Un parcours d'étude et de recherche sur les fonctions en classe de 2nde

Nicolas Minet, Irem de Poitiers[23]

Résumé de l'atelier :
Les attaques récurrentes subies par l'enseignement des mathématiques semblent montrer que ni leur utilité ni leur sens profond ne sont visibles, que ce soit pour les décideurs, les élèves ou leurs parents. C'est l'ambition des équipes CDAMPERES (groupes issus d'un programme de recherche IREM/INRP) que d'essayer de proposer et d'expérimenter dans les classes des parcours d'étude et de recherche – notions issues de la TAD[24] - afin faire rencontrer et vivre par les élèves du secondaire, autour de questions problématiques, les raisons d'être des notions enseignées.
L'atelier a pour objectif de susciter une réflexion sur les programmes - essentiellement en Seconde - autour du travail mené au sein de l'Irem de Poitiers, à savoir une proposition de méthodologie pour structurer l'année de Seconde et le détail du parcours d'étude et de recherche consacré aux fonctions à travers des documents utilisés en classe cette année.

Nous pouvons lire dans l'introduction du programme de Seconde les intentions suivantes :

« Ce programme est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonctions, géométrie, pour chacun desquels les capacités attendues, en nombre volontairement limité, constituent la base commune des programmes des années ultérieures ». Etant donné l'objectif de notre recherche, nous avons recherché les raisons d'être de l'étude de ces trois domaines des mathématiques, qui constituent les trois « grands chapitres du programme » : les fonctions, la géométrie, les statistiques.

Il nous semblerait important de voir mis en exergue dans les programmes scolaires, et justifiant par là même pourquoi tel ou tel contenu est exigible, des *questionnements* qui ont été et sont encore importants dans la science mathématique ; mais jamais une telle liste n'est donnée. Son élaboration revient-elle à la profession ? Parmi les pistes pour la constituer, nous pouvons imaginer puiser dans l'Histoire (et l'histoire des mathématiques en particulier), dans les autres disciplines, en particulier dans les problématiques actuelles qui se posent à la société.

Nous nous proposons d'illustrer dans la suite comment nous avons amorcé un tel travail de recherche de questions dignes d'intérêt au sujet des fonctions et comment nous avons tenté de mettre en œuvre dans notre enseignement l'étude d'un tel problème en respectant les contenus du programme de Seconde. Notons que bien que nous envisageons rester dans le cadre légaliste des programmes devant les élèves, il nous semble judicieux pour faire notre recherche de ne pas nous y référer dans un premier temps.

Par rapport aux statistiques et à la géométrie, les fonctions peuvent apparaître moins présentes dans la vie des Hommes, du moins de manière moins « visible » ; du coup, on pourrait penser de prime abord que l'écologie de la notion de fonction est réduite et interne à la discipline. Pour éclaircir ce point, nous avons retenu ces pistes :

- Quelles situations relèvent du fonctionnel en dehors de la discipline mathématique ? Autrement dit, quelle est l'écologie de la notion de fonction ? Quels types de tâches sont associés à ces situations ?
- Dans quelles situations les Hommes ont-ils progressivement construit la notion de fonction ?

---

[23] Projet mené par l'équipe lycée de l'Irem de Poitiers : D.Gaud, N.Minet, Maryse Cheymol , Nathalie Chevalarias, Caroline Ducos, Cyrille Kirch, Loïc Jussiaume, Roger Terrochaire.
[24] Théorie anthropologique du didactique, voir par exemple http://yves.chevallard.free.fr

En cherchant à résoudre quels problèmes ? Avec quelles techniques y ont-ils répondu ?
- Pourquoi les fonctions ont-elles été introduites dans l'enseignement secondaire ? Quels étaient les contenus ?

Notre vision de la situation sera complétée par un retour critique sur les programmes actuels de Troisième et de Seconde, et nous proposerons alors un Parcours d'Etude et de Recherche sur les fonctions en Seconde, parcours guidé par la question de savoir comment résoudre des problèmes d'optimisation.

Recherche des raisons d'être : pourquoi étudier les fonctions ?

Comme dans chaque domaine des mathématiques, la recherche de types de tâches significatifs sur les fonctions peut se faire à deux niveaux : dans le cadre de la modélisation par des fonctions d'une situation réelle de dépendance entre deux phénomènes quantifiables, ou bien lors de la résolution d'un problème interne aux mathématiques pouvant faire appel à une fonction. Nous allons maintenant illustrer certains de ces types de tâches en précisant des techniques correspondantes.

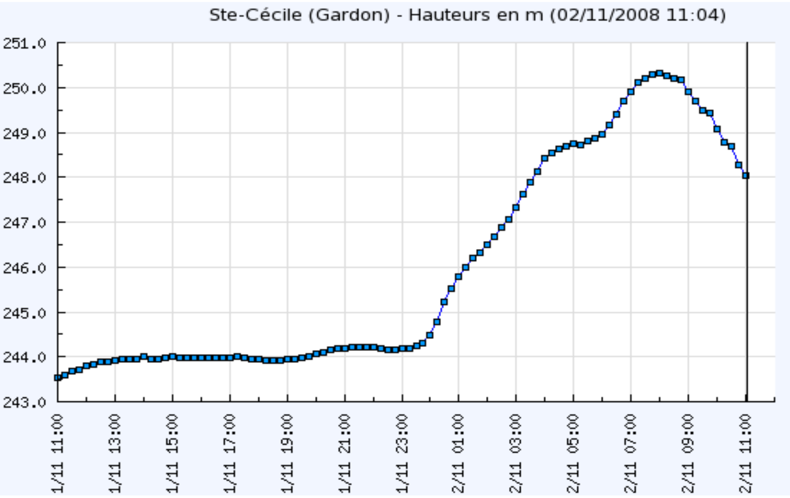
Décrire la dépendance entre deux quantités

La vie courante permet la rencontre dans un cadre non mathématique de la notion de dépendance : on dit par exemple que « le poids est fonction de la taille » ce qui signifie usuellement que le poids dépend de la taille mais pas que la quantité « poids » est une fonction - au sens mathématique - de la quantité « taille ». L'expression « en fonction de » est par contre souvent utilisée dans l'acception mathématique du terme en sciences expérimentales, en économie, etc…

Ainsi, les fonctions « vivent » dans toutes les disciplines qui cherchent à décrire le comportement des phénomènes quantifiables qu'elles étudient. On peut par exemple décrire comment le spectre d'une lampe est fonction de sa température, comment le volume molaire *(Vm)* est fonction des conditions de température *T* et de pression, comment l'énergie solaire reçue par les planètes est fonction de la distance au soleil[25] …

Même en dehors des mathématiques, remarquons que la présence des fonctions se manifeste à travers les trois registres habituels : numérique, graphique et algébrique, dans le but de décrire les phénomènes étudiés :

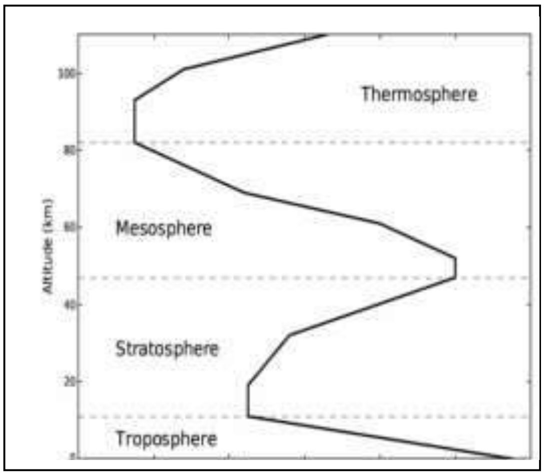
- Par des tableaux de données :
recensement de la population, relevé de mesures en physique,…
- Par des courbes :
graphique de température, hauteurs d'eau sur le site de surveillance des crues,…
- Par des formules :
en physique (U = Ri, PV = nRT,…) ou dans la vie courante (formule de calcul de l'impôt, indices type indice corporel…)

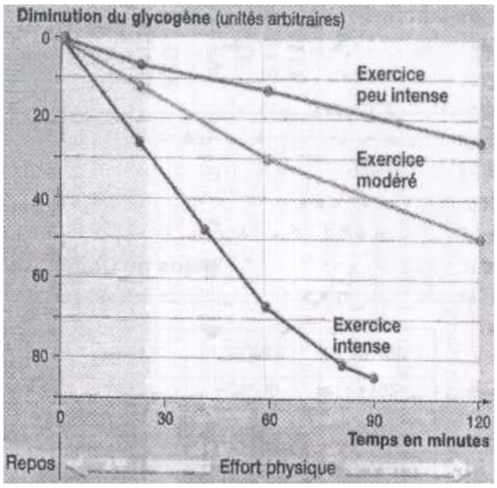


http://www.infoclimat.fr/bulletins-speciaux/images/Ste_Ccile_-_11h04.png
hauteur du Gardon à Ste Cécile (30) en 2008

[25] Exemples tirés des programmes de Physique ou de S.V.T. de Seconde

Remarquons les implicites véhiculés en mathématiques à propos des représentations graphiques :





- La position des axes ;
- Les repères souvent orthonormés en maths ne le sont ni dans d'autres disciplines ni dans la vie courante ;
- Les repères sont souvent orthogonaux dans les autres disciplines ;
- L'origine du repère n'a pas bien souvent pour coordonnées (0 ; 0) hors des mathématiques ;
- Les quantités étudiées ne sont pas toujours triviales !

Ces conventions pas toujours explicitées et parfois bafouées conduisent à des confusions chez les élèves.

Confirmation dans les programmes de 3ème de Physique (2008) de l'importance du registre graphique :

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités
Tension continue et tension variable au cours du temps ; tension alternative périodique. Période. Valeurs maximale et minimale d'une tension.	Identifier une tension continue et une tension alternative.	*Comparaison d'une tension alternative et d'une tension continue en utilisant un générateur de très basse fréquence associé à :* *- une diode électroluminescente, deux DEL tête-bêche ou une diode associée à une lampe ;* *- un voltmètre en continu.*
	Construire une représentation graphique de l'évolution d'une tension alternative périodique ; en décrire l'évolution. Reconnaître une tension alternative périodique. *Déterminer graphiquement sa valeur maximale et sa période.*	*Relever point par point les variations au cours du temps d'une tension alternative périodique.* *Construire à la main et/ou à l'aide d'un tableur-grapheur la courbe représentant les variations d'une tension alternative périodique en fonction du temps.* [B2i]

Pour terminer au sujet de la description de la dépendance de deux quantités, signalons que l'utilisation d'une formule[26] est souvent nécessaire pour étudier de manière approfondie une dépendance fonctionnelle ; remarquons que la dépendance entre deux quantités peut être :

- *établie de manière nécessaire* ; c'est le cas par exemple de l'expression du volume d'un solide, ou de l'aire d'une figure en fonction d'une longueur dans une configuration géométrique donnée, où l'objectif est de démontrer une relation numérique.

- *choisie a priori*, pour un étalonnage ou lors de l'élaboration d'une échelle : citons le choix de conversion de la température de degrés Celsius en degrés Fahrenheit selon une correspondance affine,

[26] Voir partie B- pour des précisions historiques

mais aussi les lois de Fechner[27] ; si la validité de ces lois en termes de description de la réalité est contestable, elles ont cependant servi dans de nombreux domaines pour créer des unités ou étalonner des phénomènes : sismologie (échelle de Richter), acoustique (niveau sonore), astronomie (magnitude des étoiles),…

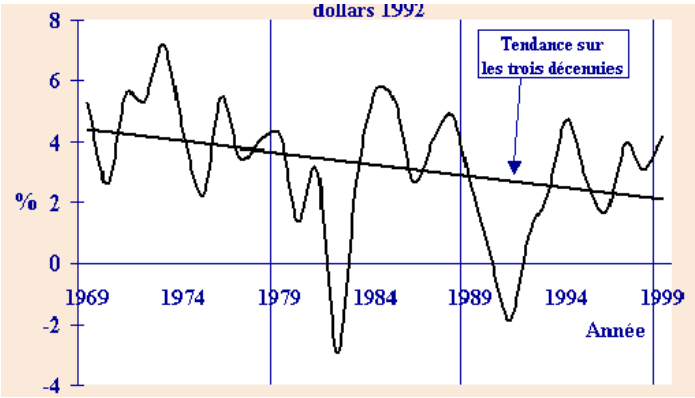
- *recherchée pour modéliser* la dépendance entre deux quantités suite à des mesures ; cela est précisé dans le paragraphe suivant.

Modéliser une situation de dépendance entre deux quantités par une formule

Que ce soit en sciences expérimentales (échanges atmosphériques en climatologie,…) ou en politique (démographie, évolution du taux de chômage,..), c'est dans un but d'interpolation ou d'extrapolation qu'un modèle se recherche.

L'interpolation est un problème interne aux mathématiques (polynômes de Lagrange, Tchebychev,..) ; dans l'enseignement, les méthodes utilisées en sciences expérimentales sont souvent basées sur la recherche de proportionnalité[28] ; elles utilisent des outils statistiques (droite de régression,..) mais aussi des fonctions rencontrées au lycée (fonctions affines, carré, inverse, racine carrée, exponentielle, sinus,..)

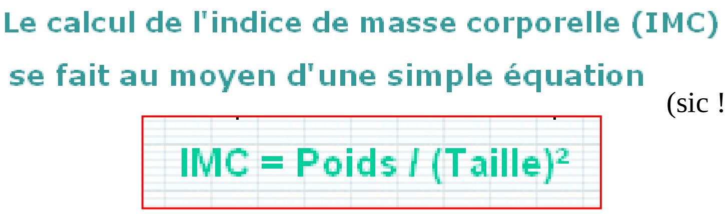
Notons que ce type de tâche n'est que rarement enseigné en cours de mathématiques (citons le cas des droites de régression en série ES) car il peut faire appel à des procédés de validation qualitatifs qui dépassent donc le cadre de la logique mathématique ; des critères quantitatifs peuvent cependant être donnés : un modèle, devant être à la fois assez simple pour être utilisé mais permettant d'approcher suffisamment la dépendance étudiée, est validé par exemple en fixant au préalable une marge de tolérance entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées.



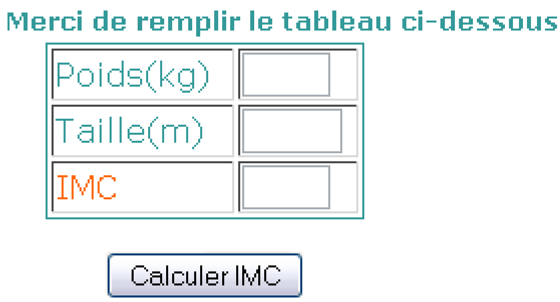
Evolution du PIB au Canada, 1969-1999 [http://dsp-psd. tpsgc.gc.ca/Collection-/LoPBdP/images/prb0105f-1.gif](http://dsp-psd.tpsgc.gc.ca/Collection-/LoPBdP/images/prb0105f-1.gif)

Déterminer une quantité à partir d'une autre

Sans être formulé en des termes d'images et d'antécédents, la détermination d'une quantité à partir d'une autre est un type de tâches omniprésent dans la lecture d'un tableau de nombres ou d'un graphique, qu'ils soient issus de la vie courante ou internes à une situation mathématique ; par contre, rares sont les déterminations ayant recours à l'algèbre dans la vie courante, hormis des calculs d'images tels le calcul de l'impôt sur le revenu, ou des calculs tel celui de l'indice de masse corporelle.



(sic !)



http://www.automesure.com/Pages/calculimc.html

---

[27] Theodor Fechner (1801-1887) psychophysicien, entendait établir des lois mathématiques du type S = k log (I) pour mesurer les sensations du corps humain en fonction de l'intensité du stimulus reçu.

[28] Voir la partie C sur le rôle des fonctions « de référence » dans le Secondaire

En revanche, la résolution algébrique de ce type de tâches est un domaine important des mathématiques, celui des équations, qu'ils soit possible de déterminer leurs solutions (telles les équations polynomiales de degré inférieur ou égal à 4) ou non (en faisant appel à une fonction, notamment par des méthodes d'approximations)

Comparer des quantités (qui sont fonction d'une même quantité) ;

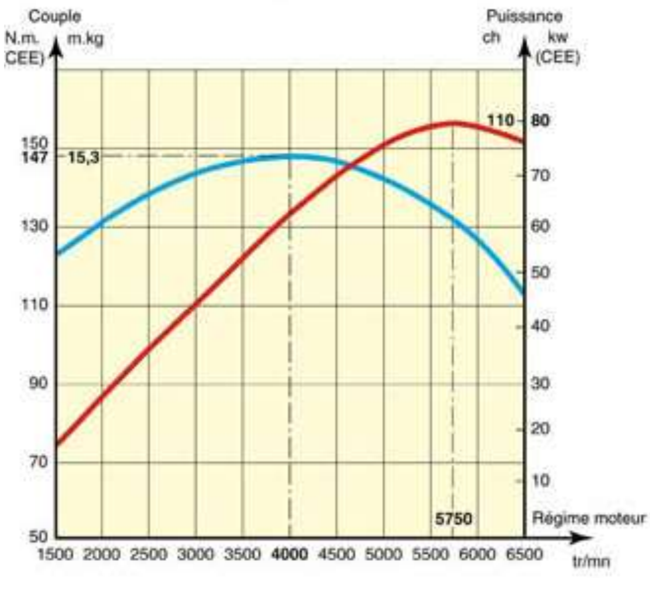
Si la comparaison de quantités se retrouve dans les mêmes domaines de la vie courante que pour le type de tâches précédent, on peut y adjoindre des situations qui amènent à la comparaison de vitesses de croissance (d'individus[29], de populations, …) ; la notion de vitesse, liée à celles de taux d'accroissement et de fonction dérivée, tient une place prépondérante dans l'enseignement de la physique, alors que ce lien est rarement fait en cours de mathématiques où l'essentiel du temps est passé sur une étude formelle de fonctions.

Etudier les variations d'une quantité ;

Il est fréquent (et historiquement essentiel[2]) que des phénomènes soient quantifiés en vue de l'étude de leur évolution ; les situations où une telle problématique intervient sont très nombreux, notamment pour étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre : évolution de la température à la surface du globe dans les prochaines décennies, variations de la pression en fonction de l'altitude, de l'intensité lumineuse reçue par un point en fonction de son éloignement de la source, fréquence du son d'une corde de guitare en fonction de la tension de la corde,…

L'étude mathématique des variations d'une fonction est un type de tâches important dans l'enseignement secondaire, via l'étude de la fonction dérivée à partir de la classe de Première, mais cette étude est souvent déconnectée des problématiques précédentes.

Optimiser une quantité ;



Les problèmes d'optimisation sont omniprésents dans notre société : ils consistent à la recherche d'un « meilleur compromis possible » selon des critères préalablement fixés : estimation de la température maximale pour la prévision du temps, quantité minimale d'objets à produire pour dégager un bénéfice, temps minimal pour atteindre un point donné du globe (routage maritime), fonctionnement le plus adapté d'une machine (couple maximal d'un moteur, cf ci-contre http://citroen.c4.free.fr/moteurs.html)

Un exemple frappant : le terme « optimisation » se lit de nombreuses fois sur la page d'accueil du CRAIN !(Centre de recherche pour l'architecture et l'industrie nautiques) http://www.craintechnologies.com/ qu'il concerne l'allongement du plan de voilure, d'angle de la quille, de formes, de performance ,…

[29] http://www.med.univ-angers.fr/discipline/pediatrie/Siteendoped/Web/page_11.html

Bilan

Il convient de distinguer les techniques finalement assez rudimentaires pour réaliser les types de tâches cités dans la vie courante, des techniques utiles lorsqu'on veut étudier un phénomène fonctionnel dans le cadre des sciences expérimentales et des mathématiques :

- Le vocabulaire (image, antécédent…), les définitions (fonction croissante, maximum d'une fonction,.…), la théorie mathématique (notation f(x), notion de fonction,…) et les techniques algébriques des fonctions (monotonie, extrema) sont absents de nombreux domaines de la vie courante, voire des autres disciplines, car ils ne sont utiles que dans les situations où une théorie mathématique est sous-jacente.
- Dans la même veine, les valeurs d'une quantité qui rendent optimales une autre quantité ainsi que les valeurs recherchées d'images ou d'antécédents sont des valeurs approchées, même avec une formule, car rechercher des valeurs exactes est souvent dénué de sens hors des mathématiques.
- Les interactions avec l'algèbre sont limitées à la recherche d'une quantité en fonction d'une autre.

Bien souvent, dans une formule, apparaissent plusieurs lettres qui ont, selon les moments de l'étude ou les situations, statut d'inconnues, de variables ou bien de paramètres.
Les méthodes pour élaborer ces lois et la recherche de la validité du modèle utilisent des outils qui dépassent
parfois le cadre de la théorie des fonctions

Ces conclusions amènent à se demander quand apparaît la nécessité d'imposer vocabulaire et le formalisme en cours de mathématiques, et pour résoudre quels types de tâches. Comment choisir les fonctions à étudier en cours de mathématiques ? Des réponses éclairantes se trouvent dans l'histoire de la construction progressive du concept de fonction, et nous amèneront à nous interroger ensuite sur les choix faits par les programmes scolaires.
Quelques éléments historiques utiles pour faire des choix d'organisations mathématiques

1. Construction du concept de fonction : quelques moments-clés

Historiquement, la gestation du concept de fonction a été longue. Les tables numériques apparues dans l'Antiquité (tablettes babyloniennes) constituent les prolégomènes à l'apparition de la notion de fonction (on établit des correspondances). Les tables numériques (tables trigonométriques, tables des carrés ou tables des logarithmes…) seront construites sans que le besoin d'une formalisation quelconque soit rendu nécessaire. Les tables suffisent à l'usage qui leur a été fixé, sans recours au graphique : répertoire de valeurs numériques (tables trigonométriques…) également utiles pour faciliter le calcul numérique (tables de logarithmes…)

La notion de fonction ne commence à se développer dans son principe qu'à partir du XIV^{ème} siècle par l'étude de quantification de certains phénomènes physiques[30] : chaleur, lumière, vitesse, etc... Cette recherche était facilitée par l'invention de divers instruments scientifiques. A cette époque apparaissent des représentations graphiques[31] pour décrire la dépendance d'une quantité en fonction d'une autre, en s'attachant notamment à la question des variations.

Au XVII^{ème} siècle, des éléments décisifs interviennent : la création de l'algèbre littérale symbolique par Viète et les notations algébriques de Descartes permettent d'envisager la description des objets géométriques et des lois de la nature par des relations entre quantités ; l'étude des mouvements est centrale, et des échanges s'effectuent entre pensée mathématique et considérations cinématiques. C'est

[30] Voit l'article de Adolf P. Youschkevitch, *le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle*, « Fragments d'histoire des
mathématiques », brochure 41, APMEP.
[31] Roger Bacon (1214-1294) et Nicole Oresme (1323-1382) sont parmi les précurseurs de telles représentations

pourquoi les fonctions considérées sont tout d'abord étudiées comme des courbes, elles-mêmes considérées comme des trajectoires.

http://abcmaths.free.fr/blog/uploaded_images/250px-Galilee-737943.jpg

Rappelons que c'est dans la recherche de lieux géométriques qu'apparaissent des courbes chez les Grecs même si aucune étude n'en est faite par ceux-ci, faute d'outils algébriques. C'est pour résoudre le célèbre problème de lieu de Pappus que Descartes (1637) explique le fonctionnement de sa géométrie (dite maintenant géométrie analytique) et aboutit à des équations reconnues comme étant celles vérifiées par des coniques. A partir des idées de Descartes, des études de courbes (issues au départ de relations géométriques ou mécaniques) seront entreprises durant les siècles suivants : ovales de Descartes, limaçon de Pascal, trident de Newton, cubique d'Agnesi, etc... Notons que les écrits de Descartes comportent la première équation différentielle correspondant à la courbe logarithme suite à problème posé par De Beaune à Mersenne. Descartes considère les courbes de la forme P(x,y)=0 où P est un polynôme ; cette condition, P(x,y)=0 permet d'introduire une dépendance entre x et y et ainsi calculer l'une d'elles en fonction de l'autre.

Cependant, l'objet géométrique qu'est la courbe est étudié en tant que tel : apparaissent alors des techniques permettant de déterminer les tangentes à ces courbes (Fermat, Descartes, Roberval etc.). Noter que parallèlement, le calcul d'aires s'était enrichi de nouvelles méthodes - les indivisibles - grâce aux mathématiciens italiens (Torricelli ; Cavalieri ; Galilée…) et que ces méthodes seront utilisées pour déterminer des aires sous une courbe (par exemple, Roberval réalise la quadrature de la cycloïde).

La détermination des tangentes à une courbe, définie au départ par son équation cartésienne f(x ; y)=0, et la recherche de techniques fiables pour calculer des aires sous une courbe (la technique des indivisibles ayant montré ses limites) mèneront à la création du calcul différentiel simultanément et parallèlement par Leibniz et Newton.

http://www.bbc.co.uk/radio4/science/media/NewtonLeibniz.jpg

Ce n'est qu'au milieu du XVIIe siècle – Mercator, Gregory, Newton –qu'apparaissent de manière explicite des correspondances fonctionnelles par l'intermédiaire de formules ou de séries.

Leibniz introduit le mot « fonction » de manière contextualisée pour expliquer la détermination de tangente à l'aide de son calcul infinitésimal : « *J'appelle* ***fonctions*** *toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe; comme son abscisse, ordonnée, corde, tangente..* ». Il introduit l'usage des mots *constante, variable, paramètre, coordonnées.*

Il faut attendre le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle pour que les premières définitions des fonctions apparaissent :

Ainsi, Jean Bernoulli en 1718 : *"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." Notation* φx

Puis Euler en 1748 : « *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur, une quantité variable est une quantité indéterminée ou, si on veut, une quantité universelle qui comprends toutes les valeurs déterminées… Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. par exemple $a+3z$, $az-4zz$, $az+b+b\sqrt{aa-zz}$*...sont des fonctions de z. Une fonction de variable est aussi une quantité variable.* »

Par expression analytique, il faut entendre une expression qui fait intervenir les opérations connues à l'époque (opérations algébriques, racines, séries et produits infinis ; fonctions trigonométriques, logarithmes et exponentielles). Autrement dit les fonctions sont données par des formules y compris des sommes de séries.

La polémique suscitée par la résolution du problème des cordes vibrantes[32] va amener Euler en 1755 à revoir sa définition car aucune fonction « analytique » ne répond au problème qui pourtant admet une réponse !

« *Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x."*) La notion de dépendance entre quantités variables est clairement énoncée.

Remarquons que les définitions générales n'étaient pas indispensables pour que se développe le calcul infinitésimal ; ainsi Fermat propose-t-il des méthodes pour résoudre des problèmes d'optimisation (« *Méthode pour la recherche du maximum et minimum* »). Quant au marquis de l'Hospital, il prend soin dans son *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, de donner tous les types de problèmes que celui-ci permet de résoudre, comme en témoigne le sommaire :

1- Où l'on donne les règles du calcul sur les différences.
2- Usage du calcul des différences pour trouver les tangentes à toute sorte de lignes courbes.
3- Usage du calcul différentiel pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées.
4- Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & les points de rebroussement.
5- Usages des différences pour trouver les développées.
6- Usage du calcul des différences pour trouver des caustiques par réflexion.
7- Usage du calcul des différences pour trouver des caustiques par réfraction.
8- Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.
9- Solution de quelques problèmes qui dépendent des méthodes précédentes.
10- Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la méthode de M. Descartes & Hudde.

Quelles conclusions tirer suite à ce survol historique ?

- **le principe de la notion de fonction préexiste dans les tables numériques, facilitant les calculs**
- **l'étude de phénomènes naturels a été le point de départ de la construction du concept,**
- **la géométrie très prégnante historiquement a fait privilégier l'étude des courbes (tangentes, aires,..)**
- **les premières définitions données par Leibniz étaient nécessaires au contexte qu'il exposait,**
- **les premières définitions données d'une fonction faisaient intervenir des procédés de calcul,**
- **le calcul différentiel a pu se développer sans que la notion de fonction soit clairement définie,**
- **le développement de la notion de fonction (notations, définition) s'est fait tant par des considérations internes aux mathématiques qu'externes**

Les débuts de l'enseignement de la notion de fonction

L'un des points de notre démarche qui pourrait engager historiens et didacticiens dans notre profession, est l'étude de l'historique des programmes scolaires ; voici quelques éléments sur l'introduction des fonctions.

[32] IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques*, fascicule 1, 1996.

Au début du XXe siècle, l'enseignement secondaire de la plupart des pays dits à l'époque « civilisés » est bouleversé par un mouvement de réforme. C'est à cette époque qu'est créé la CIEM dont la préoccupation principale est de redéfinir les programmes de mathématiques et la manière d'enseigner les mathématiques. Des options sont alors prises par d'éminents mathématiciens tel Emile Borel ; l'encadré ci-contre reproduit un extrait du numéro 16 de la revue « L'enseignement des mathématiques »

> « Ce ne serait pas sans danger qu'un enseignement se séparerait de plus en plus de la vie et de la réalité. Les applications des sciences pénètrent chaque jour davantage notre existence ; nous nous servons quotidiennement d'une bicyclette, nous voyons constamment dans les journaux des graphiques, nous construisons, chaque fois qu'un des nôtres est malade, des courbes de température. Si l'enseignement des mathématiques se rattache à de tels objets familiers, il risquera bien davantage d'intéresser, il échappera surtout à la mortelle scolastique. Quand un enseignement est trop scolastique, il dégoûte un grand nombre d'élèves et déforme plutôt qu'il ne forme l'esprit d'une partie des autres ; il n'est pas toujours sûr que l'enseignement des mathématiques ait toujours su éviter cet écueil. »[1]

C'est dans ce contexte qu'est créé en particulier en France un enseignement de l'analyse et en particulier qu'est introduit l'enseignement de la notion de fonction « *base de toute étude de phénomènes naturels*» selon Carlo Bourdet (un des protagoniste de la mise en place de la réforme en France). Cette évolution concerne du programme concerne les classes préparant le baccalauréat. Parmi les contenus: calcul infinitésimal dérivées de fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques, exponentielles et leurs inverses, calcul intégral. Il est en général appliqué pour rechercher des problèmes d'optimisation en géométrie et en physique.

Cet enseignement de mathématiques peut vivre car à l'époque, des enseignements conjoints aux mathématiques sont dévolus au professeur de mathématiques, tels l'astronomie, mécanique, cinématique…

Il est très intéressant de voir comment ces disciplines, dites " mathématiques mixtes [33] " étaient décrites par d'Alembert dans l'Enyclopédie qu'il dirigea avec Diderot :

« Les mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle mathématiques *pures*, considère les propriétés de la grandeurs d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...]

La seconde classe s'appelle mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, .. »

Quelles conclusions tirer suite à cette recherche de l'histoire de l'enseignement de la notion ?

- L'analyse et en particulier la notion de fonction a été introduite dans l'enseignement car c'est une notion centrale pour étudier des phénomènes « naturels ».
- Le corpus enseigné par les professeurs de mathématiques comprenait des mathématiques mixtes et qui donnaient des raisons d'être et un lieu de vie des techniques liées aux fonctions.

Les mises en garde de Borel ci-dessus seraient-elles encore valables pour les programmes scolaires actuels du Secondaire ? C'est ce que nous allons tenter de voir maintenant.

Réflexions sur les programmes de Troisième et de Seconde

---

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_mathematiques_dans_les_formations_universitaires.pdf

Suite aux réflexions précédentes, nous nous sommes posé deux questions au sujet de l'enseignement des fonctions :

- Si nous voulons résoudre des types de tâches significatifs relativement à la notion de fonction, avons-nous besoin des notations et du vocabulaire liés aux fonctions ?
- Pourquoi certaines fonctions sont-elles étudiées (parfois sous le terme « fonction de référence ») plutôt que d'autres ? Quelles classes de problèmes ces fonctions « de référence » permettent-elles de résoudre ?

1. Quelle nécessité pour le « formalisme » ?

La longue maturation historique de la notion de fonction nous a apporté des éléments de réponse par la négative à la nécessité de l'introduction de vocabulaire, définitions et notations ; pourtant, le programme de Seconde (2000) le demande de manière très appuyée : "*Les notations $f(x)$, déjà introduite au collège, et f, seront systématiquement utilisées*"

Voici à ce sujet un extrait des modalités[34] des programmes de Troisième (en vigueur depuis la rentrée 2008)

« L'utilisation des expressions "est fonction de" ou "varie en fonction de", amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et est associée à l'introduction de la notation f(x) » ; cet objectif se retrouve dans l'encadré ci-dessous ainsi que la demande d'introduire le vocabulaire d'image et d'antécédent :

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires
1.1. Notion de fonction [Thèmes de convergence]	*- Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.* [SVT, Histoire, Géographie, Physique…]	*Les activités prennent appui sur des situations simples issues, entre autres, de la géométrie (variation d'aires, de volumes), de la physique ou de problèmes de la vie courante. L'idée de variable est alors dégagée et rapprochée de celle de paramètre en SVT et de variable d'état en Physique. Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme.* *La notion d'antécédent est introduite (et le terme antécédent utilisé), par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique. La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines ce qui n'interdit pas de la solliciter dans d'autres cas. Le caractère exact des calculs quand la fonction est définie par une "formule" et le caractère approché de toute lecture graphique (sauf indication complémentaire) sont évoqués et distingués.* *La notation $x \mapsto f(x)$ est utilisée. Un travail est conduit sur le rôle différent joué par les parenthèses dans la notation $f(x)$ de l' image de x et dans les expressions algébriques comme par exemple $1{,}5\,(x - 2)$.*

Alors pourquoi ce formalisme ? N'est-on pas dans ce qu'on pourrait appeler une « ***culture scolaire*** » ?

Cette impression peut se trouver étayée en Seconde (et au-delà) avec les tableaux de variation et les tableaux de signes ; ce sont des créations didactiques devenues objets d'enseignement ; leur importance peut pourtant être considérée comme relative, avec des interrogations plus dérangeantes encore au sujet du tableau de signes et de l'image que cet objet donne de la science mathématique ; en effet, si la localisation des solutions d'une équation à l'aide du signe des valeurs d'une fonction a une réalité historique, et est actuellement utilisée en algorithmique sur les calculatrices, autant le tableau de signes

[34] Programmes de mathématiques de collège : B.O. N°6, 19 avril 2007

propose la démarche inverse : connaissance des racines d'expression ad hoc, et recherche du signe correspondant…[35]

Finalement, des observations dans les classes montrent que la maîtrise du concept mathématique est loin d'être compris jusqu'en Terminale et au-delà :

- confusion entre f et f(x) ;
- confusion dans les notations des dérivées et primitives $(x^2)' = 2x$ ou bien $F(2x) = x^2$;
- difficultés de compréhension sur les équations différentielles et notations employées x ; y ; y' ;…

Si ces difficultés sont réelles, n'est-ce pas en partie parce que les concepts et notations sont présentés aux élèves avant la résolution de problèmes où les fonctions interviennent ?

La question des « fonctions de référence »

introduction de la notion de fonction au collège

Quelles fonctions rencontre-t-on à partir de la Troisième ? Au service de quels problèmes ?

Il est écrit dans les programmes de Troisième (colonne de droite ci-dessous) qu'une des raisons d'introduire les fonctions est l'identification d'une courbe donnée par un nuage de points afin de trouver une formule ; c'est l'un des types de tâches que nous avions relevé dans la partie A :

Fonction affine	*- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.* *- Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.* *- Représenter graphiquement une fonction affine.* *- Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.*	*Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonctions affines. Pour ces fonctions, la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence. Le processus de correspondance $x \mapsto ax+b$ est associé à son expression verbalisée : "je multiplie par a puis j'ajoute b", ce qui permet de noter qu'une fonction linéaire est une fonction affine particulière. La recherche de l'image ou de l'antécédent d'un nombre permet de donner du sens au calcul littéral et à la résolution des équations.* *La relation $y = ax + b$ entre les coordonnées (x,y) d'un point M est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction $x \mapsto ax + b$.*
		Le problème de la détermination d'une fonction affine (ou linéaire) associée à une droite donnée dans un repère est intéressant comme contrepoint des études précédentes. Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, les élèves sont entraînés à travailler soit numériquement soit en exploitant directement la représentation graphique.

[35] Voir article de D. Gaud dans le Bulletin Vert de l'APMEP n°474 « Quelques interrogation à propos du tableau de signes »

L'introduction des fonctions affines par une situation comportant un nuage affine n'est-elle qu'un prétexte (une « remarque » et un « point de départ » selon l'encadré) pour lancer l'étude mathématique de fonctions affines ? Ou bien donner du sens aux concepts mathématiques via l'interdisciplinarité est-il un objectif, à la manière des mathématiques mixtes ? Certes l'appel à l'interdisciplinarité écrit ici fait écho à l'introduction de la partie de ce programme de Troisième sur les fonctions linéaires et affines : *« Les exemples mettant en jeu des fonctions sont issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. Les fonctions linéaires ou affines apparaissent alors comme des exemples particuliers de tels processus »* mais au vu des types de tâches de la colonne centrale du programme, il semble qu'il soit davantage question de se centrer sur l'étude de l'objet mathématique, et **toujours autour du vocabulaire et du formalisme** …

Pourtant, résoudre des problèmes posés en 3ème dans le cadre des fonctions linéaires ou affines ne nécessite
que des outils tels la proportionnalité, le calcul algébrique et la lecture de graphiques et de tableaux chiffrés, pratiquée dans toutes les autres disciplines depuis la sixième…Et nous pourrions envisager traiter le programme – et notamment les encadrés ci-dessus – via des situations externes aux mathématiques ; en s'inspirant des types de tâches déjà cités dans la partie A, une formule peut servir à :

- estimer l'évolution d'une population ;
- décrire la dépendance de proportionnalité entre deux quantités (telle la hauteur de mercure dans un thermomètre et la pression,..)
- décrire la dépendance affine entre deux quantités (telle la correspondance degrés Celsius & Fahrenheit,..)
- …

Bien sûr le programme n'interdit pas de faire cela... Mais il ne met pas en évidence non plus ces types de tâches !

Et les manuels comportent une proportion très faible de tels exercices, se centrant bien davantage sur les contenus mathématiques demandés par le programme : image d'un nombre par une fonction linéaire de coefficient donné, liens avec les pourcentages (coefficient multiplicateur), avec le théorème de Thalès, avec la géométrie analytique (caractérisation d'une droite par une équation telle y = ax)

Pourtant les applications affines et linéaires interviennent à la fois dans et hors mathématiques comme apportant des réponses à des types de tâches :

des fonctions « de référence » pour modéliser des phénomènes

Nous venons d'en parler en Troisième, mais cela se prolonge au lycée ; voici, tiré de manuels de Physique au sujet de la loi des gaz parfaits ($pv/T = c^{ste}$) le déroulement suivant d'un TP en classe de 2^{nde} : « mesurer p, mesurer v, puis tracer p en fonction de 1/v ». Ainsi il n'est pas demandé de tracer la courbe de dépendance de p en fonction de v mais de p en fonction de 1/v pour faire apparaître le modèle d'une droite passant par l'origine. Il est légitime de se demander *pourquoi* il n'est pas demandé de tracer p en fonction de $1/v^2$ ou bien en fonction de $\sqrt{v}$… Ce type de démarche se retrouve d'ailleurs en terminale avec les lois exponentielles ou logarithmiques…Si la recherche systématique d'une relation linéaire peut-être justifiée pour déterminer graphiquement des constantes, elle est contraire à la formation scientifique puisqu'elle impose ce qu'il faut trouver, la démarche consistant en fait à valider le modèle. De plus les logiciels (tableurs en particulier) permettent grâce aux courbes tendance de conjecturer des formules, ce qui n'était pas possibles il y a encore quelques temps. La vision du nuage de points devrait être un prélude au choix de la formule utilisée (ici : la fonction inverse).

Nous en concluons qu'une raison d'étudier certaines fonctions et de leur donner un statut « de référence » peut être la fréquence avec laquelle elles modélisent une situation externe aux mathématiques. Mais cela ne justifie pas nécessairement une étude formelle dans le cours de mathématiques, par exemple des variations d'une fonction ; en effet, si l'on considère la chute d'un corps soumis à son seul poids, alors la distance parcourue est une fonction croissante du temps, il n'y a aucune nécessité à le démontrer pour un Physicien avec quelque formule que ce soit qui modélise la situation… Nous pensons qu'il faut parfois accepter de rentrer dans des considérations internes aux mathématiques pour justifier d'un vocabulaire et de notations spécifiques, mais dans le but de résoudre des problèmes.

des fonctions « de référence » pour étudier les variations d'une fonction

Le programme de 3ème effleure une autre raison de l'étude des fonctions affines : « le processus de correspondance x → ax + b est verbalisé : je multiplie par a et j'ajoute b » nous pouvons penser qu'il est question sans le dire de la composition de fonctions ; la même impression se trouve dans le programme de 2nde :

Fonctions et formules algébriques	- Reconnaître la forme d'une expression algébrique : somme, produit, carré, différence de deux carrés - Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de *x* à *f(x)* quand *f* est donnée par une formule. - Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) - Modifier une expression ; la développer ; la réduire selon l'objectif poursuivi.

Cependant, la composition de fonctions n'est pas un objectif avant la classe de Première ; il serait par contre possible d'étudier les variations de l'ensemble des fonctions trinômes du 2nd degré et des fonctions homographiques à partir des variations des fonctions affines, de la fonction carré et de la fonction inverse, et leur donner un statut « de référence » cette fois pour des raisons *internes* à la discipline.

Cela serait-il pertinent ?

Rappelons que le terme même de « fonction de référence » est *une création didactique* née au début des années 1980 qui était liée à la recherche des limites dans le cadre de l'enseignement de l'analyse ou les mots d'ordre d'alors étaient « Majorer, Minorer, Approcher ». La notion de fonction de référence a semblé subir un glissement sémantique car dans les programmes plus récents il s'agit de ramener toute une classe de fonctions à ces fonctions de référence par le biais des fonctions associées. Autrement dit, identifier une fonction du type t **Erreur !** a cos(ωt+ ϕ) comme étant du type t **Erreur !** cos(t) après transformations. Ceci appelle deux remarques :

- ces techniques utilisant la composition de fonctions sont parfaitement justifiées et toujours utilisées en

physique mais rapidement abandonnées en mathématiques face à une technique beaucoup plus algorithmique (dérivées) mais pas nécessairement plus efficace dans un certain nombre de cas,

- le choix des fonctions de référence elles-mêmes prête à débat : pourquoi la fonction racine n'est-elle pas une fonction de référence en seconde ? Idem pour la fonction exp(-x), très présente en physique, pour les fonctions logistiques très utilisées en écologie ou bien en économie, …

Conclusions

Bien évidemment, choisir des contenus mathématiques à enseigner à un niveau donnée n'est pas aisé. Mais nous souhaitons faire deux critiques en direction des programmes actuels :

Première critique La conception des programmes en « petites marches »

Cette démarche qui veut qu'en introduisant « assez tôt » une notion, elle soit mieux acquise, la maturation aidant, implique un **morcellement des savoirs** qui peut être néfaste pour la compréhension par les élèves des raisons d'être de micro-contenus, si nombreux qu'ils peuvent sembler insignifiants aux élèves, dans le sens : « dont les raisons ne peuvent plus être perçues ».

La seule information, elliptique s'il en est, au sujet de ces « fonctions de référence » se trouve dans le bandeau : « Etudier quelques fonctions de référence, *préparant à l'analyse*. » **Faut-il donc attendre toujours le niveau ultérieur pour que les élèves sachent pourquoi ils devraient étudier les fonctions… ?**

Seconde critique : Les capacités attendues ne sont-elles pas trop souvent purement scolaires ?

Témoin, en Seconde :

- Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule.
- Déterminer, dans chacun des cas, l'image d'un nombre.
- Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
- Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.

Des types de tâches plus essentiels sont annoncés mais il faut aller les chercher dans certains paragraphes du document d'accompagnement ! Extraits :

« On privilégiera celles [des situations] pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question : ainsi, on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire ; *la question à traiter est alors souvent un problème de maximum, de minimum ou même de recherche d'une valeur particulière. »*

Nous regrettons que les savoirs à enseigner ne soient pas organisés autour de telles questions !

Pour pallier ces manques qui nous semblent desservir les mathématiques et leur enseignement, nous avons recherché un enseignement des contenus au programme de Seconde sur les fonctions en tentant un regroupement des techniques relevant d'un même type de tâches, afin d'organiser autrement un enseignement de la notion de fonction.

Détail d'un PER sur les fonctions en Seconde [36]

1. Description générale du parcours

Pour organiser l'enseignement des fonctions du programme de seconde, il reste à choisir parmi les types de tâches retenus ceux autour desquels on va organiser des contenus au programme.

Ces choix sont guidés par les analyses précédentes, et notamment :

- L'étude « écologique » : on doit montrer aux élèves où « vivent » les fonctions
- Les problèmes motivant les connaissances : nous devons être attentifs à l'introduction du formalisme

et du vocabulaire, et les contenus au programme de 2nde doivent être réorganisés pour répondre à des types de tâches significatifs, reformulés en termes de « grandes questions »

Nous proposons d'apporter en Seconde des réponses aux trois « grandes questions » suivantes :

- ***Comment optimiser une quantité ?***

On peut ajouter des sous questions qui feront l'objet d'études plus ponctuelles à l'intérieur du parcours :

- *Comment décrire la dépendance entre deux quantités ?*
- *Comment exprimer une quantité en fonction d'une autre ?*
- *Comment déterminer une quantité à partir d'une autre ?*

[36] Pour notre interprétation des notions d'AER, de PER, et questions à fort pouvoir générateur d'études (alias « grandes questions »), voir Gaud, Minet et al « Parcours d'étude et de recherche en Seconde » Petit x n° 79

Les contenus exigibles abordés pour répondre à cette question sont les déterminations d'images, la résolution d'équations et la recherche d'un extremum, tant graphiquement et algébriquement ; en fin de parcours sont abordés vocabulaire et notations de base sur les fonctions (images, antécédents, courbe représentative)

- ***Comment étudier les variations d'une quantité ?***

Les contenus exigibles abordés pour répondre à cette question sont la définition formelle des variations, des fonctions « de référence » (affine, carré, inverse) ainsi que leurs variations.

- ***Comment comparer deux quantités*** *?*

Les contenus exigibles abordés pour répondre à cette question sont la résolution (graphique et algébrique) d'inéquations.

Nous avons choisi d'étudier nos trois « grandes questions » au cours de trois parcours différents, tous balisés par plusieurs activités d'étude et de recherche, qui seront des moments-clés révélateurs des techniques à utiliser dans les exercices qui suivront. La suite donne le détail du premier de ces trois parcours.

Détail du parcours : Comment optimiser une quantité ?

a. Première étape du parcours : présentation du parcours aux élèves

Les élèves doivent connaître la ou les questions que nous proposons de leur faire étudier. Autrement dit il doit y avoir dévolution de la ou des questions.

a- Premier temps

Intervention du professeur :

Dans quels domaines y a-t-il des quantités qui varient ? Quelles sont ces quantités ? Qu'est-ce qui les fait varier ?

Par ces questions et les réponses que l'on peut y apporter, les élèves doivent prendre conscience que l'étude des fonctions a d'autres buts que l'acquisition de connaissances purement scolaires.

b- Deuxième temps

Intervention du professeur :

Parmi les domaines et types de tâches listées dans les réponses des élèves, on retient certaines questions qui interviennent dans de nombreux domaines. On projette un diaporama[37] pour illustrer notre propos.

Synthèse du diaporama :

Les quelques mots suivants sont écrits avec les élèves en introduction de **l'historique du parcours :**

Nous allons étudier des quantités qui varient en fonction d'autres quantités afin d'apporter des réponses à la question : « *Comment optimiser une quantité ?* »

Quelques remarques brèves a posteriori :

Les réponses des élèves sont très .. variées ! On peut proposer d'en faire un classement avec eux :

- celles qui sont qualitatives, telle « la gourmandise dépend de l'individu »

[37] En ligne sur le site Educmaths et sur celui de l'Irem de Poitiers : http://irem.campus.univ-poitiers.fr/irem/index1.htm (« ressources » puis « productions en ligne »)

- *celles qui sont quantitatives et mais sans dépendance fonctionnelle, telle « le poids dépend de la taille »*

- *celles qui sont quantitatives et avec dépendance fonctionnelle, telle « la hauteur du niveau de la mer dépend des précipitations »*

On annonce qu'on va se centrer dans le cours de mathématiques sur celles du troisième type car nous devons pouvoir travailler sur des nombres.

Deuxième étape du parcours : approche discrète du problème

a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*

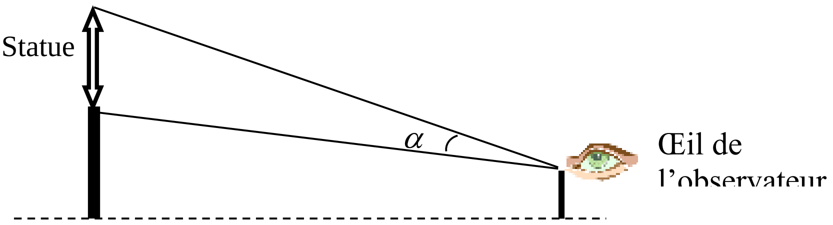
Comme on l'a annoncé suite au diaporama, on va étudier des quantités qui varient afin de savoir si elles peuvent être maximales ou minimales ; c'est le problème qui va être posé dans la situation suivante, et pour lequel il va falloir d'argumenter afin de justifier la réponse.

b- La première rencontre avec la tâche :

AER 1 : Comment varie l'angle sous lequel on voit un objet en fonction de la distance de l'observateur au pied de l'objet ? L'exemple de la statue de la Liberté de New York.

La situation et les données :
La statue de la Liberté, érigée en 1886, est haute de 46,50 m sans son socle et de 93 m avec socle. Arrivant à New York droit sur Liberty Island, un touriste placé à l'avant d'un bateau regarde la statue. Il a son œil placé à 5 m au-dessus de la mer. Pour un objet donné, ce qu'on appelle l'angle de vision est l'angle sous lequel la statue est vue dans sa totalité.

La figure ci-contre résume la situation



Partie A : *A votre avis :*
1- l'angle de vision ne varie pas quand on s'approche de la statue
2- l'angle de vision diminue quand on s'approche de la statue
3- l'angle de vision augmente quand on s'approche de la statue
4- autre proposition

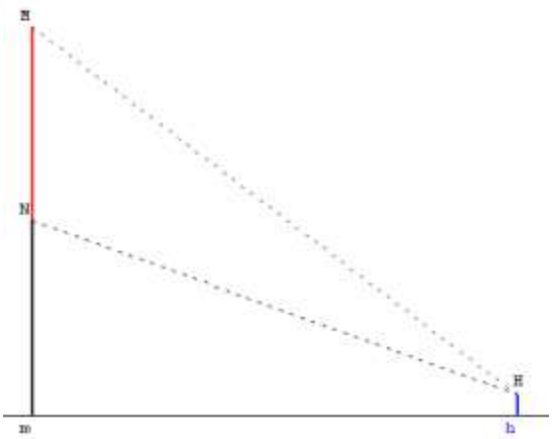
Partie B : *On mathématise la situation de la manière suivante :*

- la statue et son socle sont assimilés à deux segments verticaux portés par la même droite,

- *l'observateur est assimilé à un segment vertical qui représente la hauteur de son œil par rapport au niveau de la mer,*

La situation est représentée sur une feuille A4 à l'échelle $\frac{1}{1000}$

1- *Expliquer en quelques mots comment une représentation à l'échelle va permettre de mesurer l'angle de vision réel de la statue, à partir d'une distance donnée entre l'observateur le centre du piédestal.*
2- *Résoudre le problème initial : comment varie l'angle de vision au fur et à mesure que le bateau se rapproche de la statue ?*



c- Commentaires sur l'AER

Place dans le parcours

L'origine du parcours d'étude et de recherche est, idéalement, une situation du monde[38], ce qui offre souvent l'occasion d'établir un relevé de valeurs (ou d'utiliser un tableau de mesures donné, ce qui n'est pas le cas ici), afin d'avoir une première idée sur l'évolution du phénomène, voire l'existence d'extrema ; s'il n'est pas construit, un graphique sera suggéré afin d'améliorer la visibilité du comportement du phénomène. Cela soulève, selon la situation, des questions de conventions, de choix des unités, de choix de lissage (relier ou non les points par des segments ?) dont dépendent les lectures graphiques qui sont faites ensuite.

Faire un graphique à partir d'un tableau de nombres et inversement, savoir pourquoi on joint les points d'un graphique, sont-ce des activités mathématiques ? Oui, si on considère que l'on travaille sur le concept de correspondance, et non si on pense que les mathématiques sont essentiellement démonstratives et donc discursives. Il serait pourtant dommage que cette phase non discursive soit réduite, car c'est probablement formateur au niveau du concept (cf l'histoire de la notion de fonction).

Il s'agit d'une première rencontre, en Seconde, avec la notion de fonction. La situation oblige l'élève à faire correspondre à chaque distance, un angle, donc à mettre en place une démarche fonctionnelle.
C'est une situation du monde qui fait rencontrer aux élèves la variation du diamètre apparent d'un objet.

Analyse de la situation

La réponse aux questions peut être fait soit par le tableau de données soit par le graphique.
La résolution fait intervenir deux registres (numérique et graphique) ; volontairement « inaccessible », la formule donnant l'angle α en fonction de d = mh est : α = Arctan (87,99/d) – Arctan (41,49/d).
L'angle croît, passe par un maximum légèrement supérieur à 21°, atteint pour d environ égal à 60m, puis décroît.

Indications sur la gestion

Partie A : Après débat entre les élèves, chacun note son avis sur sa feuille.

---

[38] *Les acteurs d'une situation du monde* – ici une promenade en bateau - *suite à la rencontre avec une tâche censée être d'un type culturellement, sinon pratiquement, familier aux élèves*, - ici prendre une photographie - *sont amenés à devoir accomplir une certaine tâche t, supposée pour eux problématique […] qu'il sera demandé aux élèves de chercher à accomplir en lieu et place des acteurs évoqués par l'énoncé du « problème* - ici, décrire les variations du diamètre apparent de la statue.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

Partie B : On fait remarquer qu'un dessin à l'échelle conduit à des triangles semblables donc les angles entre le triangle réel et celui de la feuille A4 sont les mêmes. Chaque élève fait des relevés de mesures. On ne collecte pas les mesures car il y a risque d'avoir, pour une même distance, plusieurs mesures d'angles.

Pour convaincre certains élèves de l'intérêt de faire un relevé de plusieurs mesures, on pourra demander :

- ce qui se produit lorsqu'on est très proche de la statue (s'ils pensent que l'angle augmente ou est constant)
- de décrire aussi précisément que possible les variations du phénomène, ce qui fait apparaître l'extremum.
- de préciser à un degré près la valeur maximale qu'ils pensent obtenir

On peut faire remarquer que l'information donnée par un tableau de valeurs est peu visualisable car le but est d'amener les élèves à construire la courbe.

Ceci fait, peut-on relier les points ? Cela fait apparaître les problèmes de lissage. Un logiciel permet à la fois de vérifier l'inexactitude du tracé par segments en affinant et d'anticiper sur la future définition de la courbe comme ensemble des points de coordonnées (d , α). D'ailleurs, pour terminer, on peut montrer au vidéoprojecteur l'animation et un relevé fait par le logiciel de géométrie et faire reporter aux élèves les valeurs sur leur graphique, d'une couleur différente de leurs propres mesures.

Enfin, pour exploiter la courbe, on peut demander :

- quel est l'angle de visée pour une valeur non relevée (par exemple quand d = 110m)
- pour quelles distances entre le bateau et la statue l'angle de visée est supérieur à un angle donné (par exemple 18°), ou lui est égal.

<u>Remarques et sources :</u>

- L'angle de visée d'un appareil photo standard (focale 35 même) est de 40°. Mais pour les prises de vue, on parle plutôt en distance focale qu'en angle de visée ; ainsi les zooms permettent-ils de photographier dans de bonnes conditions à d' autres moments que celui où le diamètre apparent est maximal.
- Les bateaux utilisés voguent à environ 16 nœuds (1 nœud = 1 mile par heure ; 1 mile = 1,852 km)

Si on demande pour exploiter le graphique à quelle distance d de la statue l'angle est supérieur à 18°, on trouve que $35 < d < 110$; cela laisse à peine 10 s pour prendre la photo, ce qui est peu !

Dimensions de la statue : http://www.insecula.com/salle/MS01022.html
Vitesse du bateau : http://www.insecula.com/salle/theme_40039_M0089.html

d- Historique : <u>Bilan de l'AER 1 :</u> (suite de l'historique)

Pour étudier une situation où une quantité dépend d'une autre, on peut essayer de la traduire par des outils (tableau, graphique) suite à un relevé de mesures.

Plus on a de mesures, plus on a d'informations mais dans ce cas un tableau devient difficile à lire.

Par contre, un graphique, constitué d'un ensemble de points, a des avantages, car il permet de :

- *mieux visualiser* comment varie une quantité en fonction d'une autre
- *choisir* une manière de relier les points *pour estimer* d'autres valeurs que celles qui ont été mesurées, en particulier rechercher s'il y a une valeur extrême

Exemple :
Ici, à chaque distance choisie, on a associé un angle de vision. On a exprimé cette correspondance par :
-un tableau de valeurs

- un graphique (en repérant en abscisse la distance et en ordonnée la mesure de l'angle de vision) grâce auquel on a estimé à quelle(s) distance(s) on a eu un angle de vision de 18°, l'angle de vision quand d = 110 m, l'angle maximal.

e- Synthèses avant l'AER suivante :

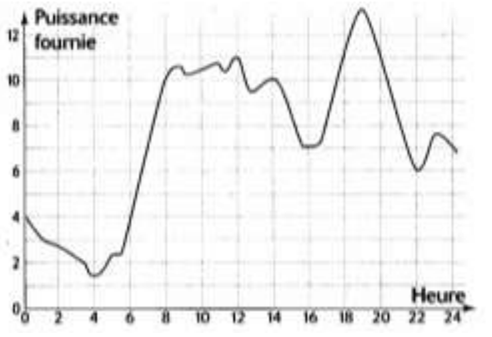
Méthode : sur la construction d'un graphique, avec le vocabulaire utilisé (coordonnées, repère, …) la représentation d'une grandeur A en fonction d'une autre B (en plaçant les points de coordonnées (B ; A) dans un repère), les choix à faire selon la situation (unités, lissage, erreur d'approximation des valeurs lues)

f- Exercices de travail de la technique :

Les exercices sont centrés sur l'exploitation de tableaux et de graphiques dans des situations contextualisées (données issues des médias : populations, relevés de température, de niveaux d'eau, …)

<u>Exercice 1 :</u>

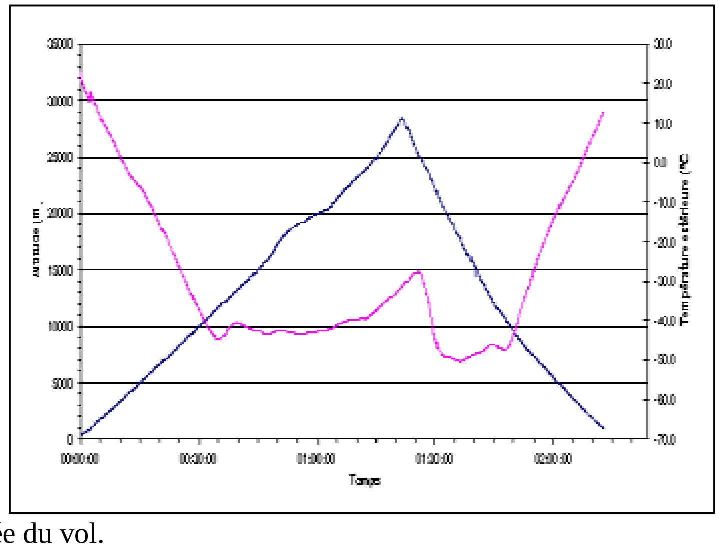
Ce graphique représente l'évolution de la puissance fournie en Gw (gigawatts) au cours d'une journée par l'ensemble des centrales hydrauliques en France.



1. Quelle puissance fournissent ces centrales :
   à 6h ? à 8h ? à 22h ?
2. A quel(s) moment(s) de la journée fournissent-elles :
- une puissance de 8 Gw ?
- la puissance maximale ?
- la puissance minimale ?

<u>Exercice 2 :</u>

Voici un graphique représentant les mesures de l'altitude et de la température de l'air au cours de l'ascension et de la descente d'un ballon sonde. Arrivé à une certaine altitude, le ballon sonde éclate. Alors, il chute, mais ... les données scientifiques (température, altitude , ...) sont toujours enregistrées et transmises à un ordinateur qui donne les courbes ci-dessous. Rechercher à l'aide de ces courbes :



a) le temps au bout duquel le ballon éclate
b) l'altitude maximale qu'il atteint
c) la durée de la descente
d) si le ballon descend plus vite qu'il ne monte
e) la température maximale entre 30 mn et 1h30mn de vol.
f) comment varie la température en fonction de la durée du vol.

Troisième étape du parcours : algébrisation en vue de l'automatisation des phénomènes

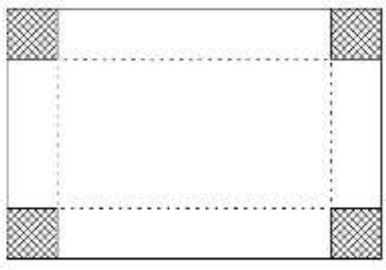
a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*

Maintenant qu'on sait lire des réponses sur des tableaux et des graphiques pour rechercher un extremum, on va voir ce que donnent ces techniques sur une nouvelle situation

b- La première rencontre avec la tâche :

AER 2 : Construction d'une boîte

Avec une feuille cartonnée de format A4, on construit une boite sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle en ôtant un carré à chaque coin puis en formant la boîte en pliant suivant les pointillés.



1. Est-il possible que le volume de la boîte soit de 0,7 dm^3 , à 2 cm^3 près ?
2. Quel côté du carré permet de construire la boîte de volume maximal ?

c- Commentaires sur l'AER

Place dans le parcours :

Au vu des analyses des trois premières parties, nous avons choisi de ne pas imposer *a priori* notations et vocabulaire, qui ne sont pas nécessaires à la compréhension des différents statuts de la lettre (variable, paramètre, inconnue), ni à l'utilisation d'une formule pour aborder certaines des techniques au programme de Seconde.

On propose maintenant une situation qui gagne à être mise en équation pour progresser par rapport à la technique précédente. En particulier grâce aux TICE, on peut produire rapidement un tableau de nombres, ou une courbe et ainsi se dégager des calculs numériques répétitifs afin de se concentrer sur les conjectures.

On peut souligner que les situations de la vie courante amenant la rencontre avec des fonctions ne font travailler que des valeurs approchées de la solution mathématique (des nombres décimaux), puisque rechercher des valeurs exactes est souvent dénué de sens dans des situations hors mathématiques. De plus, on travaille ici la construction du nombre réel en affinant la réponse (modification du pas, dichotomie, ..)

Analyse de la situation

Cette situation peut se gérer à l'aide des outils informatiques ou de calculatrices graphiques.
Elle permet d'aborder l'intérêt d'une formule algébrique pour répondre à la question posée, même si aucune donnée ostensible n'apparaît (pas de x dans l'énoncé). Mais le passage par la formule, sans être incontournable, facilite énormément la tâche en particulier si on utilise un tableur. Certaines techniques se mettent alors en place sur :

- le tracé d'une courbe avec une formule
- la lecture d'une courbe (maximum, résolution graphique d'équations)

Il s'agit alors dans un premier temps de résoudre une équation voire une inéquation à condition de passer par la formule, puis ensuite de rechercher un extremum. Une équation qui se résout par tâtonnement fait apparaître de manière implicite la notion de fonction ; le problème possède deux solutions, et on peut donc prévoir qu'ayant rencontré par tâtonnement une solution des élèves s'arrêteront.

Le graphique permet une visualisation plus rapide du problème. Si les points peuvent être joints, doivent-ils l'être par des segments ? Pourquoi ? Ce questionnement déjà abordé lors de l'AER 1 est tranché par l'affinage du pas choisi. Certes il n'est pas possible en seconde d'utiliser l'outil mathématique pour résoudre l'inéquation… Mais cela est volontaire, puisque la situation ne réclame pas de solution exacte, étant externe aux mathématiques !

Gestion :

Lorsque les élèves ont constaté la longueur du travail demandé si on fait des relevés comme dans l'AER1, et si aucun n'en a l'idée, on peut leur demander comment ils ont résolu au collège des problèmes dans lesquelles une quantité inconnue est à trouver ; on va essayer de trouver une formule donnant le volume en fonction du côté du carré. La formule est ici facile à trouver. En quoi permet-elle de répondre à la question initiale ?

Elle permet de faire une courbe et surtout d'utiliser soit la calculatrice graphique (à avoir prévue ce jour-là) soit le tableur (dans ce cas on peut montrer que si on donne des valeurs aux côtés du carré, on calcule la longueur puis la largeur de la boîte et enfin de volume dans différentes colonnes du tableur ; dans ce cas, une explication collective sur le tableur est nécessaire lors de la correction). Pour que les élèves s'approprient le problème, on pourra montrer un patron déjà préparé et présenter une animation sous Geospace.

d- Historique : **<u>Bilan de l'AER 2 :</u> (suite de l'historique)**

Pour étudier une situation où il serait fastidieux de faire un relevé de mesure, on peut utiliser une formule pour exprimer une quantité en fonction d'une autre. Cette formule a plusieurs atouts car elle permet :

- *d'automatiser* le calcul des valeurs (tableur, calculatrice)
- *de fournir* des tableaux de valeurs de la taille souhaitée et, par suite, de *graphiques* aussi précis qu'on veut
- *de calculer* une quantité associée à une quantité donnée (par calcul direct ou résolution d'équation)

Exemple :
Ici, on a nommé x le côté du carré, et exprimé le volume V de la boîte en fonction de x grâce à la formule
$V = 4x^3 - 10x^2 + 6x$. Ensuite, comme $0 < x < 1$, on a choisi un pas de 0,1 et calculé différentes valeurs de V en fonction de x, puis représenté graphiquement V en fonction de x. Enfin, pour répondre aux deux questions avec davantage de précision, on a pris un pas plus petit.

e- Synthèses avant l'AER suivante :

Cours :
Les liens entre les trois registres permettant de *décrire la dépendance* entre deux quantités : tableau de valeurs, graphique, formule.
Ce que signifie qu'une quantité est une fonction d'une autre
Exemple de dépendances où l'expression « *en fonction de* » convient ou non.
Définition d'une quantité maximale, minimale.
Méthodes : construction d'un graphique à partir d'une formule à l'aide des TICE
résolution d'une équation du second degré

f- Exercices de travail de la technique :

Mise à l'épreuve de la technique algébrique (calculs, mise en équation, résolution d'équations,..) mettant en valeur l'automatisation des calculs permise par les formules, en utilisant un graphique devant une difficulté algébrique …

<u>Exercice 3 :</u>
1. Exprimer le périmètre d'un carré en fonction de son côté x.
2. Exprimer l'aire latérale d'un cube en fonction de son arête x.
3. a) Exprimer le périmètre d'un cercle en fonction de son diamètre d puis en fonction de son rayon r.

b) Exprimer maintenant le rayon d'un cercle en fonction de son périmètre

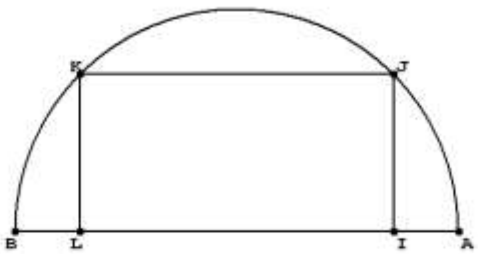
Exercice 4 :

La distance de freinage d'un véhicule est notée d et sa vitesse est notée v. En sciences expérimentales, on établit des lois liant d et v ; par temps humide, la loi est donnée par la formule $d = \dfrac{3\,v^2 + 100\,v}{400}$ (d en mètres, v en km/h)

1. Ecrire un tableau des valeurs de *d* en choisissant pour v des valeurs dans l'intervalle [0 ;160] avec un pas de 20, c'est-à-dire en choisissant une valeur de v tous les 20 km/h : v = 0, v = 20, v = 40, … jusqu'à v = 160.
2. Tracer le graphique correspondant au tableau de valeurs.
3. Utiliser ce graphique pour estimer la vitesse d'un véhicule qui a besoin :

a) d'une distance de freinage de 80 m b) d'une distance de freinage de 150 m

Exercice 5 :



[AB] est un segment de longueur 8. O est le milieu de [AB] et I est un point variable sur [OA]. On construit le point L symétrique de I par rapport à O. Enfin, on construit un rectangle IJKL inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB]. On note x la longueur IO afin d'étudier l'aire, notée $\mathcal{A}$, du rectangle IJKL.

1. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x
2. Quelle est la valeur maximale de l'aire $\mathcal{A}$? Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?

Exercice 6 :

On veut clôturer un terrain rectangulaire de 450 m² dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture. Déterminer les dimensions du terrain pour minimiser la longueur de clôture nécessaire

Quatrième étape du parcours : algébrisation pour des démonstrations

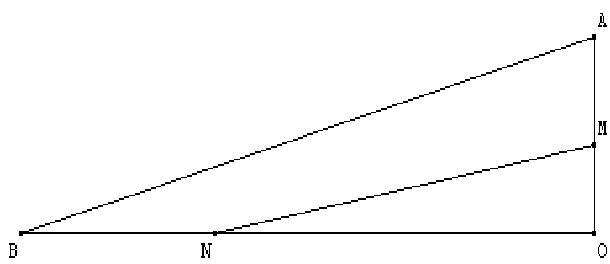
a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*

On a déterminé dans diverses situations l'extremum d'une quantité avec des formules, des tableaux et des graphiques mais on s'est souvent contenté de valeurs approchées. On va maintenant tenter de résoudre un problème d'optimisation en donnant la valeur exacte de l'extremum.

b- La première rencontre avec la tâche :

AER 3 : Un problème d'optimisation géométrique

OAB est un triangle rectangle en O.
OA=2 et OB=8. M est un point de [OA].
N est le point de [OB] tel que BN= 7 OM
Où placer exactement M sur [OA] pour que l'aire du triangle OMN soit maximale ?



c- Commentaires sur l'AER

Place dans le parcours :

L'étude formelle des variations d'une quantité en fonction d'un autre et la détermination de la valeur exacte d'un extremum n'ont de sens que dans des situations internes aux mathématiques. On peut clore en Seconde un parcours sur l'optimisation avec l'étude des extrema des fonctions trinômes du 2nd degré, sachant que l'algébrisation du problème est nécessaire mais pas suffisante, car il faut décrypter une écriture littérale pour démontrer ; ainsi on termine le parcours par une situation interne aux mathématiques, où la demande de démonstration place donc par essence même le niveau de justification supérieur au-dessus des niveaux précédents.

Le choix de la forme de l'expression est ici fondamental, et en accord avec la demande du programme de « modifier, factoriser, développer ou réduire selon l'objectif poursuivi » ; c'est l'aspect structural d'une expression littérale qui est mis en lumière, obligeant à travailler sur l'ostension d'une formule.

Analyse de la situation

Le graphique ou un tableau de valeurs affiné permettent une visualisation rapide du problème mais c'est une technique nouvelle, la mise sous forme canonique, qui permettra de déterminer de manière incontestable le maximum atteint par l'expression. On a choisi ici un maximum égal à 8/7, atteint quand la variable vaut 4/7, valeur rationnelle non décimale choisie à la fois afin de poursuivre la construction de la notion de nombre mais aussi pour imposer un autre mode de justification que ceux précédemment utilisés.

Cette situation ouvre la discussion : « Et si on n'a pas une expression du 2nd degré, peut-on trouver un extremum avec la formule ou doit-on se contenter d'une valeur approchée ? » ; on se rappellera par exemple des situations de l'étape précédente du parcours. On pourra dire qu'il existe des méthodes en classe de Première, et ici, le « vous verrez l'an prochain » n'est pas une question éludant le fait qu'on n'a pas de réponse à donner aux élèves à la question « à quoi cela sert-il ? », mais l'annonce qu'une question ne peut pas forcément être résolue totalement à un niveau donné, et que les solutions mathématiques efficaces demandent parfois du temps pour être comprises.

Gestion :

Cette situation peut être illustrée à l'aide des outils informatiques pour montrer comment se déplace N selon la position de M. La relation BN = 7 OM et l'habitude prise dans l'étape précédente du parcours doivent amener les élèves à rapidement rechercher une formule de l'aire de OMN en fonction de OM.

Lorsque les élèves ont déterminé la formule attendue, tracé la courbe et apporté une réponse approchée, on relance l'étude en rappelant qu'on est dans une situation où on a demandé - pour la première fois du parcours - une valeur exacte. Ceux qui affinent et cherchent à deviner le nombre auront du mal à conjecturer la réponse OM = 4/7. Le professeur dirige alors la résolution du problème en proposant la transformation de l'expression, montrant ainsi une technique certes difficile mais performante sur un certain type d'expressions.

On peut noter qu'en Seconde, la forme canonique pourra être donnée aux élèves, qui auront à savoir l'utiliser de manière pertinente.

d- Historique : **Bilan de l'AER 3 : (suite et fin de l'historique)**

Dans une situation mathématique où on demande de démontrer qu'une valeur trouvée est exacte, on ne peut plus se contenter de valeurs approchées lues graphiquement ou avec un tableau, même en réduisant le pas.

Certains types de formules, celles du 2nd degré, peuvent être transformées à l'aide des identités remarquables puis analysées pour qu'on soit certain, sans aucun tableau ni graphique, de la valeur extrême qu'elles peuvent atteindre.

Exemple :

Ici, on a trouvé que l'aire du triangle OMN s'exprimait par la formule $4x - 3{,}5x^2$.

La transformation en $-3{,}5\,(x - 4/7)^2 + 8/7$ permet d'analyser cette nouvelle formule et de dire pourquoi la valeur maximale sera 8/7, et sera atteinte lorsque $x = 4/7$

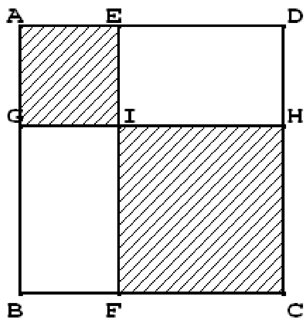
e- Synthèses avant l'AER suivante :

Méthode : règles de calcul littéral et algébrique

f- Exercices de travail de la technique :
Etude de situations amenant à transformer selon le but poursuivi ou à interpréter des expressions algébriques.

Exercice 7 :
1. Démontrer que l'expression $(x - 3)^2 + 8$ a pour valeur minimale 8 quel que soit le nombre x.
2. Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si elles ont un minimum ou un maximum, préciser cet extremum, et en quelle valeur de la variable il est atteint :
$A = x^2 + 4$; $B = -x^2 + 4$; $C = (x - 3)^2 - 4$; $D = -(x - 3)^2 - 4$; $E = 2(x + 4)^2 + 1$; $F = -3(x - 1)^2$

Exercice 8 :



ABCD est un carré de côté 5.
E est un point du segment [AB] et G est le point du segment [AB] tel que AE =AG.
La parallèle à (AD) passant par E coupe [DC] en F. La parallèle à (AB) passant par G coupe [BC] en H. (GH) et (EF) se coupent en I.
On va étudier l'aire, notée a , de la partie hachurée, quand E se déplace sur [AD].

1. On pose AE = x.
 a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
 b) Vérifier que l'aire hachurée s'exprime en fonction de x par $a = 2x^2 - 10x + 25$.

2. Etude en valeur approchée :
 a) A l'aide de la calculatrice, faire un tableau de valeurs de a avec pour x un pas de 0,5 puis construire le graphique correspondant.
 b) A l'aide de la courbe lissée, déterminer :
  - toutes les valeurs de x pour lesquelles a est égale à 20 cm²
  - la valeur de x pour laquelle l'aire a est minimale.

3. Etude en valeur exacte :
 a) Vérifier que l'aire hachurée peut s'écrire $a = 2(x - 2{,}5)^2 + 12{,}5$
 b) En déduire pour quelles valeurs de x on a : $a = 14{,}5$; $a = 12{,}625$; $a = 20$
 c) Démontrer que a est maximale pour $x = 2{,}5$ et que ce maximum vaut 12,5.

Cinquième et dernière étape du parcours : intégration des notations et du vocabulaire

a- Dynamique de l'étude : *intervention du professeur :*
On a rencontré diverses situations dans lesquelles on a déterminé l'extremum d'une quantité, que ce soit une longueur, une aire, un volume, une distance, une puissance, une altitude… Pour terminer ce parcours, on va écrire dans le cours quelques définitions et notations qui sont utilisés en mathématiques, et qui permettent de parler de manière universelle des situations qu'on a pu rencontrer.

b- Commentaire :
On se met « assez tard » en conformité avec le programme, qui demandait « une utilisation systématique des notations *f* et *f* (x) », ce qui est discutable à la fois en regardant l'historique de la genèse

de la notion de fonction, ainsi que l'utilisation des fonctions dans les disciplines autres que les mathématiques, où on ne rencontre pas, au moins au niveau du secondaire, *f* , *f* (x), « image », « antécédent », ..

Si, au cours des trois premiers temps du parcours, des élèves ont souhaité (par des souvenirs de 3ème..) noter A(x) une aire que le professeur a noté A, on ne leur en tiendra pas rigueur (et on les suivra si la classe semble prête à cela…) Mais les notations et vocabulaires peuvent n'être intégrées qu'après avoir travaillé les techniques, la dernière partie du parcours étant une reprise de situations équivalentes à celles rencontrées depuis le début du parcours, et reformulées avec notations et vocabulaire des fonctions ; on fera donc pour introduire ce dernier temps du parcours non pas une activité mais un cours en montrant aux élèves l'intérêt des notations et du vocabulaire, génériques et universels.

c- Synthèses :

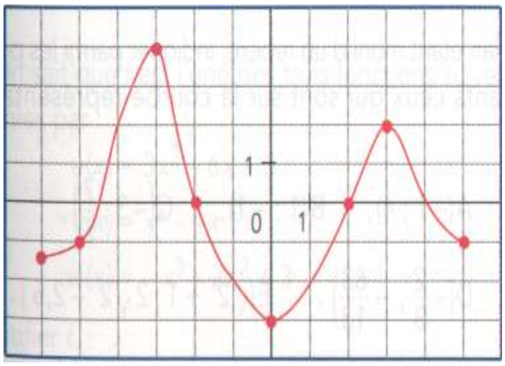
Cours : définition des intervalles bornés, d'une fonction, de l'image et de l'antécédent d'un nombre, de la courbe représentative d'une fonction

d- Exercices de travail de la technique :

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = (- x + 1)(2x – 3)

1. Calculer l'image par f de 0, puis de 2/3, et enfin de $\sqrt{3}$.
2. Quels sont les antécédents de 0 par f ?

Exercice 10 : Voici la courbe d'une fonction f.



1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer l'image par f de 0, de 3, de 2 et de -1.
3. Les nombres 4 , 0 , et -2 ont-ils des antécédents ?
4. Trouver un nombre qui n'a pas d'antécédent.
5. Résoudre les équations f(x) = - 1 et f(x) = 0.

Exercice 11 : On appelle f la fonction définie sur] – ∞ ; + ∞ [par : f (x) = x^2 + 3 x – 4 (forme A)

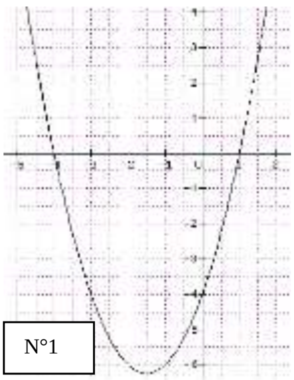
1. Vérifier que, pour tout nombre x ∈] – ∞ ; + ∞ [, l'expression f (x) peut s'écrire sous deux autres formes :

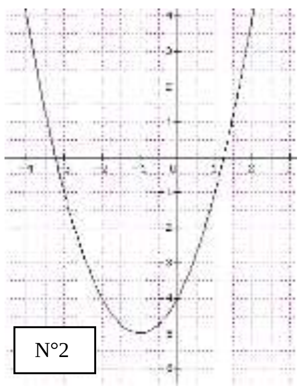
$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ (forme B) ou (x + 4) (x – 1) (forme C)

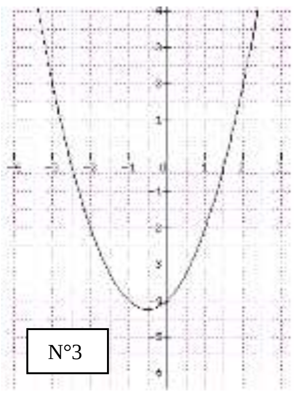
2. En utilisant à chaque fois une des formes A, B ou C, au choix, répondre à ces questions :

a) Calculer f ($-\frac{3}{2}$) b) Résoudre l'équation f (x) = - 4. c) La fonction f admet-elle un extremum ?

3. L'une des trois courbes suivantes est la courbe C_f. Laquelle ? Justifier.


N°1


N°2


N°3

Suite à cette pratique initiée depuis 2005, voici quelques-unes de nos conclusions :

L'organisation par parcours permet d'étudier une question digne d'intérêt sur un temps long, balisé par des études à l'issue desquelles les élèves doivent comprendre quelles techniques seront travaillées. Un argument en faveur de la longueur des PER est la cohérence pour traiter complètement une question... même s'il n'est pas toujours aisé de traiter révisions, gammes et points techniques, sans perdre de vue le parcours.
Notons que cette façon de faire n'a plus d'impact négatif sur la gestion temporelle du programme contrairement aux errements du début de recherche.

Cette organisation permet également de voir que les techniques (ici : graphiques, formules, étude formelle) ne se substituent pas les unes aux autres mais que leur domaine de validité est différent.
Est-ce un moyen d'évaluer la pertinence de notre travail à l'heure des compétences ?… D'autant que nous travaillons sur des tâches complexes (comparer, optimiser,…) voire parfois en interdisciplinarité.

Les sentiments assez unanimes des enseignants ayant expérimenté : la recherche écologique permet d'entrevoir des ouvertures interdisciplinaires et de montrer que les mathématiques ne sont pas : une discipline coupée de toute réalité ; qu'un outil de réussite scolaire. C'est une découverte pour un certain nombre d'enseignants ayant participé à la recherche !

Aucun ne souhaite retourner en arrière : enseigner une notion sans présenter son sens leur paraît impensable.

Les élèves ont parfois été déboussolés par ce type d'enseignement écologiquement minoritaire… mais de moins en moins car nous gagnons en cohérence ! Cependant, motiver les connaissances n'est pas nécessairement motiver les élèves…même si "l'accueil" fait en classe est de plus en plus encourageant.
Si les élèves comprennent nos motifs, leur ambition (et celle de leurs parents) est la réussite scolaire…

Nous avons, nous enseignants, davantage d'assurance pour justifier notre pratique professionnelle…mais pas encore au point d infléchir les programmes, dont la succession nous cache la recherche des raisons d'être de l'enseignement des notions. La multiplicité des notions enseignées, le saupoudrage des notions sur les niveaux ne facilitent pas notre tâche dans ce travail.

Nous avons engagé un travail long et difficile mais vital nous semble-t-il et qui concerne toute la profession… si toutefois celle-ci et notamment les professeurs de mathématiques ont conscience du besoin vital de sortir de l'insignifiance de l'enseignement faisant courir à leur discipline un risque de dépérissement du secondaire.[39]

[39] Thiénard Jean-Claude, « Redonner du sens au mathématiques enseignées », Repères n°66