite association avec le *forum des questions*, dans lequel sont apportés, par écrit, des « matériaux pour une réponse ». Ces éléments de réponse, dont il faut préciser qu'ils ne constituent pas tant une réponse à l'*auteur* de la question qu'une réponse à la *question* posée, fournissent un apport de *matériaux* en vue de permettre à chacun de *construire* une réponse qu'il mettra en œuvre personnellement, et provisoirement – en attendant d'autres matériaux éventuels qui le conduiront peut-être à déconstruire et à reconstruire la réponse établie.

2.2. Une question et des matériaux pour une réponse

En 2000-2001, lors de la 12e séance du séminaire, une stagiaire ayant en responsabilité une classe de seconde formule par écrit la question [16] suivante :

> En 2de, le programme prévoit au moment de l'introduction sur les fonctions, la tâche « connaissant la courbe représentative d'une fonction, dresser son tableau de variation ». Comment justifier cela auprès des élèves ? (2000-2001, 2de, semaine 12)

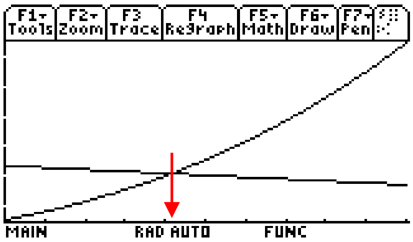
Cette question est prise en compte dès la séance suivante, mais les *Matériaux pour une réponse* figurant dans les notes du séminaire montrent que le formateur commence par substituer à la question posée une autre question qui lui paraît sans doute plus fondamentale et qu'il formule ainsi : « Comment justifier auprès des élèves qu'on s'efforce d'obtenir la représentation graphique d'une fonction donnée par son expression analytique ? Qu'est-ce qui motive cette quête ? » La réponse apportée à cette question – laissée depuis plusieurs décennies sans réponse institutionnelle claire – fait d'abord référence à un état antérieur du champ du calcul numérique, celui d'un temps où la disponibilité de représentations graphiques précises et toutes faites permettait de résoudre des équations de degré 2 et 3.

> – Classiquement, en fait, la représentation graphique constituait le point culminant, l'achèvement de l'étude de la fonction et *ne servait donc à rien.*
>
> – Elle servait autrefois à résoudre des équations et inéquations par *« calcul graphique »*.
>
> • Il fallait alors, pour cela, que la courbe représentative soit une *épure* (et non un tracé qualitativement correct mais quantitativement approximatif).
>
> • Ainsi, pour résoudre graphiquement les équations du type $x^3+px+q = 0$ (auxquelles se ramène *toute* équation de degré 3), on *tabule* une fois pour toutes l'application $x \mapsto x^3$, comme ci-après :

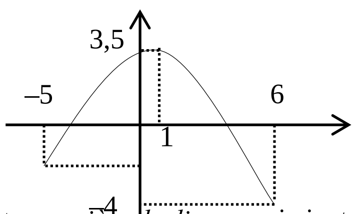
---

15. Pour une présentation de la formation dispensée, voir la communication d'Yves Chevallard & G. Cirade lors d'un précédent colloque de la CORFEM (2006).

16. Les questions présentées sont suivies de l'information codée suivante : année de la formation, classe en responsabilité, semaine dans l'année.

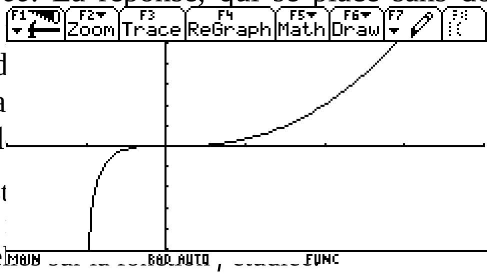
> 1,40 $\mapsto$ 2,74 ; 1,41 $\mapsto$ 2,80 ; 1,42 $\mapsto$ 2,86 ; 1,43 $\mapsto$ 2,92 ; 1,44 $\mapsto$ 2,99 ; 1,45 $\mapsto$ 3,05 ; 1,46 $\mapsto$ 3,11 ; 1,47 $\mapsto$ 3,18 ; 1,48 $\mapsto$ 3,24 ; 1,49 $\mapsto$ 3,31 ; 1,50 $\mapsto$ 3,38 ; …
>
> Pour résoudre l'équation $x^3+px+q = 0$, il suffit alors de tracer la courbe $\mathcal{C}_3$ représentative de $x \mapsto x^3$, puis la droite $\mathcal{D}_{p,q}$ d'équation $y = -px-q$, enfin de lire l'abscisse de l'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec $\mathcal{D}_{p,q}$. Ainsi, pour $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ on construit sur du papier finement quadrillé la courbe $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -0{,}75x+2{,}75\sqrt{2}$, ou plutôt la droite $\mathcal{D}^*$ d'équation $y = -0{,}75x+3{,}89$ ($2{,}75\sqrt{2} \approx 3{,}89$). (De façon anachronique, on a réalisé l'opération, ci-après, avec une calculatrice graphique.)
>
> Il ne reste plus alors à « lire » la solution x^* par « *interpolation à vue* » : $x^* \approx 1{,}41$. (En fait, on a $4x^3+3x-11\sqrt{2} = 0$ pour $x = \sqrt{2} =_{\text{calc}} 1{,}414213562\ldots$)
>
> 
>
>
> • Pour résoudre les équations du second degré $x^2+px+q = 0$ on peut, de même, opérer graphiquement par l'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ avec la droite $y = -px-q$, ou encore par l'intersection de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ avec la droite $y = -\frac{1}{q}x - \frac{p}{q}$ (ce qui pose le problème de la division par q).

La réponse aborde ensuite la question soulevée par l'élève professeure : pour quelles raisons doit-on apprendre aux élèves à passer de la courbe représentative – supposée disponible – d'une fonction à son tableau de variation ? Incontestablement, notons-le d'abord, le programme de seconde prescrit de faire travailler ce type de tâches – à propos duquel il parle d'ailleurs de « fonction définie par une courbe » – ainsi que quelques autres encore [17]. La réponse consignée dans les notes du séminaire s'appuie sur une distinction présente dans le texte du programme, mais qui peut paraître quelque peu opaque au néophyte : « S'il s'agit des courbes, y lit-on en effet, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. » S'agissant du premier type de courbes, la réponse est alors la suivante.

> Dans le cas où la « courbe » apporte une « information exhaustive » sur les variations de la fonction, le passage de la « courbe » au tableau de variation n'est en fait qu'un changement de *code graphique* : il n'y a pas plus dans la courbe qu'il n'y a dans le tableau de variation, la courbe n'est qu'une expression graphique plus proche par l'apparence de la réalité représentée. Sur le schéma ci-contre, par exemple, on *voit* que $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de 3,5 à –4 quand x croît de 1 à 6.
>
> 
>
>
> En vérité, le schéma *n'est qu'une autre manière de dire* ce qui vient d'être indiqué. Il s'agit donc purement et simplement d'apprendre à décoder les informations qui s'y expriment, et inversement à coder sous la forme d'un tel schéma les informations apportées par un tableau de variation ou sous forme discursive (comme ci-dessus : « $f(x)$ croît de –2,1 à 3,5 quand x croît de –5 à 1, puis décroît de… »).

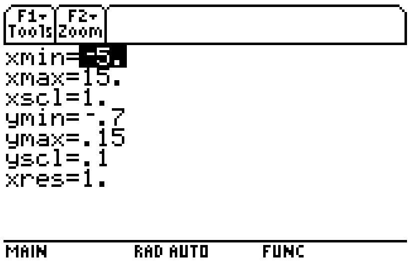
17. Notamment le type de tâches « réciproque » : « Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation. »

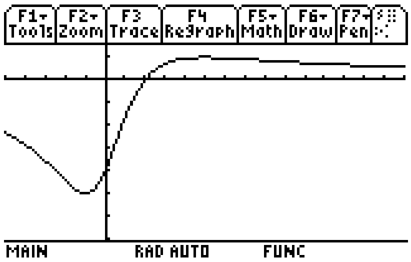
Le second type de « courbes » repéré par le programme est en fait d'une autre nature et soulève des problèmes qui seront résolus classiquement, à partir de la classe de première, au moyen de l'étude du signe de la *dérivée*. La réponse, qui se place sans doute dans la zone supérieure d'habilité calculatoire qu'on [illegible] aujourd'hui, propose sur ce point un exemple qui, à vrai d[illegible] le programme prescrit – tout cela, sans doute, pour fra[illegible]étendre livrer un matériel d'enseignement prêt à l'empl[illegible]



Dans le cas où la « courbe » est [illegible]oses sont toutes différentes : le tableau de variation modélise, [illegible] graphique « empirique », qui apporte des informations partie[illegible]

– Supposons par exemple que l'on étudie la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle [–5 ; 15]. Une calculatrice graphique livre par exemple le tracé suivant du graphe de *f*.





– On peut traduire le comportement observé par la *conjecture* suivante : *f* décroît d'abord sur [–5 ; α], où α ≈ –1, puis croît sur [α ; β], où β ≈ 5, enfin décroît sur [β ; 15].

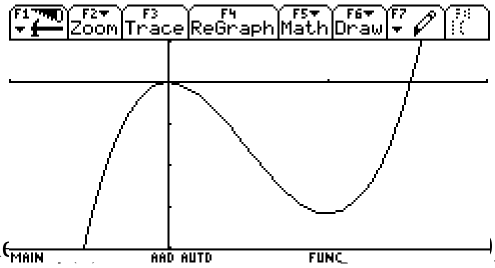
– Il resterait alors à vérifier qu'il en est bien ainsi, opération pour laquelle on ne dispose, en 2de, que d'*outils rudimentaires*, mais néanmoins utilisables.

• Soit *a*, *b* ≥ 5, avec *a* < *b* ; tentons d'établir que *f*(*a*) > *f*(*b*), c'est-à-dire que $\frac{a-2}{a^2+5} > \frac{b-2}{b^2+5}$. On a successivement : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow (a-2)(b^2+5) > (b-2)(a^2+5) \Leftrightarrow ab^2 + 5a - 2b^2 - 10 > a^2b + 5b - 2a^2 - 10 \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0 \Leftrightarrow ab - 5 - 2(a+b) > 0$.

• Pour $a \geq 5$, on a : $ab-5-2(a+b) \geq 5b-5-2(a+b)$. Or : $5b-5-2(a+b) = 3b-5-2a = (b-5)+2(b-a) > 0$ et donc $ab - 5 - 2(a+b) > 0$, comme demandé. On a ainsi établi que *f* est strictement décroissante sur [5 ; 15].

Pourquoi alors cherche-t-on à connaître les variations d'une fonction sur un intervalle, tel qu'un « tableau de variation » peut les donner à voir. La démonstration proposée dans l'extrait ci-dessus témoigne de ce qu'un tableau est supposé apporter une information validée « théoriquement », alors que le tracé « obtenu sur un écran graphique » est un objet empirique qui peut tromper l'observateur. Le phénomène est au cœur des changements qui affectent aujourd'hui la culture mathématique au lycée dans ses rapports avec l'emploi des calculatrices (ce qui suffirait à justifier le travail accompli sur ce point dans le séminaire). De cela témoigne par exemple le sujet proposé à l'ensemble des candidats au baccalauréat de la série scientifique en 2005 en Nouvelle-Calédonie : on y considérait la fonction définie sur]–1 ; +∞[par $f(x) = x^2 - 2{,}2\,x + 2{,}2 \ln(x + 1)$, qui s'annule en $x = 0$; si, comme le demande la première question de l'énoncé, on fait apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$, on voit s'afficher ceci, qui porte à regarder *f* comme une fonction croissante.

Or l'étude analytique de f (dans laquelle l'énoncé guide les candidats) conduit à établir que la courbe représentative a en réalité l'allure suivante : f s'annule en une valeur $x > 0$.



Mais la valeur $x > 0$ en laque ,151778066136 (valeur pour laquelle f prend la valeur $-$ 8,194539… $\times 10^{-14}$). Pour cela, la portion de courbe ci-dessus n'a pu être obtenue qu'en prenant pour fenêtre $-0{,}1 \leq x \leq 0{,}2$, $-4 \times 10^{-4} \leq y \leq 10^{-4}$, choix auquel on arriverait malaisément par de simples tâtonnements.
La réponse à la question examinée n'est pas achevée. Dans un paragraphe ultérieur, son rédacteur s'interroge sur l'intérêt de connaître les *variations* d'une fonction. À nouveau, la réponse qu'il apporte fait référence – de façon un peu implicite – à l'histoire de l'analyse élémentaire : l'étude des variations d'une fonction doit être située dans la perspective de la recherche des *extrémums* de la fonction sur un intervalle donné. Cette réponse est masquée, institutionnellement, par l'outil que l'on met aujourd'hui au service d'un tel projet : le calcul de la dérivée et l'étude de son signe. Contre cela, la réponse apportée fait l'économie de l'appareil mathématique devenu classique – la dérivée – et s'efforce d'aller à l'essentiel en recourant à des outils rudimentaires, mais exploités de façon judicieuse.

Qu'est-ce qui motive la connaissance des variations d'une fonction sur un intervalle ? Une réponse classique, liée à ce qu'on appelait autrefois les « *problèmes de maxima et de minima* », est que c'est là une voie – qui n'est pas la seule ni nécessairement la plus directe – pour déterminer les *extrémums* d'une fonction.

• On peut par exemple se demander (pour des raisons dans lesquelles on n'entrera pas ici) quel est le maximum (s'il existe) de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par exemple.

• Le travail déjà fait à propos de f permet de répondre. On sait déjà que $f(5) > f(b)$ pour $b > 5$. Reprenons alors le travail sur l'inégalité $f(a) > f(b)$ au point où l'on n'avait encore fait usage d'aucune hypothèse sur a et b. On a : $f(a) > f(b) \Leftrightarrow ab(b-a) + 5(a-b) - 2(b^2-a^2) > 0$.

Faisons $a = 5$, et supposons $b < 5$. Il vient : $f(5) > f(b) \Leftrightarrow 5b - 5 - 2(b+5) < 0 \Leftrightarrow 3b - 15 < 0 \Leftrightarrow b < 5$. On obtient ainsi que $f(5) > f(b)$ sur $[0\ ;5[$: f atteint donc son maximum sur $[0\ ;+\infty[$ en 5.

• On saisit mieux alors l'intérêt de l'étude préalable des variations d'une fonction f : dispenser d'études locales multipliées. Pour la fonction f déjà examinée, par exemple, les égalités ①, ②, ③

$$\begin{aligned} f(a)-f(b) &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[ab-5-2(a+b)] \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(a-5)b+(b-5)+2(b-a)] && ① \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[(b-5)(a+1)+3(a-b)] && ② \\ &= \frac{b-a}{(a^2+5)(b^2+5)}[a(b+1)-3(a+1)-2(b+1)] && ③ \end{aligned}$$

justifient respectivement les comportements de f conjecturés sur $[5\ ;15]$, $[-1\ ;5]$, $[-5\ ;-1]$.

3. Fonction linéaire

3.1. « Observation et analyse »

On notera que les manipulations algébriques effectuées précédemment le sont de manière *fonctionnelle*, et non pas formelle. Mais le retour sur les « fondamentaux » de la théorie des fonctions est à peine amorcé par les considérations qui précèdent. Nous continuons notre exploration en suivant l'une des rubriques du séminaire, intitulée *Observation & Analyse*. Ce dispositif propose d'analyser les praxéologies professionnelles en s'appuyant notamment sur des comptes rendus d'observation de séance en classe réalisés lors des visites effectuées dans le cadre de la validation de la formation des élèves professeurs.

3.2. Proportionnalité et fonctions linéaires

Cette même année 2000-2001, le séminaire travaille sur une observation dans une classe de seconde à propos des *fonctions linéaires*. En seconde, le sujet n'est pas neuf. Est-il pour autant véritablement maîtrisé dans la culture des professeurs ? La séance choisie pour être analysée ne l'a pas été par hasard. On y voit le professeur stagiaire observé mettre en place une technique de calcul de la valeur d'une fonction linéaire qui ne nous semble pas être bien partagée, encore aujourd'hui, dans la culture mathématique du secondaire. Elle consiste, lorsqu'on sait par exemple que la fonction linéaire f vérifie $f(5) = 3$, à calculer $f(7)$ en écrivant : $f(7) = f\left(\frac{7}{5} \times 5\right) = \frac{7}{5} f(5) = \frac{7}{5} \times 3 = \ldots$ Les notes du séminaire soulignent à cet égard que ce qui importe ici est la propriété qu'on peut noter $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, pour tout $x \in 3$, alors que, mû sans doute par un habitus engendré à l'université par l'étude de l'algèbre linéaire, le professeur stagiaire avait inséré dans son « cours » ce couple de propriétés présenté comme « caractéristique » des fonctions linéaires :

$$\begin{cases} f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x). \end{cases}$$

On voit ainsi de manière très concrète comment des connaissances acquises dans un autre contexte d'activité mathématique doivent être retravaillées pour être manipulées adéquatement en classe – ici, dans une seconde. Les fonctions linéaires ne sont pas, en l'espèce, des applications « de 3^n dans 3^m » en général, mais des applications de 3 dans 3. C'est ce que souligne implicitement le commentaire inclus dans les notes du séminaire.

> – L'organisation mathématique qui se met en place sous les yeux de l'observateur se forme autour de deux types de tâches, T_C et T_M, successivement abordés.
>
> – Les tâches du premier type, T_C, consistent, une fonction linéaire f étant connue par une de ses valeurs, $f(x_0) = y_0$, à calculer la valeur $f(x)$ pour une valeur x donnée quelconque.
>
> – Une technique classique, τ_C, consiste pour cela à calculer d'abord le *coefficient de proportionnalité* $k = \frac{y_0}{x_0}$ puis à calculer $f(x)$ par l'expression analytique $f(x) = kx$.
>
> – Une autre technique, τ_C*, que P s'efforce de mettre en place au cours de la séance observée, consiste à effectuer, oralement ou par écrit, la suite de calcul ci-après :
>
> $$f(x) = f\left(\frac{x}{x_0} x_0\right) = \frac{x}{x_0} f(x_0) = \frac{x}{x_0} \times y_0.$$
>
> – La justification de cette technique se trouve (plus ou moins implicitement) dans les deux « propriétés des fonctions linéaires » établies plus tôt dans la matinée.
>
> – On notera, plus exactement, que c'est en fait la *seconde* propriété, le fait que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, qui est *seule* utilisée dans cette justification. Ce fait n'est pas explicité, alors même que sa compréhension découle d'une simple utilisation « technologique » de la technique en cours de construction – en dimension 1, la première propriété, $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$, se déduit trivialement de la seconde, puisqu'on a :
>
> $$f(x_1+x_2) = f((x_1+x_2)\times 1) = (x_1+x_2)f(1) = x_1f(1)+x_2f(1) = f(x_1\times 1)+f(x_2\times 1) = f(x_1)+f(x_2).$$
>
> – La propriété d'additivité des fonctions linéaires ne peut donc avoir qu'une valeur *technique*, maladroitement exploitée par l'un des élèves à l'occasion du calcul de $f(5)$, et qui, puisque les élèves connaissaient $f(3)$ par définition de f et avaient calculé $f(5)$, aurait pu être beaucoup plus judicieusement

mise en jeu dans le calcul de $f(8)$, partie du travail proposé dont on sait qu'elle ne sera pas réalisée en séance…

La dynamique de travail du séminaire conduira à bien des développements encore. C'est ainsi que, s'agissant des techniques τ_C et τ_{C*}, il apparaîtra utile de préciser les techniques fort anciennes du type « règle de trois », en lesquelles on peut voir le germe des techniques « modernes » τ_C et τ_{C*}. De cette relativement longue incursion dans l'histoire des mathématiques de la proportionnalité, on ne retiendra ici, à titre d'illustration, que les éléments de conclusion reproduits ci-après.

– D'autres techniques ont été proposées avec le souci d'une moindre « pression » mathématique […], tout en étant « à technologie intégrée ». Ainsi en alla-t-il de la « méthode de *réduction à l'unité* », qui fut longtemps l'apanage de l'enseignement primaire élémentaire, et qui supposait de dérouler un texte *appris par cœur*, enchâssant de brefs *calculs*, qu'il fallait être capable de faire *de tête* (d'où le caractère très fonctionnel de l'entraînement au calcul mental), dans le déroulé même du discours, afin de ne pas interrompre celui-ci : « Trois cahiers coûtent 13,80. Un cahier coûte 3 fois moins, soit 13,80 F ÷ 3 = 4,60 F. Cinq cahiers coûteront 5 fois plus, soit 4,60 F × 5 = 23 F. »

– Au-delà de ces formes classiques de la *« règle de trois »* apparaît la forme « moderne », cristallisée dans l'égalité $y = kx$, et qui, en fait, n'est qu'une mise à jour de la technique de réduction à l'unité. C'est aussi la technique notée τ_C lors de la séance 10. Dans le cas pris pour exemple ici, le coefficient de proportionnalité k est le prix unitaire : « On a : $3k = 13{,}80$ et donc $k = 13{,}80 \div 3 = 4{,}60$. Le prix y de x cahiers est donc donné par : $y = 4{,}6\,x$. Pour $x = 5$, il vient $y = 4{,}6 \times 5 = ...$ »

– Une forme très utile, faiblement mathématisée et à technologie en partie intégrée (ce qui la distingue de la « règle pratique » vue plus haut, dont elle n'est qu'une version plus « intelligente »), a aussi été poussée en avant, notamment par l'ancien programme de la classe de 4^e^ sous un libellé apparemment sibyllin, que les auteurs de manuels comme les professeurs semblent avoir ignoré sans états d'âme :

« L'image par une application linéaire d'une somme, ou du produit par un nombre donné, ce qui permet à l'occasion de faire fonctionner l'application linéaire sans utiliser son coefficient. »

Cette technique, très proche de la technique τ_{C*} de la séance en classe 2^de^ en cours d'analyse, conduit à « produire » l'égalité $5 = \frac{5}{3} \times 3$ afin d'en déduire l'égalité attendue :

$$\begin{array}{ccc} 5 & = \frac{5}{3} \times & 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & = \frac{5}{3} \times & 13{,}80 \end{array}$$

– La technique fonctionnelle τ_{C*} découle en fait de la technique précédente, en l'explicitant plus solidement par le recours à la notion de fonction et à la notation correspondante :

$x = f(5) = f\left(\frac{5}{3} \times 3\right) = \frac{5}{3} f(3) = \frac{5}{3} \times 13{,}80 = \ldots$

3.3. Modélisation par une fonction linéaire

Le travail porte aussi sur les questions de *modélisation* d'une situation par une fonction *linéaire*, ce qui correspond à ce que le texte reproduit plus haut nommait le type de tâches T_M, dont un autre passage précise ainsi la nature.

– Le type de tâches T_M consiste, étant donné un système $\mathcal{S}$,

- à identifier deux (grandeurs) *variables*, x et y, de ce système,
- à vérifier que, lorsque l'état du système $\mathcal{S}$ varie, il existe entre les variables x et y une relation *fonctionnelle*, et que cette relation fonctionnelle est *linéaire*, c'est-à-dire que x et y sont des « grandeurs directement proportionnelles », ce qu'on note classiquement $y \propto x$,
- à déterminer un couple (x_0,y_0) de valeurs des variables x et y (si $x_0 = 1$, y_0 n'est rien d'autre que le coefficient de proportionnalité).

Cela fait, on peut enclencher l'exécution de tâches du type T_C : une valeur x_1 étant donnée, calculer la valeur y_1 correspondante, etc.

Le travail amorcé conduit alors à expliciter une question qui semble peu et mal posée dans le curriculum mathématique du collège : « Qu'est-ce qui assure que la relation fonctionnelle entre *x* et *y* est linéaire, c'est-à-dire que nous avons bien affaire à une *situation de proportionnalité* ? » Là encore, le travail s'appuie sur l'enquête historique. Le rédacteur présente à cette fin un passage d'un « cours d'arithmétique élémentaire à l'usage des écoles primaires » datant du XIXe siècle, dans lequel on peut lire le discours classique sur le sujet, selon lequel la charge de la preuve est *extérieure au champ de l'arithmétique* – où l'on se contente d'enregistrer des résultats relevant d'autres domaines, mathématiques ou extra-mathématiques.

> En arithmétique, on n'a jamais à démontrer que deux grandeurs varient dans le même rapport ou dans un rapport inverse ; tantôt c'est une convention ou bien un fait d'expérience, tantôt c'est une vérité de géométrie, de physique ou de mécanique.
>
> Par exemple, on démontre, en géométrie, que les circonférences sont entre elles comme leurs rayons. – En physique, on prouve, par l'expérience, que les volumes occupés par une masse d'air sont, lorsque la température reste la même, en raison inverse des pressions qu'elle supporte. – L'observation a montré que les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de cet astre. – On fait voir, en mécanique, que les espaces parcourus par les corps qui tombent librement dans le vide sont proportionnels aux carrés des temps.
>
> Dans les applications numériques, on admet ces vérités sans démonstration.

Le rédacteur saisit cette occasion pour souligner ce que nous avons nommé plus haut le basculement d'un monde mathématique dans un autre – du monde ancien, où l'on combinait proportionnalité directe et/ou inverse et puissances positives et/ou négatives des variables considérées, au monde actuel où de telles combinaisons se trouvent subsumées sous le concept général de fonction.

Cette remarque rappelle en passant l'usage *intensif*, quasiment *universel*, de la proportionnalité avant l'avènement de la notion de fonction : là où, par exemple, nous verrions une application $f : t \mapsto d = kt^2$ (donnant la distance parcourue en fonction du temps) on voyait jadis une proportionnalité $d \propto t^2$.

Mais la question du critère de la proportionnalité va donner lieu à un examen plus poussé. Celui-ci aboutit à la mise en avant d'un résultat mathématique non élémentaire, mais utile pour situer les notions enseignées et l'évolution de leur enseignement.

– Le fait qu'on ait bien affaire à une situation de proportionnalité fait l'objet d'un critère que les auteurs classiques présentent généralement comme le font les auteurs du manuel d'arithmétique pour la « classe de mathématiques » (correspondant à la terminale S d'aujourd'hui) cité ci-après : ayant défini la relation de proportionnalité entre les variables *x* et *y* par l'existence d'un nombre *k* tel que, pour tout couple (x, y) de valeurs de ces variables, on a $y = kx$, ils indiquent (F. Brachet et J. Dumarqué, *Arithmétique*, Delagrave, Paris, 1934, p. 114) :

> Pour que deux grandeurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient proportionnelles, il faut et il suffit :
>
> 1° qu'à deux états égaux de l'une correspondent des états égaux de l'autre ;
>
> 2° qu'à la somme de deux états quelconques de l'une corresponde la somme des états correspondants de l'autre.

Cette définition revient à dire, d'abord que l'on a une bijection (une application « biunivoque ») entre « états » des variables considérées, ensuite que cette bijection (comme sa réciproque) est *additive*.

• Il est clair que si *f* est de la forme $f(x) = kx$, il y a bien additivité :

$f(x_1+x_2) = k(x_1+x_2) = kx_1+kx_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

• La réciproque recèle une difficulté que les manuels d'autrefois ignoraient. Si *f* est additive, on a $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0)$, ce qui donne $f(0) = 0$; pour tout $n \in \angle^*$, on a alors

$f(nx) = f((n-1)x)+f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$

si bien que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \angle$. Il vient ainsi, pour $n \in \angle$ et $m \in \angle^*$,

$$m\, f\left(\frac{n}{m}\, x\right) = f\left(m\, \frac{n}{m}\, x\right) = f(nx) = n\, f(x)$$

en sorte que $f\left(\frac{n}{m}\, x\right) = \frac{n\, f(x)}{m} = \frac{n}{m}\, f(x)$. On a donc $f(rx) = rx$ pour tout $r \in \Theta_+$. Mais, pour passer de Θ_+ à 3_+, il convient de faire sur f une hypothèse de régularité supplémentaire : telle est la difficulté que le texte classique ignore.

• Si, par exemple, on suppose que f est continue, même en un seul point $x_0 \in 3_+$, l'affaire est close. Tout d'abord, si (x_k) est une suite tendant vers $x \in 3_+$, on a

$f(x_k) = f(x_k–x+x_0) + f(x) – f(x_0)$

et donc $\lim f(x_k) = \lim f(x_k–x+x_0) + f(x) – f(x_0) = f(x_0) + f(x) – f(x_0) = f(x)$, de sorte que f est continue en tout point de 3_+. Alors, si $(r_k)_{n\in\angle}$ est une suite de rationnels positifs tendant vers $\lambda \in 3_+$, on a, pour tout $x \in 3_+$, $f(\lambda x) = \lim f(r_k x) = \lim r_k f(x) = (\lim r_k)\, f(x) = \lambda f(x)$.

• On peut aussi, au lieu de la continuité, supposer que f est *bornée sur un intervalle ouvert borné au moins*, « aussi petit qu'on veut », ou encore qu'elle est *mesurable* : on montre en effet que chacune de ces conditions, *jointe à l'additivité* de f, entraîne que f est linéaire. On montre aussi que l'absence d'une telle condition supplémentaire *ne permet pas de conclure* : il existe des fonctions *additives non linéaires*. Une telle fonction doit évidemment être *discontinue en tout point*, n'être *bornée sur aucun intervalle*, si petit soit-il, et n'est pas *mesurable* : la définition d'un tel « monstre » utilise l'axiome du choix (et, plus précisément, l'existence d'une base de Hamel, c'est-à-dire d'une base de 3 regardé comme espace vectoriel sur le corps Θ des rationnels).

L'analyse du compte rendu d'observation se révèle génératrice d'un véritable *parcours de formation*, aux propriétés « écologiques » analogues à celles des *parcours d'étude et de recherche* (PER) [18]. Le travail du séminaire, en l'espèce, va conduire à s'arrêter sur une question essentielle touchant à la dialectique de la modélisation, c'est-à-dire aux liens complexes entre modèle et système modélisé. Les notes du séminaire introduisent ainsi cette question.

…dès que le système $\mathcal{S}$ auquel on s'intéresse n'est pas strictement mathématique, le caractère linéaire du lien fonctionnel entre les variables x et y n'est qu'*approché* (à moins qu'il ne soit défini par « convention entre les hommes »). C'est ce que note par exemple un autre auteur, l'abbé Moreux, dans un ouvrage de vulgarisation intitulé *Pour comprendre l'Arithmétique* (Doin, Paris, 1931, p. 100-101) :

Les règles énoncées sont applicables toutes les fois qu'il y a proportionnalité entre des nombres ou des grandeurs. Les cas de ce genre sont nombreux surtout en Géométrie et en Physique. En voici quelques cas.

Deux rectangles de même base ont leurs surfaces proportionnelles à leurs hauteurs.

Deux circonférences sont proportionnelles à leurs diamètres et à leurs rayons.

Dans le mouvement régulier ou uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, c'est-à-dire que si le temps est trois fois plus long l'espace parcouru sera trois fois plus grand.

Tout ceci est exact et rigoureusement exact, mais il n'en est pas toujours de même dans la pratique.

On admet en effet qu'un salaire doit être proportionnel au temps consacré par l'ouvrier à faire son travail ; et ceci est une pure convention. En fait, tout le monde sait qu'un ouvrier ne travaille pas toujours avec la même ardeur ; il y a des heures où son activité est plus grande ou plus ralentie.

De même on admet que 3 ouvriers font 3 fois plus de travail qu'un seul, mais les entrepreneurs qui occupent des ouvriers n'ignorent pas cependant que pratiquement la valeur des hommes qu'ils emploient est toujours différente.

On pourrait continuer longtemps sur ce thème ; ce que nous avons dit suffit pour la démonstration.

18. Concernant la notion de PER, on pourra par exemple consulter les « leçons données durant le deuxième semestre de l'année 2007-2008 aux étudiants de première année du master de sciences de l'éducation de l'Université de Provence » (Chevallard, 2008).
Documents disponibles sur Internet :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=133.

Cette référence à un passé méconnu ouvre en fait la voie à un long développement nourri de matériaux historiques, dont l'un des objets est d'exposer le caractère inapproprié de la culture actuelle de la proportionnalité au collège, dans laquelle la relation entre deux grandeurs variables *est* ou *n'est pas* de proportionnalité, contre une très ancienne sagesse dans le maniement culturel des modèles, fussent-ils réduits à des « règles de trois ». Nous en reproduisons ici une partie.

– L'idée que la proportionnalité n'est en général qu'*approchée* est fondamentale ; mais il faut regarder ce fait *positivement*, et non comme exprimant un « manque ». Lorsqu'on s'intéresse au lien entre des variables x et y, on peut en effet toujours essayer de modéliser ce lien par une fonction linéaire, le plus simple des modèles non triviaux, ce qui permettra souvent de produire des connaissances *utiles*, bien qu'« approchées », sur le système $\mathcal{S}$ considéré.

• Supposons que l'on ait à vider un bassin pour le nettoyer. La hauteur de l'eau est d'environ 1,20 m. Ayant ouvert l'unique conduit qui permet de vider le bassin, on observe que, au bout d'un quart d'heure, l'eau a baissé d'à peu près 10 cm. En modélisant la relation entre le temps t pendant lequel l'eau s'écoule et la quantité q d'eau écoulée par un modèle linéaire ($q \propto t$), on peut conclure que l'on pourra revenir pour nettoyer le bassin dans environ $\frac{120-10}{10}$ quarts d'heures, soit 11 quarts heures : ainsi, en décidant de ne revenir que dans 3 heures, on est quasiment sûr de trouver le bassin entièrement vidé.

• Le fait que les modèles linéaires les plus classiques (comme dans les problèmes de baignoire qui se remplissent, ou se vident, ou se remplissent et se vident en même temps…) ne sont en vérité que des modèles approchés *n'a jamais été ignoré*. Ainsi l'auteur de l'article *Règle* [de trois] de l'*Encyclopédie* (1751-1772) de d'Alembert et Diderot – l'abbé de La Chapelle – rappelait de manière tout à fait explicite :

> Cette *règle* est d'un usage fort étendu tant dans la vie civile que dans les sciences ; mais elle n'a lieu que quand on reconnaît la proportionnalité des nombres donnés. Supposons, par exemple, qu'un grand vaisseau plein d'eau se vuide par une petite ouverture, de manière qu'il s'en écoule trois piés cubes d'eau en deux minutes, qu'on demande en combien de temps il s'en écoulerait cent piés cubes ; il y a à la vérité dans cette question, trois termes donnés, & un quatrième qu'on cherche ; mais l'expérience fait voir évidemment que l'eau s'écoule plus vite au commencement qu'elle ne le fait à la suite ; d'où il résulte que la quantité d'eau qui s'écoule n'est pas proportionnelle au temps, & que par conséquent la question présente ne sauroit être résolue par une simple *règle* de trois.

• Dans cette même tradition classique, les auteurs d'une *Arithmétique* pour les écoles primaires supérieures, A. Marijon et A. Péquignot, soulignent notamment ce fait qu'un modèle linéaire n'est souvent acceptable que dans une plage de valeurs déterminée des variables x et y (Hatier, Paris, 1928, p. 241-242) :

> Pour des charges qui ne dépassent pas 80 grammes, l'allongement du ressort est proportionnel à la charge. En désignant l'allongement par a, la charge par p, on a : $a = pk$, k étant un coefficient constant. Ce coefficient représente l'allongement correspondant à la charge de 1 gramme. Pour des charges supérieures à 80 grammes, l'allongement est plus grand que celui qui serait calculé par la formule $a = pk$. D'ailleurs pour des charges trop fortes le ressort subirait des déformations permanentes ou se briserait.
>
> Nous avons là un exemple de proportionnalité de deux grandeurs qui n'est réalisée que dans de certaines limites.

Les conclusions précédentes sont confortées par un développement qui rappelle que, lorsqu'une fonction f est régulière au voisinage d'un point, ses variations sont à peu près proportionnelles aux variations de la variable : on passe ainsi de l'opposition tranchée entre linéaire et non-linéaire à un univers plus complexe, où, « localement », la linéarité est partout. Le commentaire appelle alors à observer la progression en quelque sorte naturelle « qui conduit des fonctions *linéaires* aux fonctions *affines*, puis aux fonctions *dérivables* »[19]. À cet égard, le programme de seconde est appelé à témoigner de ce que le professeur doit avoir en tête deux soucis solidaires. D'un côté, il doit s'efforcer de faire que la classe situe les fonctions affines dans la filiation des fonctions linéaires – le programme demande, au reste, que les élèves sachent « caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la

19. L'introduction de la dérivation se fait en classe de première : le programme de seconde ne mentionne donc pas les fonctions dérivables.

variable »[20]. D’un autre côté, le professeur devra, selon les termes mêmes du programme, faire une place, pour le contraste, à la *non-linéarité,* ce que les notes du séminaire expriment dans les termes suivants.

> – L’usage extensif des modèles linéaires dans la vie quotidienne comme dans les différents domaines scientifiques et techniques doit évidemment être complété par l’examen des cas où une telle modélisation serait *grossièrement inadéquate* – ce que souligne cet autre passage du même programme de 2^{de} :
>
> > Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.

Les notations précédentes résument un travail conduit dans le cadre de la séance 11 du séminaire. Une question qui ne sera formulée qu’à la séance 18 va relancer brièvement, et quelque peu paradoxalement, le questionnement autour de la *non*-linéarité.

> Peut-on donner un théorème de caractérisation des fonctions linéaires en seconde ? Car pour avoir une caractérisation par l’équation fonctionnelle $f(a+b) = f(a)+f(b)$ pour tous a, $b \in$ 3, il faut mettre une contrainte (f continue ou monotone, etc.) pour que f soit de la forme $f(x) = mx$, $m \in$ 3. Je me pose cette question car elle pourrait éviter les erreurs du style $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ou $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$. (2000-2001, 2^{de}, semaine 18)

La réponse apportée ici désigne deux directions de travail complémentaires. Tout d’abord, il convient de ne pas regarder comme une simple erreur le traitement linéaire des expressions rencontrées. Tout au contraire, et conformément aux principes posés plus haut concernant la modélisation, il faut le regarder comme un geste dont on doit amener les élèves à examiner toutes les conséquences, et notamment les incohérences qui en résultent.

> …il faut, non pas éviter, mais *organiser* la *rencontre* des élèves avec *la non-linéarité*, et, au-delà, conduire *l’exploration* et *l’institutionnalisation,* dans la classe, du *« fait non linéaire »* en mathématiques : si par exemple on avait $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$, on aurait aussi $\sin 2a = 2 \sin a$, ce qui, pour $a = \frac{\pi}{2}$, conduirait tout droit à l’égalité $0 = 2$.

Ensuite, et en conséquence, il conviendra de rechercher les véritables « algorithmes » de manipulation des expressions rencontrés, algorithmes qui devront s’imposer ensuite à l’élève contre les modèles inadéquats vers lesquels il était porté à aller d’abord.

> Au-delà d’une telle reconnaissance du fait non linéaire, ce qui nous empêche véritablement d’appliquer indûment le schéma linéaire, *c’est qu’un autre schéma s’impose plus fortement*. Si, par exemple, nous devons dériver l’expression $\sqrt{1+x^2}$, ce qui éloigne la tentation d’écrire l’égalité, fausse pour $x > 0$,
>
> $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1} + \sqrt{x^2} = 1 + x$
>
> c’est que nous sommes prioritairement « attirés » par la formule de dérivation dûment mémorisée
>
> $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
>
> qui nous empêche de « succomber à la tentation linéaire ». De la même façon, nous serons sauvés par l’attraction – certes toujours résistible – créée par la formule
>
> $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
>
> ou encore par
>
> $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
>
> sans oublier le plus célèbre des attracteurs, la formule
>
> $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.
>
> De cette dernière on déduit d’ailleurs aisément une égalité instructive mais trop rarement mise en place :
>
> $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

---

20. Cette propriété des fonctions affines était en principe connue depuis la 3^{e}, on l’a vu. C’est sa réciproque qui fait la nouveauté de la classe de seconde.

4. Fonction et programme de calcul

4.1. Une rubrique : « Enseigner les fonctions »

Dans le cadre du séminaire de l'année 2001-2002, une rubrique va être consacrée, sous le titre *Enseigner les fonctions*, à la question mathématico-didactique qui nous occupe ici. Cette année-là, plusieurs rubriques analogues (enseigner *l'algèbre*, enseigner *les grandeurs et les nombres*, enseigner *la statistique*, enseigner *la géométrie*) permettront à la formation de prendre spécifiquement en charge des questions relatives à l'étude de ces domaines des mathématiques dans l'enseignement secondaire. Comme nous allons le voir ci-après, c'est toujours sur les *questions de la semaine* que la formation s'appuiera.

4.2. Des programmes de calcul aux fonctions

Le point de départ de cette rubrique est une question posée par un élève professeur ayant en responsabilité une classe de seconde à propos de la notion de *programme de calcul*. Celle-ci a été présentée dans le séminaire en relation avec les débuts de l'enseignement de l'algèbre au collège : l'idée essentielle est qu'une « expression algébrique » *exprime algébriquement* un programme de calcul – l'expression $x^2 - 3x$, par exemple, exprime algébriquement le programme dont une formulation rhétorique d'époque serait : « Prendre l'excès du carré du nombre sur le triple de celui-ci. » Le travail réalisé en cette occasion suscite donc la question que voici :

> Introduire les expressions algébriques comme des programmes de calcul ne revient-il pas d'une certaine façon à parler de fonctions aux élèves dès la 4^e^ sans introduire toute la terminologie ? (2001-2002, 2^de^, semaine 13)

La réponse reprend soigneusement certains éléments du programme de seconde, avant de proposer, à titre de première conclusion du travail entrepris, le constat suivant.

> Les « programmes de calcul » sont ainsi généralisés sous le nom de fonction : au lieu de parler de « l'expression algébrique d'un programme de calcul » on va se mettre à parler maintenant de « l'expression algébrique d'une fonction » (lorsque la chose existe), comme dans le passage suivant du programme de 3^e^ :
>
> Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.

La suite de la réponse explicite alors ce que le passage de la notion élémentaire de programme de calcul à la notion plus avancée de fonction permet, de fait, de gagner.

> La nouveauté qu'apporte le mot de fonction, c'est que, sous ce nom, les programmes de calcul vont se voir associés un certain nombre d'« attributs » : représentation graphique, sens de variation sur intervalle, etc. C'est déjà ce que suggèrent les passages suivants du programme de 3^e^ :
>
> – C'est l'occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).
>
> – Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.
>
> ❶ Jusqu'alors, on pouvait seulement dire d'un programme de calcul qu'il renvoie telle valeur numérique lorsque ses variables prennent telles et telles valeurs : par exemple le programme de calcul d'expression algébrique $x^2–8x+17$ renvoie les valeurs suivantes (colonne B) pour les valeurs indiquées de la variable x (colonne A) :

	A	B
1	0	17
2	0,5	13,25
3	1	10
4	1,5	7,25
5	2	5
6	2,5	3,25
7	3	2
8	3,5	1,25
9	4	1

❷ Il s'agit là d'un type de tâches encore inscrit au programme de 4e : « Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. » Mais le tableau de valeurs obtenu ici conduit maintenant à penser que, lorsque x croît de 0 à 4, la valeur numérique de l'expression décroît (de 17 à 1). C'est là une propriété – de décroissance – qu'on pourrait attribuer au programme de calcul (sur l'intervalle [0 ; 4]), mais qu'on va attribuer plus précisément à la *fonction* que ce programme de calcul permet de définir (sur ce même intervalle) – à condition, bien entendu, d'en apporter la preuve.

Comme souvent, le rédacteur a le souci d'articuler l'état présent à des états antérieurs du curriculum mathématique. De là le développement dont il fait suivre les lignes ci-dessus, que nous reproduisons.

La filiation entre programmes de calcul et fonctions était autrefois plus clairement attestée.

❶ Un manuel de 3e dû à de prolifiques auteurs (C. Lebossé & C. Hémery, 1940) proposait d'abord cette définition :

Un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y.

x s'appelle la variable indépendante.

Puis ces auteurs indiquaient :

Lorsque y est la valeur numérique d'une expression algébrique de la variable x, on dit que y est une *fonction algébrique* de x. Ainsi :

$y = 2x + 3$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x+2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{x^2}{2} - 3x$

sont des fonctions algébriques de x.

❷ Bien entendu, il existe des fonctions qu'on ne sait pas faire naître d'une expression algébrique, telle la fonction définie sur 3_+ par : $f : x \mapsto \mathrm{Card}\ \{ n \in \angle^* \,/\, n \leq x \wedge n \text{ premier} \}$. On a ici $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(6) = 3$, $f(9) = 4$, etc. Les auteurs d'un manuel pour la formation des maîtres écrivaient à ce propos (J. Gal, A. Marijon, 1929) :

La formule $y = x^2$ est appelé *équation* de la courbe tracée sur la figure 5. On dit aussi que cette courbe est la courbe représentant l'équation $y = x^2$, ou la fonction $y = x^2$. Ce n'est qu'exceptionnellement qu'on peut, comme dans cet exemple, donner une *expression algébrique* de la valeur d'une fonction. Il est clair qu'une telle expression n'existe pas pour le nombre d'habitants d'une commune en fonction de l'époque, ou pour la pression barométrique en un lieu en fonction de l'heure.

La conclusion générale est alors reformulée dans les termes suivants : « La notion de fonction généralise donc la notion de programme algébrique de calcul. Mais ce qu'elle apporte *surtout*, c'est qu'elle permet l'attribution de propriétés : une fonction sera croissante sur un intervalle, continue, dérivable, etc. » Cette entrée en matière à propos des fonctions est suivie, lors de la même séance du séminaire 2001-2002, d'un travail motivé par une difficulté que l'on retrouve au fil des années et des promotions, et qui, en l'espèce, a été formulée deux séances plus tôt par une stagiaire ayant en charge une classe de 4e : « Quelle est, demande-t-elle, la différence entre courbe, graphe et graphique ? » La réponse examine d'abord l'usage de ces mots dans les textes officiels : si l'expression « courbe représentative » apparaît bien dans le programme de 3e, ainsi qu'on vient de le voir, le mot de courbe n'a en fait qu'une autre occurrence, dans le programme de sixième [21]. Si le programme de seconde fait un usage beaucoup plus généreux du terme, c'est, au collège comme au lycée, l'expression de « représentation graphique » (abrégée parfois en « graphique ») qui prévaut. Le commentaire que nous suivons complète ces remarques par le propos suivant :

---

21. Où on lit en effet ceci : « Les mesures de longueur, intégrées à des activités telles que la construction de courbes point par point, peuvent conduire à de telles opérations. »

Bien entendu, en un sens naïf du mot, la représentation graphique d'une fonction est une… courbe – d'où l'emploi de ce mot en 2^{de} –, alors que, notamment en statistique, il existe des représentations graphiques qui ne sont nullement des courbes (tels les diagrammes en bâtons, les histogrammes, etc.).

La question examinée portait aussi sur l'emploi du mot *graphe,* au sens de la théorie des fonctions [22]. En ce sens, le mot n'apparaît ni au collège, ni au lycée, même si, au collège, on parle de « grapheur » pour désigner un logiciel permettant le tracé de représentations graphiques. Pour préciser alors la différence que l'on peut voir entre graphe et graphique, la réponse proposée recourt à nouveau à l'histoire, et plus précisément à ce que le rédacteur des notes du séminaire appelle « l'histoire moderne de la notion de fonction ». Le développement qui s'ensuit est reproduit ici *in extenso*.

❶ L'apport clé est dû à Richard Dedekind (1831-1916), ainsi que le rappelle Jean Dieudonné (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, 1987, p. 145) :

> Au lieu de se borner, comme dans les conceptions antérieures, aux fonctions réelles (ou complexes) d'une ou plusieurs variables complexes, Dedekind va d'un coup jusqu'au bout de la généralisation : étant donné deux ensembles *quelconques* E et F, une application *f* de E dans F est une loi (« Gesetz ») qui, à tout élément *x* de E, fait correspondre un élément *bien déterminé* de F, sa *valeur* en *x* que l'on note de façon générale *f*(*x*) [...].

❷ Dedekind réalise ainsi une mathématisation de la notion « protomathématique » de *dépendance fonctionnelle*, et cela par la création de nouveaux objets mathématiques, les fonctions. Pourtant cette mathématisation reste incomplète, ne serait-ce qu'à cause du recours à la notion de *loi* (*Gesetz*), laissée par Dedekind *non mathématisée* : qu'est-ce au juste qu'une « loi » ? Dieudonné poursuit :

> Il manque encore à Dedekind une notion d'usage constant, introduite seulement par Cantor un peu plus tard, celle de *produit* (ou « produit cartésien ») E×F de deux ensembles quelconques : c'est l'ensemble des *couples* (*x*, *y*) pour tous les éléments *x* de E et tous les éléments *y* de F, généralisation naturelle et indispensable des coordonnées cartésiennes. On peut [alors] rattacher la notion d'application $f : E \to F$ à celle de partie du produit E×F : le *graphe* Γ_f de *f* est la partie de E×F formée des couples (*x*, *f*(*x*)) pour tous les éléments *x* de E, généralisation évidente du « graphique » classique d'une fonction réelle d'une variable réelle [...].

❸ On aboutit ainsi à la définition actuelle de la notion de fonction (empruntée ici à Chambadal et Ovaert 1966, p. 23) :

> Soient E et F deux ensembles, A une partie de E×F, et supposons que pour tout *x* appartenant à E, il existe un *y* et un seul appartenant à F tel que le couple (*x*, *y*) appartienne à A [...].
>
> DÉFINITION 2. – Un tel triplet f = (E, F, A) s'appelle fonction définie sur E, à valeurs dans F, ou encore application de E dans F.
>
> On dit que E est l'*ensemble de définition* de la fonction *f*, que F est l'ensemble dans lequel la fonction *f prend ses valeurs*, et que A est le *graphe* (ou le *graphique*) de la fonction *f*.

La fonction, qui est le triplet (E, F, Γ_f), s'identifie ainsi à peu près à son graphe Γ_f (duquel on peut tirer la connaissance de E, mais non celle de F).

❹ La synonymie indiquée par les auteurs entre *graphe* et *graphique* ne doit pas tromper : alors que le graphe est une entité *purement mathématique* (c'est un ensemble de couples – de réels, si E = F = 3 par exemple), qui n'a guère sa place au collège ou au lycée, « graphique » (ou, mieux, « représentation graphique ») y désigne une réalité… *graphique*, un *tracé*, c'est-à-dire en fin de compte un objet *non mathématique*. On se gardera donc de confondre « graphe » et « représentation graphique » : en toute rigueur, contrairement à ce que dit le programme de 2^{de} par abus de langage, une « courbe » au sens graphique du terme, c'est-à-dire un tracé dessiné, ne saurait véritablement définir une fonction.

5. Les « généralités » sur les fonctions

22. Et non au sens de la théorie des graphes, laquelle ne sera introduite en terminale ES qu'à la rentrée 2002.

Le travail amorcé se poursuit en prenant appui sur deux questions dont la formulation semble quelque peu embarrassée :

> 1. Dans le chapitre sur les fonctions (généralités), l'écho qu'ont reçu les élèves est que tous les types de tâches et techniques sont triviaux, mais ils ont pris conscience de la subtilité de l'abstraction sous-jacente, ce qui a créé un malaise chez eux nuisant à leur apprentissage. Ce chapitre me pose donc la question du passage de l'étude locale d'un problème à une étude plus générale, plus abstraite. Comment graduer cette évolution ? (2001-2002, 2^{de}, semaine 12)
>
> 2. À propos des fonctions, le programme précise qu'une définition formelle de la croissance et de la décroissance est attendue. Est-ce que cela implique que l'on doive insister sur des exercices – comme on peut en trouver dans quasiment tous les manuels de 2^{de} – où une démonstration très formelle est attendue ? C'est peut-être un bon moyen d'illustrer les théorèmes de comparaison sur les réels. Cependant, si l'on doit insister, est-ce que les élèves ne vont pas trouver ces méthodes compliquées, surtout si l'on a travaillé auparavant sur les représentations graphiques ? (2001-2002, 2^{de}, semaine 14)

Tout se passe ici comme si ces professeurs stagiaires rencontraient une difficulté qu'ils ne parviennent pas, à ce stade de leur formation, à décrire de façon précise et univoque : d'où l'impression que leurs propos tournent autour d'un problème qui reste à énoncer – leurs questions ressemblent à s'y méprendre à des questions écran. La stratégie de réponse va consister à aller droit au cœur du malaise. Alors que la culture professorale tend à présenter l'initiation aux fonctions, en seconde, à l'instar d'ailleurs de l'introduction à la statistique, comme une « affaire de vocabulaire » (dans un cas, « fonction croissante », « fonction décroissante », etc., dans l'autre, « moyenne », « médiane », etc.), l'exorde du commentaire est sans détour : « Comme avec toute notion, y lit-on, les “attributs” que l'on peut attacher à une fonction doivent être *motivés*. Pourquoi s'y intéresse-t-on ? Que permettent-ils de comprendre ou de faire ? Pour quelles raisons par exemple se demande-t-on si une fonction est croissante ou décroissante ? Quel intérêt cette connaissance peut-elle avoir ? » Ce questionnement ciblé est aussitôt illustré par un petit apologue présenté comme « l'argument mathématique d'une AER envisageable ». On le reproduit *in extenso*.

❶ Deux étudiants travaillant ensemble lors d'une séance de TD arrivent à l'expression suivante

$H = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$.

Ne disposant pas d'une calculatrice, ils décident d'en déterminer par leurs propres moyens l'ordre de grandeur : H est-il proche de 1, ou de 10, ou de 20, ou de 30, etc. ? Pour cela, ils décident d'utiliser 1,7 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$. Chacun d'eux calcule de son côté afin de contrôler un résultat par l'autre.

❷ Le premier procède ainsi : il remplace $H = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ par $H^* = \dfrac{100}{(2+1{,}7)^2}$ qui est supérieur à H (puisque le dénominateur en est plus petit) : $H < H^*$. Il obtient donc : $H^* = \dfrac{100}{3{,}7^2}$. Il calcule alors de tête le carré de 3,7 en procédant comme suit : $37^2 = (40-3)^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$. Il a ainsi : $H^* = \dfrac{100}{13{,}69}$. Pour simplifier les choses il décide alors de remplacer H^* par $H^{**} = \dfrac{100}{14} < H^*$. Afin de s'épargner de poser la division, il imagine alors le calcul suivant :

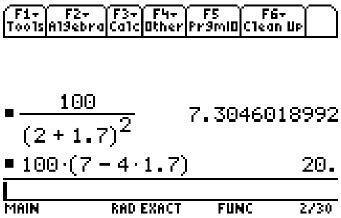
$H^{**} = \dfrac{100}{14} = \dfrac{100}{2\times 7} = \dfrac{100}{2\times 7} \times \dfrac{7}{7} = \dfrac{100}{2\times 49} \times 7 = \dfrac{100}{98} \times 7.$

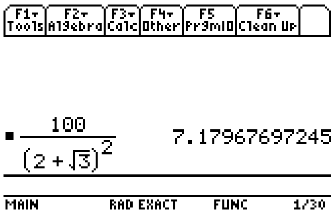
En observant que $\dfrac{100}{98} \approx 1$, il en déduit que $H \approx 7$.

❸ Le second étudiant, lui, commence par noter que l'on a $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ et écrit alors :

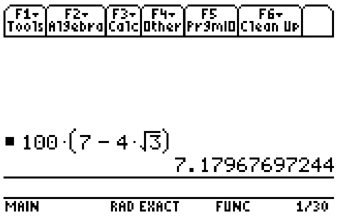
$H = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2} = \dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2} \times \dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{100(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{100(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} \times \dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 100(2-\sqrt{3})^2 = 100(7-4\sqrt{3}$
). Il obtient ainsi : $H \approx 100(7 - 4\times 1{,}7) = 100(7 - 6{,}8) = 100\times 0{,}20$. Il arrive donc à : $H \approx 20$.

❹ Comparant leurs résultats, les deux étudiants en restent stupéfaits ! Chacun pense que *l'autre* a fait une erreur. Pour en avoir le cœur net, ils vont emprunter une calculatrice et vérifient d'abord, sans même calculer l'expression exacte de H, les valeurs $\dfrac{100}{(2+1{,}7)^2}$ et $100(7 - 4\times 1{,}7)$. À leur grande surprise, ils obtiennent ceci [ci-dessous, à gauche]. Puis ils interrogent la même calculatrice sur la valeur « véritable » de H [ci-dessous, à droite].





Le premier étudiant triomphe ! Le second calcule l'expression exacte obtenue, pensant que son calcul préalable pourrait contenir une erreur :



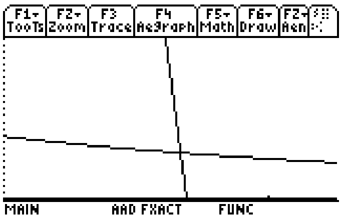
Une seconde calculatrice, plus puissante, fournit les valeurs suivantes :

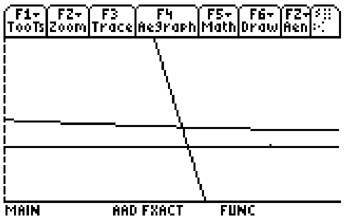
$$\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2} = 7{,}179676972449082589021463397651 05$$

$$100(7 - 4\sqrt{3}) = 7{,}17967697244908258902146339765105.$$

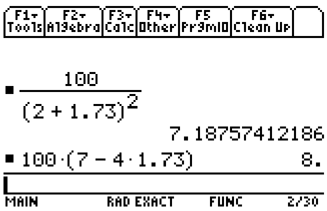
Où est la clé du mystère ? La suite de la réponse la révèle sans façon.

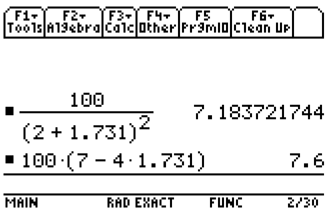
❺ Les étudiants se demandent alors d'où vient l'anomalie : si dans les expressions numériques *égales* $\dfrac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ et $100(7 - 4\sqrt{3})$ on remplace $\sqrt{3}$ par 1,7, on obtient des résultats *très* différents ! Pour cela ils ont l'idée d'introduire les fonctions f et g définies dans un voisinage de $\sqrt{3}$ par $f(x) = \dfrac{100}{(2+x)^2}$ et $g(x) = 100(7 - 4x)$ telles que l'on a : $H = f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3})$.





- Les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(\sqrt{3}, H)$. La courbe représentative de g est une droite de pente –400 : si on remplace $\sqrt{3}$ par un nombre légèrement inférieur, comme 1,7, la valeur de $g(1{,}7)$ est *très supérieure* à $g(\sqrt{3}) = H$, comme on l'a vu : 20 au lieu de 7,179…
- En revanche, la courbe représentant f apparaît doucement descendante : on doit donc s'attendre à ce que $f(1{,}7)$ soit *à peine supérieure* à $f(\sqrt{3}) = H$, comme on l'a observé : 7,304… au lieu de 7,179…
- Cette différence se fait sentir même si l'on prend une valeur de x plus proche de $\sqrt{3}$, comme 1,73 :





On a ainsi un exemple où apparaissent de façon combinée deux propriétés attribuables à des fonctions : le sens de variation de f (la fonction est croissante ou décroissante, ce qui se traduit numériquement par le fait de donner une valeur approchée $f(x*)$ par défaut ou par excès de $f(x)$ lorsque $x*$ est une valeur approchée par défaut de x), la « pente » de f au voisinage de x (ou plutôt la valeur absolue de cette pente), notion qui peut être appréhendée qualitativement dès la seconde, même si elle n'est quantifiée qu'en première. Les notions correspondantes sont les clés de l'explication d'un certain phénomène, par exemple le fait que – chose paradoxale pour une culture du numérique un peu archaïque – l'expression « simplifiée » $100(7-4\sqrt{3})$ de l'expression numérique $\frac{100}{(2+\sqrt{3})^2}$ fournit, pour une même précision sur $\sqrt{3}$, des valeurs approchées de qualité *très inférieure* à celles que fournit l'expression originale. La réponse apportée dans le séminaire se poursuit alors en généralisant légèrement l'argument mathématique exposé précédemment et met en évidence que, non seulement le travail mathématique use ici d'outils très élémentaires là où les élèves professeurs ont été accoutumés à employer la lourde panoplie de la dérivation, mais il énonce surtout une exigence qui est au cœur de la formation : celle d'une introduction *fonctionnelle*, et non pas *formelle*, des notions et entités mathématiques que le programme enjoint d'enseigner. La notion de fonction croissante, par exemple, ne se justifie pas du fait qu'il y aurait des fonctions croissantes, mais du fait que la croissance de certaines fonctions explique et permet de contrôler certains phénomènes mathématiques.

Conclusion

En survolant quelques-uns des problèmes avec lesquels les professeurs en formation initiale à l'IUFM se trouvent d'emblée aux prises lorsqu'il s'agit pour eux d'*enseigner les fonctions*, nous venons d'esquisser la construction d'une culture professionnelle au sein d'une formation *sur une suite d'années*, chaque promotion étant, d'une certaine manière, plongée dans la culture jusqu'alors élaborée. On notera que ce processus cumulatif, qui permet de n'avoir pas à tout recommencer *ab ovo* chaque année, s'est concrétisé en 2005-2006 par la création d'un nouveau dispositif de formation, les *archives du séminaire*, regroupant en l'espèce les notes des séminaires des années 2000-2001 à 2004-2005, où les élèves professeurs de la promotion étaient amenés, de façon plus ou moins régulière, à se plonger pour y rechercher des éléments de réponse aux questions officiellement soulevées, comme aux questions que leurs pratiques régulières d'enseignement les amenaient à se poser.

Références

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. In C.-M. Chiocca et I. Laurençot (éds), *De l'intégration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants*. Toulouse : ENFA & IUFM de Midi-Pyrénées. Disponible sur cédérom.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I, Marseille.
Disponible sur Internet : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/.