Fabriquer et faire vivre une organisation mathématique régionale

Michèle Artaud et Ghilaine Menotti
IUFM d'Aix-Marseille & IUFM d'Alsace

Résumé : Dans l'enseignement existant actuellement, le secteur des fonctions en classe de seconde apparaît scindé en plusieurs thèmes : le thème « Généralités sur les fonctions » est commun à la quasi totalité des découpages observés, tandis que le reste du programme est scindé en deux à quatre thèmes selon que l'on incluera ou pas les fonctions trigonométriques et affines dans les « Fonctions usuelles » ou « Fonctions de référence », ou encore que l'on traitera à part le thème « équations/inéquations ». Ce découpage produit des organisations mathématiques (OM) autour des fonctions relativement fragmentées, dont les avatars les plus repérables sont le fait que le type de tâches « étudier une fonction » n'apparaît pas nettement identifié dans ces OM et que le travail autour du thème équations/inéquations n'est pas conforme au programme de la classe.

Nous proposons dans un premier temps de développer ces points à partir d'exemples issus du travail effectué en PLC2 à l'IUFM d'Aix-Marseille ; puis dans un second temps d'examiner ce que suppose la fabrication d'une organisation mathématique au niveau du secteur des fonctions en seconde, et notamment sur quelle(s) technique(s) d'analyse didactique elle se fonde.

Un des points cruciaux des difficultés que nous voulons mettre en évidence à l'égard de l'enseignement du secteur des fonctions en classe de seconde trouve son origine dans le changement de programme de cette classe qui a eu lieu en 1999 et qui a vu la disparition du secteur algébrique et son intégration dans le secteur des fonctions. On rompt ainsi un peu subrepticement avec une tradition solidement ancrée, sans que des raisons de cette rupture soient avancées ou encore que l'on détaille suffisamment les organisations mathématiques[1], en un certain sens inédites, qu'il s'agit désormais de faire vivre.

En effet, le programme publié en août 1999 comporte trois domaines d'étude : *Calcul et fonctions*, *Statistique* et *Géométrie*. L'algébrique se trouve alors inséré dans le secteur des fonctions, comme en témoigne l'extrait suivant (MEN 1999) :

> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. *En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions*. (C'est nous qui soulignons.)

Le programme antérieur, qui datait de l'année 1990, était par contraste structuré en quatre domaines : *Statistique*, *Géométrie*, *Fonctions* et *Problèmes numériques et algébriques*. On notera que le lien avec les fonctions était déjà souligné dans l'en-tête consacré aux problèmes numériques et algébriques que nous reproduisons ci-dessous (MEN 1990) :

> *La résolution de problèmes*, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante *constitue l'objectif fondamental* de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.
>
> Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent suivant deux axes :
>
> – Consolider la *pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique*, en relation étroite avec l'étude des fonctions.

> – Poursuivre l'étude des *équations et inéquations à une inconnue* et des *systèmes d'équations linéaires*.
>
> Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à une *meilleure maîtrise de l'emploi de variables*, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des travaux numériques, tableaux de valeurs de fonctions…), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.

Le programme publié en 1999 met donc plus nettement en avant le lien entre les fonctions et le calcul algébrique en supprimant le domaine *Problèmes numériques et algébriques* et en intégrant l'algèbre dans le secteur des fonctions, plus spécialement dans les deux derniers thèmes d'étude du programme (MEN 2001) :

Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…). Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule. À l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée.

Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; …	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Pour insister sur ce point, le document d'accompagnement du programme, disponible au deuxième trimestre de l'année 2000, explicitera ainsi les attentes à l'égard de l'étude des équations et des inéquations sous la rubrique « Mise en équation ; résolution algébrique et graphique d'équations et d'inéquations », en soulignant l'intérêt du recours à la représentation graphique et à la calculatrice graphique (MEN 2000) :

> Un élève ayant à résoudre une équation comme $(x - 2)^2 = 9$ perçoit assez facilement que l'égalité est bien vérifiée pour $x = 5$ et il se contente alors de donner cette seule solution ; il a même souvent quelques réticences à mettre en œuvre toute technique permettant d'aboutir à l'ensemble des solutions. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto (x - 2)^2$ qui met bien en évidence l'existence de deux solutions incitera à dépasser le premier raisonnement. Pour la résolution de $x^2 + 2x + 3 = 0$, on peut là aussi s'appuyer sur la représentation graphique qui montre bien l'absence de solution, confirmée ensuite par $(x + 1)^2 + 2 = 0$; il peut être intéressant aussi de laisser un élève développer l'expression, tenter de la factoriser, proposer comme solution $x = -3 / (x + 2)$ et le faire réfléchir sur sa proposition. De même, une calculatrice graphique montre facilement que les équations $x (x + 1) = (2x + 3) (x + 1)$ et $x = 2x + 3$ n'ont pas les mêmes solutions.
>
> Un autre exemple est l'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2 + 3x - 10$ pour conjecturer que 2 est une solution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$; le calcul permet de vérifier facilement que c'est bien le cas ; il reste à anticiper un peu sur la factorisation et à vérifier que $(x - 2) (x + 5)$ est bien une écriture possible pour l'expression $x^2 + 3x - 10$ pour aboutir à la résolution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Les auteurs concluent : « Ces quelques exemples montrent comment le point de vue des fonctions peut enrichir la réflexion sur la résolution d'équations. Ces remarques s'appliquent encore plus à la résolution d'inéquations puisque l'ensemble des solutions ne se réduit presque jamais à une seule valeur. »

Le style de technique qu'il s'agit de pousser en avant doit donc articuler travail algébrique et travail fonctionnel, les fonctions jouant ici le rôle tantôt de *média* en donnant des informations sur les solutions, tantôt de *milieu* en permettant de mettre à l'épreuve le calcul algébrique effectué[2]. Mais, comme en bien des cas, la technique à mettre en place n'est pas véritablement détaillée, et le document d'accompagnement n'est pas davantage explicite sur d'autres thèmes du programme comme par exemple celui des formes algébriques (MEN 2000) :

> Les différentes capacités attendues qui sont listées dans ce paragraphe doivent être développées essentiellement en liaison avec les autres rubriques : organisation de calcul, étude des fonctions, résolution d'équations et d'inéquations… L'utilisation d'une calculatrice avec un éditeur d'expression (les calculs ne se font pas au fur et à mesure mais à partir de l'entrée de toute une expression) ou mieux d'un tableur permet une approche quasiment expérimentale des modifications d'écriture possibles et des identités usuelles : comme il est dit dans le § I.8 de ce document, on insistera sur le fait que la calculatrice ou le tableur permettent simplement de vérifier de façon empirique que deux expressions sont égales pour un certain nombre de valeurs prises par la variable (plus rarement par les variables) mais que seul, le calcul algébrique permet d'établir « l'identité » des deux expressions. On exploitera les possibilités des calculatrices pour enrichir la réflexion sur les différentes formes possibles qu'une expression peut prendre et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre. On n'atteindra une certaine maîtrise du calcul algébrique que si on développe une aptitude à anticiper les effets d'une modification d'écriture. C'est pourquoi on ne séparera pas l'étude des différentes techniques des traitements envisagés.

Cette nouvelle structuration du programme – dont le contenu, on le verra plus loin, s'avère très fonctionnel bien que cette fonctionnalité ne soit que peu lisible – ne facilite pas l'existence du calcul algébrique ni la fabrication de l'organisation mathématique relative aux fonctions dès lors qu'on la considère comme une contrainte.

Voici par exemple des programmations thématiques sur l'année, en vigueur pour l'année scolaire 2007-2008 dans quelques lycées (codées PC ci-dessous pour progression commune) ou classes de seconde (codées PS ci-dessous pour progression de seconde) de l'académie d'Aix-Marseille.

PC1
Nombres et calculs
Statistiques I
Équations et inéquations
Fonctions
Transformations du plan, triangles isométriques et de même forme
Repérage dans le plan, vecteurs
Équations de droites, systèmes d'équations linéaires
Fonctions de référence
Statistique II
Géométrie dans l'espace
Trigonométrie
Ordre et valeur absolue

PS1
Fonctions (généralités)
Géométrie dans l'espace
Les nombres
Triangles isométriques
Équations
Statistique descriptive
Nombres premiers
Fonctions (variations, extrema…)
Triangles semblables
Fonctions affines. Inéquations
Vecteurs
Ordre et valeur absolue
Géométrie dans l'espace (Orthogonalité)
Fonctions de référence
Vecteurs, géométrie analytique
Droites et systèmes

PS2
Les nombres
Configurations planes
Ordre dans **R**
Vecteurs et colinéarité
Fonctions : généralités et lecture graphique
Voir et calculer dans l'espace
Statistiques
Géométrie analytique
Calcul littéral et équations
Triangles isométriques et semblables
Fonctions affines
Équations de droites et systèmes
Inéquations et étude de signe
Démontrer dans l'espace
Fonctions carrée et inverse
Fonctions trigonométriques
Simulation

PC2

Période Nombre de semaines	En analyse	En géométrie
1er trimestre		
Sept. 4 sem.	Fonctions, R, calculatrices, Nombres premiers 1 + 2	Configuration du plan et de l'espace 9

Oct. 3,5 sem	Fonctions linéaires et affines 3	Transformations du plan, triangles isométriques et semblables 10
Toussaint		
Nov 3,5	Équations, inéquations, systèmes, tableaux de signes 5	Transformations du plan, triangles isométriques et semblables 10
2e trimestre		
Déc. 3 DC 1	Statistiques 6	Repérage du plan, vecteurs 11
Noël		
Janv. 3,5	Fonctions de références 4	Repérage du plan, vecteurs 11
Févr. 2	Droites et systèmes 12	Géométrie dans l'espace 8
Vacances d'hiver		
Mars 4,5	Simulations d'expériences aléatoires 7	Orthogonalité, distances dans l'espace 8
3e trimestre		
Avril 1 sem.		
Vacances de printemps		
Avril DC n°2	Fonctions trigonométriques et enroulement 4	Synthèse et compléments
Mai	Thèmes et synthèses	Thèmes et synthèses
Juin		

La plupart d'entre elles utilisent une structuration thématique qui suit globalement l'ordre de présentation du programme sur les fonctions et qui scinde l'étude des fonctions en au moins deux parties, généralités sur les fonctions et fonctions de références, mais qui sépare les thèmes algébriques du travail à leur propos[3], le thème « fonctions et formules algébriques » étant absent des programmations.

On voit apparaître là, nous semble-t-il, un point essentiel des difficultés rencontrées : le manque d'articulation des différents composants de l'organisation mathématique mise en place, en raison notamment d'un manque de « fonctionnalisation » de ces différents composants et d'une vision trop thématique du secteur à étudier.

Voici par exemple l'organisation mathématique qu'un élève-professeur de l'IUFM d'Aix-Marseille avait constituée avant d'aborder le secteur des fonctions[4]. Cette analyse se présente sous la forme d'un fichier Excel comportant 3 feuilles : la première détaille les types de tâches et les techniques de l'OMR (organisation mathématique régionale, correspondant au secteur) selon le programme et les ouvrages pour la classe de seconde ; la deuxième, les raisons d'être de l'OM à étudier ; la troisième, une analyse de l'OM relative aux fonctions qui a dû être étudiée au collège et dont on ne parlera pas ici. On trouvera ci-dessous l'analyse de l'OMR à étudier (pour des raisons pratiques, nous présentons « linéairement » ce qui, dans le fichier proposé, figure en deux colonnes) :

T_1 identifier variable et ensemble de définition (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;

τ_1 : courbe: abscisse (x) ; tableau : 1re ligne ou colonne ; formule : variable de la formule (x ou autre) ;

T_{11} : dans quelques rares cas l'ensemble de définition ;

τ_{11} : cas fonction définie par formule: trouver les x pour lesquels on ne peut pas calculer l'image ;
T_2 déterminer l'image d'un nombre (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;

τ_2 : courbe : tracer la verticale passant par ce nombre ; tableau : case correspondante au nombre donné ; formule : remplacer la variable par le nombre.
T_3 décrire comportement d'une fonction définie par courbe…

τ_3 : placer des flèches montantes ou descendantes en lisant la courbe de gauche à droite ; lire les abscisses des points extrémaux et de changement de sens ;
T_{31} : avec tableau variation ;

τ_{31} : placer les flèches dans même ordre que celles de la courbe ; ajouter les abscisses puis les ordonnées des points extrémaux et de changement de sens ;
T_{32} : avec vocabulaire adapté ;

τ_{32} : flèches montantes : fonction croissante (id. décroissante) de … à … (abscisses des points)
T_4 dessiner une représentation graphique à partir d'un tableau de variations ;

τ_4 : placer les points extrémaux et de changement de sens ; relier ces points par un trait continu en suivant les flèches
T_{51} : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto x^2$;

τ_{51} : démontrer croissance sur $\mathbf{R}_+$ et décroissance sur $\mathbf{R}_-$; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;
T_{52} : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto 1/x$;

τ_{52} : démontrer décroissance sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;
T_6 connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$;

τ_6 : connaître la représentation graphique sur $[0 ; 2\pi]$ (savoir calculer les points d'abscisse:0 ; $\pi/2$; π ; $3\pi/2$; 2π et connaître allure) et tracer par périodicité.
T_7 caractériser les fonctions affines par l'accroissement de la fonction est proportionnel à accroissement de la variable
T_8 reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de 2 carrés) ;
T_9 identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ (fonction donnée par une formule) ;
T_{10} reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la plus adaptée (donc savoir anticiper les effets d'une modification d'écriture) : réduite, factorisée; lier l'étude des différentes techniques et traitements envisagés ;
T_{11} modifier, développer, réduire une expression selon l'objectif poursuivi ;
mise en équation ?
T_{12} résoudre une équation ou inéquation se ramenant au 1er degré ;
T_{13} utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ;
T_{14} résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

On notera d'abord que l'OM était en cours de constitution, ce qui peut expliquer par exemple l'absence de l'environnement technologico-théorique, mais que cela donne une bonne idée des aspects problématiques même quand le travail a l'ambition d'être mené au niveau du secteur. On voit en effet apparaître, au delà des quelques maladresses d'analyse du débutant, une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles (dont les blocs technologico-théoriques resteraient à élucider), leur articulation n'étant pas manifeste.

On notera également que certains types de tâches n'en sont pas véritablement, comme par exemple les deux énoncés suivants :

T_{51} établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto x^2$;

τ_{51} : démontrer croissance sur R_+ et décroissance sur R_- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;

T_{52} établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \mapsto 1/x$;

τ_{52} : démontrer décroissance sur R_-^* et sur R_+^* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;

On a en effet à faire ici à deux *tâches*, spécimens du type « établir le sens de variation et représenter graphiquement une fonction donnée par son expression algébrique » qui n'apparaît pas dans l'analyse de l'OM du professeur. En outre, la fonction de ces tâches au sein de l'organisation mathématique étudiée n'est pas élucidée[5].

Des raisons d'être, on l'a dit, sont avancées :

> Optimiser une situation
> Exemple : maximiser une aire, minimiser un coût, …
> Décrire exhaustivement un phénomène
> On peut alors connaître d'autres valeurs, analyser le phénomène, …

Mais, on l'a vu, ces types de tâches ne sont pas reliés aux types de tâches de l'OMR que le professeur a identifiés par ailleurs – ce dont témoigne entre autres l'incertitude liée à la « mise en équation » que manifeste le point d'interrogation.

On pourrait donner de multiples témoignages de ces deux aspects problématiques : manque de fonctionnalisation et vision trop thématique ; nous en donnerons un autre encore, issu de l'observation, en février 2006, d'une séance en classe de seconde sous la responsabilité d'un élève professeur.

À la suite de l'examen du programme par l'ensemble des professeurs de seconde de ce lycée, le secteur des fonctions a été découpé en thèmes associés à des sujets d'étude dont trois ont déjà été étudiés : *les équations* (équations « produits et quotients », mise en équation de problèmes), *généralités sur les fonctions* (notion de « être fonction de… », variable et ensemble de définition, image d'un élément par une fonction, lectures graphiques, fonctions croissantes et décroissantes, maximum et minimum sur un intervalle), *inéquations* (étude de signes d'expressions algébriques) ; un quatrième thème est en cours d'étude : *fonctions de références* (fonctions carrée et inverse).

La définition, le sens de variation et la représentation graphique de la fonction qui à x associe x^2 ont été établis précédemment et il s'agit d'étudier la situation suivante :

> On considère ABCD un rectangle tel que AB = 5 et BC = 3. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle sorte que les longueurs AM, BN, CP et DQ soient égales. Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment AB telle que l'aire du parallélogramme MNPQ inscrit dans le rectangle ABCD soit minimum.

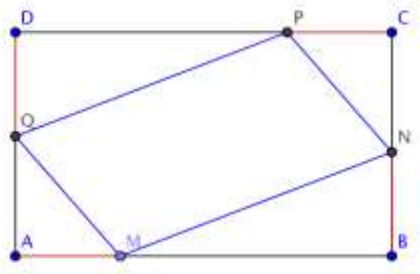


Figure 1

Le travail de la veille a permis d'obtenir que l'aire de MNPQ est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$ où x représente la longueur AM. La séance comporte alors trois grandes étapes :

1. On met en évidence qu’il s’agit de déterminer le minimum de la fonction $\mathcal{A}$ sur [0 ; 3].

2. Une étude expérimentale à l’aide de calculatrices graphiques met en évidence que $\mathcal{A}$ atteint un minimum en 2 qui vaut 7.

3. On prouve analytiquement l’assertion précédente :

   a) en résolvant l’inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$, qui se ramène à la résolution de l’équation $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$;

   b) En résolvant l’équation $\mathcal{A}(x) = 7$. [Cette dernière question a été abordée en classe et laissée à faire pour la séance suivante.]

La résolution de l’inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$ s’effectue de la façon suivante :

$\mathcal{A}(x) - 7 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2) = 2(x - 2)^2$; cette quantité étant toujours positive, on obtient finalement que pour tout $x \in [0 ; 3]$, $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$ ce qui équivaut à pour tout $x \in [0 ; 3]$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$.

En dehors du fait que la technique mise en œuvre dans la classe pour résoudre une inéquation est purement algébrique, la séance soulève une autre question. Les élèves ont déjà étudié le type de tâches « déterminer le minimum d’une fonction » lors de l’étude du thème « généralités sur les fonctions » et la technique qui a été donnée à cette occasion repose sur une lecture graphique de la courbe. Cette première technique peut être justifiée par la définition de la croissance et de la décroissance d’une fonction : en effet, la fonction étant décroissante sur l’intervalle [0 ; 2] on a $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle ; de même la fonction étant croissante sur l’intervalle [2 ; 3], $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle et finalement, sur l’intervalle [0 ; 3], on obtient $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ soit, puisque $\mathcal{A}(2) = 7$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$. Ce qu’il resterait à justifier analytiquement, ce sont les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l’intervalle, nous y reviendrons. Le professeur fait donc émerger dans la séance une autre technique relative au même type de tâches, qui s’appuie dans la partie expérimentale sur la technique vue antérieurement tout en s’en éloignant d’un point de vue technologique puisqu’elle repose sur un travail algébrique.

La motivation de l’apport de la nouvelle technique n’est pas véritablement abordée dans la séance, mais celle-ci apparaît implicitement comme étant mieux justifiée parce qu’elle donnerait la « valeur exacte » du minimum. Pourtant, cette valeur exacte du minimum et de la valeur en laquelle il est atteint ont été conjecturés graphiquement, à partir de la représentation graphique de la fonction, ce qui limite de fait la portée de la technique algébrique[6]. On peut voir là un effet du changement de programme que nous avons commenté plus haut, la tradition d’un travail algébrique autonome gênant son insertion dans le secteur fonctionnel. Pour résoudre les difficultés que nous venons d’évoquer, il faudrait disposer d’une technique de détermination de l’extrémum dont la justification repose sur la théorie des fonctions. Voyons cela.

Si l’on sort un moment des contraintes du programme de seconde, une technique classique pour produire la valeur de l’extrémum d’une fonction du second degré consiste à mettre l’expression sous « forme canonique » de la façon suivante : $2x^2 - 8x + 15 = 2(x^2 - 4x) + 15 = 2[(x - 2)^2 - 8] + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$. Cette expression met alors en évidence le minimum de la fonction, 7, et la valeur en laquelle il est atteint, 2 – la valeur qui annule le terme variable. Cette expression de la fonction permet également de justifier analytiquement les variations de la fonction : la fonction carré étant croissante sur 3_+ et décroissante sur 3_-, la fonction qui à x associe $(x - 2)^2$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 2]$, et il en est donc de même pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2$ puis pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2 + 7$, soit la fonction $\mathcal{A}$.

On le voit, on rejoint là un thème du programme, « fonctions et formules algébriques », à travers les types de tâches « Identifier l’enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est

donnée par une formule », « Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) » et « Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi ». Ce thème permet alors d'unifier les deux techniques précédentes pour déterminer les extrémums d'une fonction sur un intervalle de la façon suivante :
– tracer la courbe de la fonction sur cet intervalle à la calculatrice et établir à partir de cette courbe le tableau de variation de la fonction ;
– justifier les variations de la fonction à partir des variations des fonctions de références, en mettant si nécessaire l'expression algébrique de la fonction sous une forme adaptée ;

en particulier, dans le cas d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, mettre l'expression sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$; dans le cas d'une fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, mettre l'expression sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{cx+d}$;

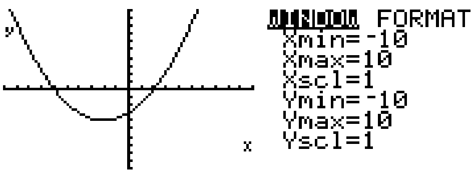
– donner alors les inégalitésTapez une équation ici. à justifier et utiliser la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction pour les justifier.

Il reste encore à régler le problème de la mise en place d'une technique permettant de mettre les expressions du second degré sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. On donnera ci-dessous les éléments d'une telle technique en la mettant en œuvre sur deux spécimens, sans aborder ici la question de sa mise en place.

$h : x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right) x^2 + x - 3.$

Partie expérimentale

Représentation graphique de la fonction



Tables de valeurs

X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

X= -5

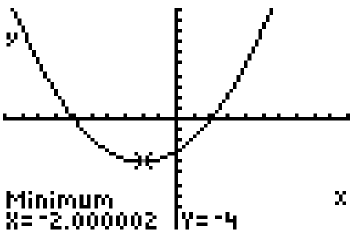
X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

Y1 = -3.75

X	Y1
-2.3	-3.978
-2.2	-3.99
-2.1	-3.998
-2	-4
-1.9	-3.998
-1.8	-3.99
-1.7	-3.978

Y1 = -4

Détermination graphique du minimum



La fonction est décroissante sur]–∞ ; –2] et croissante sur [–2 ; +∞[. Elle admet un minimum en –2 qui vaut –4.

Elle se met sous la forme $\left(\frac{1}{4}\right)(x+2)^2-4$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=(1/4)*X^2+X-3
Y2=(1/4)*(X+2)^2
-4
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	Y2
-3	-3.75	-3.75
-2.5	-3.938	-3.938
-2	-4	-4
-1.5	-3.938	-3.938
-1	-3.75	-3.75
-.5	-3.438	-3.438
0	-3	-3

X= -3

Preuves :

1. On a $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Donc $\frac{1}{4}(x + 2)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ et finalement $\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 4 \quad = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$.

2. On considère $a \leq b \leq -2$. On a alors $a + 2 \leq b + 2 \leq 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on obtient que $(a + 2)^2 \geq (b + 2)^2 \geq 0$ et donc $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 \geq 0$, soit finalement $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 - 4 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 - 4 \geq -4$. La fonction est ainsi décroissante sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geq -4$

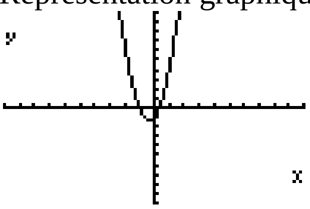
3. On considère $a \geq b \geq -2$. On a alors $a + 2 \geq b + 2 \geq 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +[\infty$, on obtient que $(a + 2)^2 \geq (b + 2)^2 \geq 0$ et donc $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 \geq 0$, soit finalement $(\frac{1}{4})(a + 2)^2 - 4 \geq (\frac{1}{4})(b + 2)^2 - 4 \geq -4$. La fonction est ainsi croissante sur $[-2, +\infty[$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geq -4$.

4. On a ainsi pour tout x, $h(x) \geq -4$ et -4 est le minimum de h. Comme $h(-2) = -4$, et il est donc atteint pour $x = -2$.

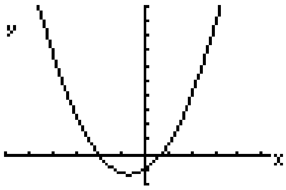
g : $x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$;

Partie expérimentale

Représentation graphique :



```
WINDOW FORMAT
 Xmin=-10
 Xmax=10
 Xscl=1
 Ymin=-10
 Ymax=10
 Yscl=1
```



```
WINDOW FORMAT
 Xmin=-3
 Xmax=3
 Xscl=.5
 Ymin=-2
 Ymax=10
 Yscl=
```

Tables numériques

Pas de 1

X	Y1
-10	279
-9	224
-8	175
-7	132
-6	95
-5	64
-4	39

X= -10

X	Y1
-3	20
-2	7
-1	0
0	-1
1	4
2	15
3	32

X=3

X	Y1
4	55
5	84
6	119
7	160
8	207
9	260
10	319

X=10

On voit que l'extrémum est atteint entre -1 et 1 ; pas de 0,1 à partir de -1 :

X	Y1
-1	0
-.9	-.37
-.8	-.68
-.7	-.93
-.6	-1.12
-.5	-1.25
-.4	-1.32

X= -1

X	Y1
-.4	-1.32
-.3	-1.33
-.2	-1.28
-.1	-1.17
0	-1
.1	-.77
.2	-.48

X=.2

L'extrémum est atteint entre –0,4 et –0,2 ; pas de 0,01 :

X	Y1
-.4	-1.32
-.39	-1.324
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	-1.333

Y1= -1.3325

X	Y1
-.4	-1.32
-.39	-1.324
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	-1.333

Y1= -1.3332

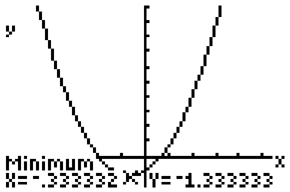
X	Y1
-.39	-1.324
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	-1.333
-.33	-1.333

Y1= -1.3333

X	Y1
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	-1.333
-.33	-1.333
-.32	-1.333

Y1= -1.3328

Détermination graphique du minimum (calc – minimum)



La fonction est décroissante sur $]-\infty\ ; -\frac{1}{3}]$ et croissante sur $[-\frac{1}{3}, +\infty[$; elle admet un minimum en $-\frac{1}{3}$qui vaut $\frac{4}{3}$.

Elle se met sous la forme $3(x + 1/3)^2 - 4/3$, ce que l'on vérifie :

```
Y1■3*(X+1/3)^2-4
/3
Y2■3*X^2+2*X-1
Y3=■
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

X	Y1	Y2
-3	20	20
-2.5	12.75	12.75
-2	7	7
-1.5	2.75	2.75
-1	1E -13	0
-.5	-1.25	-1.25
0	-1	-1

X= -3

On notera que la table fournit une valeur approchée de Y1 en -□1.

Preuves :

1. $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = 3\left(x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}\right) - \frac{4}{3} = 3x^2 + 2x - 1$.

2. On considère $a \leq b \leq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \leq b + 1/3 \leq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur l'intervalle$]-\infty\ ; -\frac{1}{3}]$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

3. On considère $a \geq b \geq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \geq b + 1/3 \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $[0\ ; \infty[$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[-\frac{1}{3}\ ; \infty[$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

4. On a donc $g(x) \geq -4/3$ sur 3, ce qui prouve que g admet un minimum qui vaut $-4/3$; il est atteint pour $x = -1/3$, puisque $g(-1/3) = -4/3$.

On obtient ainsi des techniques compatibles avec ce que demande le programme tout en liant de manière fonctionnelle le travail algébrique et l'étude des fonctions : cela prépare les élèves aux techniques qui seront étudiées dans les classes ultérieures du lycée et leur donne la possibilité d'accomplir ce type de tâches dans sa totalité ou, du moins, d'avoir prise sur l'ensemble de la technique et de sa justification si l'on fait le choix d'une *technique coopérative*.

Ces techniques font également apparaître de manière lisible *une raison d'être de l'étude qualitative* des fonctions : on constitue pour l'essentiel la *base expérimentale* qui va permettre de faire surgir les premiers éléments de la théorie des fonctions, de la même manière que le travail à partir de figures permet de faire surgir des éléments de la théorie géométrique. La position relative des deux techniques, source de difficultés dans la séance en classe évoquée plus haut, trouve alors une solution semblable à celle adoptée en géométrie : on ne doute pas à l'issue de l'expérimentation graphique que le minimum de la fonction d'aire est 7, atteint en 2, de la même façon qu'une expérimentation graphique convainc qu'un triangle de côtés (3, 4, 5) est rectangle ; on a là deux faits avérés, l'un numérique et l'autre géométrique. Il reste cependant, pour faire œuvre de mathématicien, à vérifier que l'on peut les déduire de la théorie fonctionnelle disponible (TFD) ou de la théorie géométrique disponible (TGD) : si cela n'était pas le cas, il faudrait travailler à augmenter la théorie des ingrédients pertinents (éventuellement lors d'une année d'étude ultérieure, comme cela sera le cas de quelques types de fonctions pour lesquelles on en restera, en seconde, à la conviction expérimentale).

Scinder fortement l'étude qualitative des fonctions de celle des fonctions de référence, comme le veut actuellement une norme dominante dans la profession, constitue donc un obstacle pour faire entendre le travail d'élaboration théorique en cours de constitution, ainsi qu'en témoigne par exemple la question suivante posée par un élève professeur ayant en responsabilité une classe de seconde, lors de la 20e séance de formation de l'année 2007-2008 :

> Les élèves de la classe de 2de que j'ai en responsabilité ont énormément de mal à s'exprimer clairement. Surtout sur le thème des fonctions, ils mélangent les notions appartenant au domaine fonctionnel avec celles appartenant au domaine graphique. Je pense pourtant le répéter souvent et bien faire la distinction. Que pourrais-je faire ?

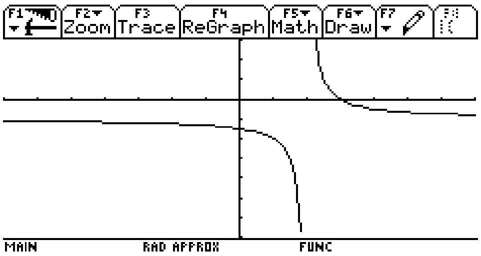
Les techniques que nous venons de développer font en outre apparaître que les tâches T_{51} et T_{52} (qu'il faudrait noter t_{51} et t_{52}) rencontrées précédemment dans l'OMR découpée par l'élève professeur, ont une *fonction technologique* puisqu'elles permettent de justifier et/ou de produire une technique de détermination des variations de certaines fonctions (les fonctions polynômes du second degré dans le premier cas et les fonctions homographiques dans le second) par un « enchaînement de fonctions ».

Cette « fonctionnalisation » de l'enchaînement de fonctions et du sens de variation des « fonctions de référence » n'est pas anecdotique. C'est cela, on l'a vu, qui permet de fabriquer des techniques relatives aux types de tâches algébriques dont la justification repose sur la théorie des fonctions. On en donnera encore deux exemples.

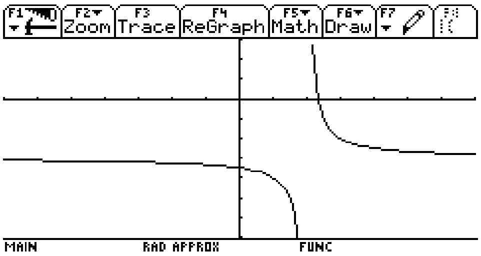
Soit par exemple à résoudre l'équation $\frac{3x+2}{x-4} = 5$; la mise en évidence de la forme $3 + \frac{14}{x-4}$ et de l'enchaînement de fonctions qu'elle matérialise permet de produire une technique efficace, qui sera notamment utile pour minimiser les erreurs de calcul ou encore calculer « de tête » :

$x \to X = x$-4 → Y = $\frac{14}{X}$ → Z = 3+Y → ; donc $\frac{3x+2}{x-4} = 5$ équivaut à Z=5, soit encore à , puis à , soit encore à Y= Z-3 = 2 puis à X = $\frac{14}{Y} = 7$ soit encore à x = X+4 = 11.

Soit maintenant à résoudre l'inéquation $\frac{x-3}{2-x} \leq 2$. On pose $h(x) = \frac{x-3}{2-x} - 2$ et $g(x) = \frac{x-3}{2-x}$: il s'agit donc de résoudre $h(x) \leq 0$.



Représentation graphique de g (pas de 1).

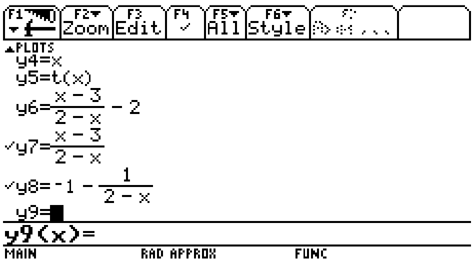


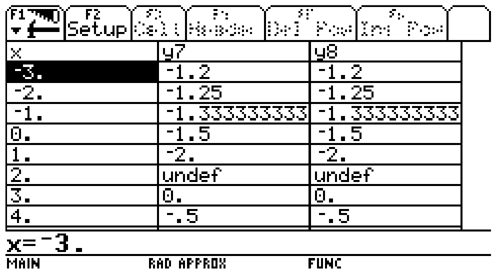
Représentation graphique de h (pas de 1).

On notera que la détermination graphique des solutions de l'équation $h(x) = 0$ (et, partant, de l'inéquation $h(x) \leq 0$) n'est pas immédiate.

Par ailleurs, en supposant que l'on peut mettre $g(x)$ sous la forme $-1 + \frac{k}{2-x}$, comme $g(1) = -2$ on obtient $k = -1$ et finalement $h(x) = -3 - \frac{1}{2-x}$.

Vérification :





x	y7	y8
-3.	-1.2	-1.2
-2.	-1.25	-1.25
-1.	-1.333333333	-1.333333333
0.	-1.5	-1.5
1.	-2.	-2.
2.	undef	undef
3.	0.	0.
4.	-.5	-.5

x=-3.

Preuves : $-1 - \frac{1}{2-x} = \frac{-(2-x)-1}{2-x} = \frac{-3+x}{2-x}$; donc $h(x) = -1 - \frac{1}{2-x} - 2 = -3 - \frac{1}{2-x}$.

Quand x est inférieur à 2, alors $2 - x \geq 0$ et h est donc négative.

Quand $x > 2$, la fonction h est décroissante :

$2 < x < x' \Rightarrow 2 - x > 2 - x' > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2-x} < \frac{1}{2-x'}$ puisque la fonction inverse est décroissante sur [3 ; ∞[

$\Rightarrow h(x) > h(x')$

La résolution de l'équation donne alors que $h(x) = 0$ équivaut à $\frac{1}{2-x} = -3$ soit encore à et, enfin, à $2-x = -\frac{1}{3}$. La décroissance de h prouve alors que :

$x > 2$ et $h(x) \leq 0$ équivaut à $x \geq \frac{7}{3}$.

On peut alors proposer une recomposition de l'organisation mathématique régionale à propos des fonctions, dont les types de tâches soient articulés à partir de deux raisons d'être[7], les types de tâches « coches » T et T', avec un environnement technologico-théorique composé pour l'essentiel de résultats de la théorie des fonctions. Nous en donnerons ci-dessous une armature possible en termes de types de tâches, établie en organisant ces derniers selon leur *apparition possible* lors de la *mise en œuvre de la technique* permettant d'accomplir les types de tâches coches proposés, en restant volontairement proche de l'OMR proposée par l'élève-professeur.

T : Optimiser une grandeur, g_1
Exprimer une grandeur en fonction d'une autre grandeur attachée au système $g_1 = f(g_2)$
Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f
Déterminer les extrémums d'une fonction
Déterminer les variations d'une fonction f sur son ensemble de définition
Si f est donnée par sa courbe représentative, établir le tableau de variation
Si f est donnée par une formule,
Tracer la courbe représentative d'une fonction et établir son tableau de variation
Mettre l'expression d'une fonction sous une forme adaptée
Mettre en évidence un enchaînement de fonctions
Exprimer la croissance ou la décroissance d'une fonction par une inégalité
Déterminer la valeur d'une fonction en un point (bornes de l'ensemble de définition, extrémums notamment)

T': Étudier un phénomène
Déterminer une loi permettant de rendre compte d'un phénomène
Montrer qu'un phénomène est modélisable par une fonction affine
Montrer qu'un phénomène n'est pas modélisable par une fonction affine
Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$
Se ramener à la résolution de l'équation $f(x) - g(x) = 0$
Résoudre une équation du type $f(x) = 0$
Mettre l'expression d'une fonction sous une forme adaptée.
Mettre en évidence un enchaînement de fonctions
Résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$
Se ramener à la résolution de l'équation $f(x) - g(x) < 0$
Résoudre une inéquation du type $f(x) < 0$
Résoudre une équation $f(x) = 0$
Déterminer les variations d'une fonction f
Exprimer la croissance ou la décroissance d'une fonction par une inégalité

La constitution d'une organisation mathématique de ce type suppose que l'on rompe avec la présentation du programme et que l'on pense le travail thématique fonctionnalisé par le ou les types de tâches coche(s) du secteur. Ce phénomène, que le secteur des fonctions en seconde met exemplairement en évidence, vaut sans doute pour les autres secteurs même si les ruptures avec les normes de la profession peuvent paraître moins vives.

Références

Artaud, M. & Jullien, M. (2008). *Séminaire de formation des professeurs stagiaires de mathématiques, année 2007-2008*. Marseille : IUFM d'Aix-Marseille. Disponible sur Internet :

http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/seminaire8.html [réf. 29 septembre 2008].

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.* In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Ed.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, 2007, pp. 705-746. Disponible sur l'Internet : http://yves.chevallard.free.fr [réf. 29 septembre 2008].

MEN[8]. 1990. Programmes de la classe de seconde générale et technologique. Paris : CNDP.

MEN. 2001. Programmes de la classe de seconde générale et technologique. BO hors série n°2 du 30 août 2001. Disponible sur l'Internet :

http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs2/default.htm [réf. 29 septembre 2008].

MEN. 2000. Mathématiques – Classe de seconde. Paris : CNDP. Collection Lycée, série Document d'accompagnement des programmes. Disponible sur l'Internet : http://www.cndp.fr/archivage/valid/14963/14963-8208-9261.pdf [réf. 29 septembre 2008].

1. Sur les notions d'organisations mathématiques et de thèmes et de secteurs, voir par exemple Chevallard 2007.

2. Un *milieu* (« adidactique ») est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention (« didactique ») dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite à telle question déterminée : il se comporte à cet égard comme un fragment de « nature ». En théorie anthropologique du didactique, la notion de milieu fait couple avec la notion de *média* : on nomme média tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public. Pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, le caractère de milieu ou de média n'est nullement intrinsèque : il dépend de la question que l'on pose au système et de la manière de la lui poser.

3. Dans la programmation thématique PS1, on note que l'un des thèmes proposés, « Fonctions affines. Inéquations », regroupe, dans un cas particulier, le travail sur les fonctions et le travail algébrique de résolution d'inéquations.

4. Ce document a été communiqué au mois de novembre 2007 pour servir de point d'appui dans le Séminaire de formation au travail d'une question posée par un élève professeur. Voir Artaud et Jullien 2008.

5. Ces tâches font partie de l'organisation de l'étude. Elles permettront de constituer une partie de l'environnement technologico-théorique de l'OMR. Cela souligne l'intérêt de mener d'emblée le travail d'analyse sur l'OM dans son ensemble.

6. On ajoutera en outre que la technique algébrique qui vit actuellement le plus souvent dans les classes de seconde permet généralement de produire la valeur du minimum à condition que soit donnée la forme canonique de la fonction du second degré.

7On pourrait sans doute unifier l'OMR sous l'égide d'un seul type de tâches, voire encore y intégrer au moins une partie du secteur du calcul, mais nous avons fait le choix de rester le plus proche possible de la proposition initiale de l'élève professeur.

8. Ministère de l'éducation nationale.