Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée

Dominique Baroux

Groupe IREM de Paris 7

Résumé

Dans cette communication, nous présenterons la brochure IREM qui vient de paraître et nous nous attarderons sur plusieurs points illustrés d'exemples et qui seront l'occasion de débat.

- Deux des moments clefs de l'activité mathématique concernant la démarche expérimentale : le moment de la conjecture et le moment de la preuve.
- Les conditions qui nous semblent nécessaires pour garantir une démarche expérimentale constructive pour les élèves, intégrant les nouvelles technologies, et qui ne soit pas dénaturée.
- L'évaluation des élèves au cours de ces activités d'investigation.
- La gestion de classe propre à ce type d'activités avec un bref aperçu des problèmes à prendre en compte.

Nous présenterons un exemple de formation continue sur le thème de la démarche expérimentale.

Le texte présenté ci-dessous est largement inspiré de la brochure IREM n°94 parue en mai 2010, dont les auteurs sont les membres du groupe « Démarche expérimentale et TICE » : F. Vandebrouck, D. Baroux, G. Bonal, S. Galland, M. Guignard, F. Hérault, G. Marbeuf, C. Petitjean, B. Yvert.

I. Généralités

1. Présentation du groupe.

Les programmes de mathématiques donnent depuis quelques années une importance à la dimension expérimentale des mathématiques, mais cette démarche n'est pas vraiment explicitée dans les textes institutionnels.

Cette importance trouve son aboutissement dans la mise la mise en place au printemps 2007 dans certains établissements, d'une expérimentation d'une épreuve expérimentale de mathématiques au baccalauréat. C'est à la suite de cette mise en place que s'est créé notre groupe IREM. La brochure est rédigée après trois ans de fonctionnement du groupe et la réalisation d'un stage de formation au cours de l'année 2009-2010, dans le cadre du PAF des trois académies de l'Ile de France.

2. La dimension expérimentale

La question de savoir si les mathématiques possèdent une dimension expérimentale reste aujourd'hui encore ouverte et d'actualité. Dans l'article de P. Lombard « les méthodes expérimentales en géométrie » paru en 2008 dans la revue *Repère IREM* on peut lire que « expérimenter, c'est vérifier des hypothèses ». Pour lui, le travail du scientifique, et donc sans doute du mathématicien, se résume plutôt à « avoir une idée » et « vérifier expérimentalement si elle marche ».

Au contraire, D. Perrin (2007) décrit la démarche expérimentale par « expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuves, production éventuelle de contre exemples etc … ». Autrement dit, expérimenter pourrait être commencé par des cas particuliers, sans avoir d'hypothèse ou de conjecture en tête. Cela ne correspond pas à la démarche expérimentale dans les autres sciences mais plutôt à une démarche d'investigation.
Les caractéristiques de cette démarche n'ont pas été complètement clarifiées, mais vu la forte incitation institutionnelle il nous a paru nécessaire de nous interroger sur sa transposition dans l'enseignement des mathématiques et sur la spécificité des technologies dans cette démarche.

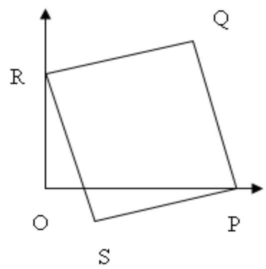
3. Transposition dans l'enseignement des mathématiques

En essayant de caractériser la démarche expérimentale dans l'enseignement des mathématiques, nous nous sommes mis d'accord sur des temps forts à organiser pour l'élève :
* Formuler un problème (se questionner, modéliser, se documenter, …),
* Expérimenter (réaliser, tester, observer…),
* Conjecturer,
* Tester la conjecture (éprouver, évaluer…),
* Prouver,
* Communiquer…
Parmi ces moments, deux semblent devoir attirer notre attention : le moment de la conjecture et le moment de la preuve.

4. Le moment de la conjecture

Le moment de la conjecture nous est apparu essentiel dans la démarche expérimentale. Nous avons établi un certain nombre de conditions afin que ce moment puisse vivre dans l'enchaînement des différents moments :
* Une première conjecture naïve qui peut être fausse, être invalidée et peut enclencher la recherche d'une nouvelle conjecture.
* Une rétroaction directe sur la conjecture formulée (validation, falsification)
* Une conjecture pas trop évidente qui demande du coup une démonstration.
Un problème type où on retrouve une conjecture pas évidente est un problème de lieu de points.
En voici un exemple que l'on peut proposer à des terminales S. Il s'agit d'un TP où, sans logiciel de géométrie dynamique, il est, pour la grande majorité des élèves, pratiquement impossible de conjecturer le lieu du point S. Il y a un va et vient intéressant entre la recherche « papier-crayon » et la démarche expérimentale : pour construire le carré, il est nécessaire, « en papier-crayon » d'analyser la situation mais, une fois celui-ci créé, c'est l'expérience à l'aide du logiciel qui va permettre la conjecture concernant le lieu du point S. Enfin, c'est de nouveau en « papier-crayon » que se fera la démonstration.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$
P est un point du demi-axe [0x) et R un point du demi-axe [oy) tels que :
OP + OR = a où a est un réel strictement positif donné. On construit le carré direct PQRS. Le but de ce module est de démontrer que le point Q est fixe et de trouver le lieu du point S lorsque P et R se déplacent sous la condition indiquée.



Démarche expérimentale

Pour répondre expérimentalement au problème posé, vous allez utiliser le logiciel Geogebra.

1. **Réalisation de la figure** : Lancer l'application Géogébra

   - **On prendra a = 5 .** Créer un curseur p.(p variant de 0 à 5). Placer le point P mobile sur [0 ;5]
   - Placer le point R
   - Tracer le carré PQRS. Indiquez votre méthode de construction.

Appelez l'examinateur.

2. **Expérimentation**
   - Afficher la trace de S et faîtes varier le point P.

Appelez l'examinateur.

3. **Conjecture**
   - Quel semble être le lieu du point S quand P varie ?
   - Imaginez une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.

Appelez l'examinateur.

Recherche d'une démonstration

On appelle p l'affixe de P. On a OP = p, p décrit l'intervalle [0 ; a]

1. a) Quelle est l'affixe de R ?

b) Prouvez, par le calcul, que l'affixe q de Q ne dépend pas de p. (on pourra utiliser un quart de tour de centre Q)

c) Précisez la position de Q par rapport aux points « limites » P_0 et R_0 tels que :

$$OP_0 = OR_0 = a$$

2. Démontrer que l'affixe s de S s'exprime sous la forme $s = \left(p - \frac{a}{2}\right)(1 - i)$
3. a) Déduisez-en les coordonnées de S en fonction de p et a.
   b) Démontrer que S décrit un segment lorsque p décrit l'intervalle [0 ;a]

5. Impact de la technologie

Les technologies semblent potentiellement intéressantes pour permettre aux élèves des activités de conjectures, qu'il ne leur serait pas possible de développer dans l'environnement traditionnel. Cependant les nouvelles représentations véhiculées parles technologies, affectent l'activité mathématique des élèves et notamment la manière dont ils conceptualisent les notions, pouvant amener par là-même à des conjectures erronées.

6. Le moment de la preuve

Ce deuxième moment ne va pas de soi pour les élèves, ni même pour certains mathématiciens. Citons Delahaye (2005), qui prend en compte explicitement les technologies dans son discours. Il explique que la démarche expérimentale avec des

technologies, cela peut être « trouver des contre exemples qui falsifient les conjectures ». Autrement dit, selon lui, confirmer ou infirmer des conjectures avec des technologies est possible, tout comme valider des démonstrations, et « la plus grande certitude mathématique n'est pas forcément atteinte par les démonstrations habituelles ». Cela peut choquer mais n'y a-t-il pas un paradoxe à accepter de certaines technologies qu'elle nous donnent effectivement des résultats mathématiques – pensons à une calculatrice bas de gamme qui nous donne le résultat d'une multiplication – et à refuser dans l'enseignement certains résultats de nouvelles technologies plus sophistiquées – un lieu de points donné par un logiciel de géométrie dynamique, une limite de suite donnée par un logiciel de calcul formel ? Dans notre cadre d'enseignement avec des élèves, convenons que ce moment de la démarche est important et qu'il convient pour le professeur de ne pas le négliger. Duvernay (2007) explique que : « le deuxième inconvénient de la démarche expérimentale avec des technologies (le premier étant que ça prend du temps, forcément sur quelque chose d'autre) c'est que l'insistance sur l'aspect expérimental des mathématiques et l'usage de l'ordinateur pour « voir » ne conduise une grande partie des élèves à une conception faussée de ce que sont les mathématiques et des conditions de leur efficacité (que certains trouvent déraisonnables, on ne sait pourquoi).
Il ne faut donc pas nier que des questions, pour le professeur, tournent autour de la nécessité de preuve mathématique des conjectures émises et sur le fait que bien souvent les élèves ne ressentent pas la nécessité de conclure la démarche expérimentale par une preuve.

7. Conclusions

Les réflexions dans notre groupe IREM nous ont amené à poser des conditions qui sembleraient nécessaires pour garantir une démarche expérimentale qui ne soit pas dénaturée et qui permettent une activité intégrant les technologies.
- des sujets épurés, facilement compréhensibles et appropriables par tous pour permettre la mise en activité de chacun des élèves, sans une aide préalable dès le début des enseignants ;
- une conjecture qui dans ces sujets ne s'impose pas d'elle-même ou du moins qui ne peut-être que partiellement mise en évidence par l'exploration sur le logiciel, et donc qui appelle un travail papier crayon pour être complétée ;
- enfin un travail exploratoire et un travail dans l'environnement papier-crayon qui se renvoient l'un l'autre au sens où la partie exploratoire guide et aide pour prouver en papier crayon la conjecture et la compléter et où, en retour, le résultat du travail en papier crayon peut être validé par une vérification sur le logiciel.

Nous sommes conscients que ces trois conditions sont difficiles à mettre en pratique et qu'elles ne garantissent pas à elles seules une activité mathématique de type expérimental. On prendra cependant ces conditions comme une aide pour nous en approcher.