Algorithmes géométriques selon le nouveau programme de Mathématiques pour la classe de Seconde

Ruben Rodriguez Herrera
IUFM de Basse-Normandie

Résumé :

Dans l'atelier nous vous proposons de travailler sur des activités permettant aux élèves de la classe de seconde d'investir les capacités, attitudes et connaissances géométriques travaillées jusqu'à la fin du collège, pour résoudre de constructions et aborder une forme de « pensée algorithmique ».
1° Algorithmes de construction utilisant seulement les tracés « milieu de deux points » et «droite passant par deux points ».
2°Algorithme d'Euclide dans l'Univers de la géométrie ainsi que dans l'univers de l'arithmétique.

I) PGCD de deux entiers Algorithme d'Euclide dans l'Univers de la géométrie ainsi que dans l'univers de l'arithmétique

Partie I Du rectangle au carré

Phase1

On propose aux élèves de réaliser les constructions à la règle, à l'équerre et au compas sur une feuille et simultanément sur l'ordinateur à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. (Voir exemple 1). La suite d'instructions donnée par l'enseignant est :
Tracer l'arc de cercle de rayon C1B de centre le sommet C1, jusqu'à couper le segment [DC1] en C2 Tracer la droite qui passe par C2 et est perpendiculaire à (AC1), cette droite perpendiculaire coupe le côté [AB1] en B2
Compléter le quadrilatère B1C1C2B2.

Différenciation :

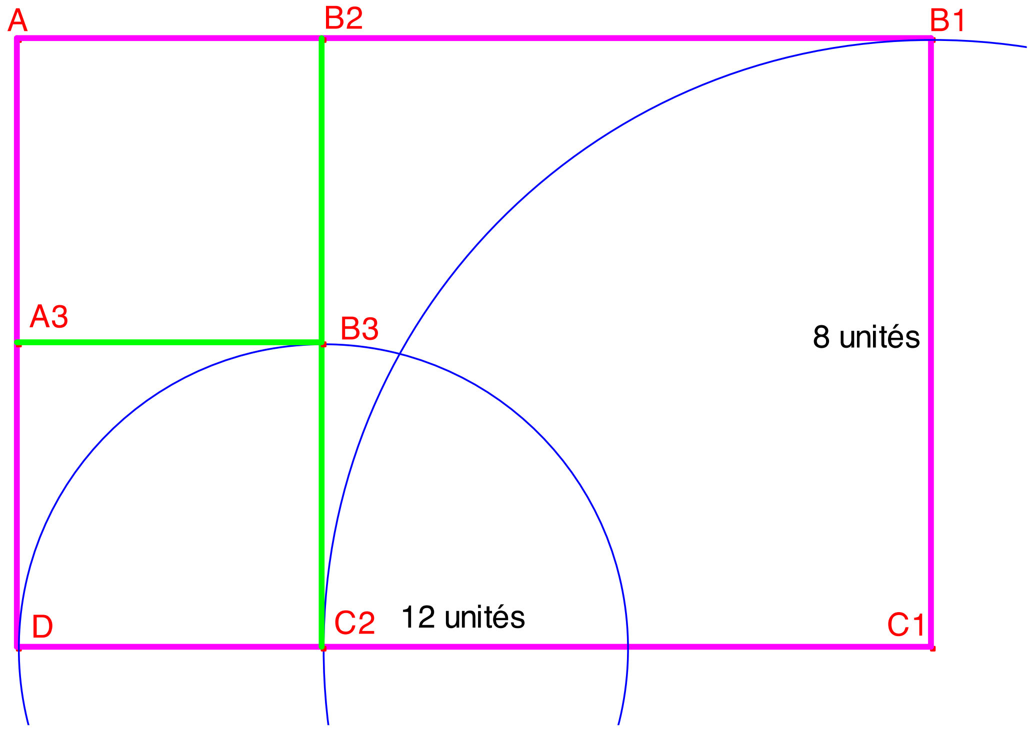
On peut les autoriser à réaliser les construction seulement sur une feuille quadrillée et prendre comme unité le bord du « petit carré » de la feuille. De même, si certains élèves veulent se contenter seulement des constructions sur feuille on peux les y autoriser, mais il faut les encourager à utiliser les logiciels, (les élèves en général aimant bien cet univers géométrique).

Compétence 3
Géométrie
Connaître et représenter des figures géométriques. Utiliser leurs propriétés.
Effectuer des constructions simples en utilisant :
Des outils (instruments de dessin, logiciels)
Des définitions, des propriétés
Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer

Ici les élèves doivent justifier que la construction de chaque étape est bien à chaque fois un carré. Les argumentations des élèves doivent aboutir à démontrer qu'il s'agit bien d'un quadrilatère qui

a Ses quatre angles droits (rectangle) et qui a deux côtés consécutifs de même longueur. Donc c'est un carré.
A partir des échanges oraux on met en avant les affirmations qui découlent de la construction même : angles droits en B1, en C1, en C2 et l'égalité des longueurs C2C1 = C1B1 et les déductions : angle droit en B2 puis le quadrilatère B1C1C2B2 est un carré.

Exemple 1 A partir d'un rectangle de dimensions : 8 et 12 c'est le cas où PGCD (8 ;12) = 4 On ne mentionne pas encore le PGCD. On reste dans le champ géométrique et on demande aux élèves de décrire la nature des figures obtenues et de justifier cette nature.



Compétence 3
Décrire le comportement d'une grandeur : l'élève est capable de quantifier dans des cas simples, à partir d'une observation d'une série de mesures, le comportement d'une grandeur

Ici il s'agit de modéliser le comportement des étapes de cette construction « Psychomorphisme » avec l'univers arithmétique

Nous allons à partir de cette structure géométrique et l'expérimentable ainsi dégagé par les élèves leur proposer d'établir une correspondance morphique avec un univers arithmétique qui formalise la structure de la division euclidienne et quelques propriétés des diviseurs et des multiples, en particulier le PGCD. Ceci est encore un exemple de notre principe des « psychomorphismes » mis en évidence au cours de nos recherches sur l'apprentissage et qui affirme que « tout apprentissage se construit par la mise en correspondance entre deux univers structurés avec leurs formalisations propres, mais qui correspondent à un même univers des actions directement expérimentables par l'élève. Ici l'univers expérimentable est celui des actions de construction, et on a deux formalisations : L'une dans l'univers des propriétés géométriques énoncées et articulées lors d'un discours explicatif de l'élève et l'autre dans l'univers arithmétique articulé par le langage symbolique numérique et par le discours explicatif de l'élève.

Nous avons ici une formalisation possible :

Etape 1
Aire du rectangle initial 8 x 12
Aire du premier carré 8 x 8, nombre de carrés 1
Aire du deuxième rectangle qui reste après la « soustraction géométrique »
8x12- 8x8= 8x4
Les élèves peuvent écrire ceci de deux façons différentes
Soit 96 -64 = 32 ou bien 8(12 -8) =8 x 4
La deuxième formalisation est bénéfique car elle renforce l'apprentissage de la distributivité.

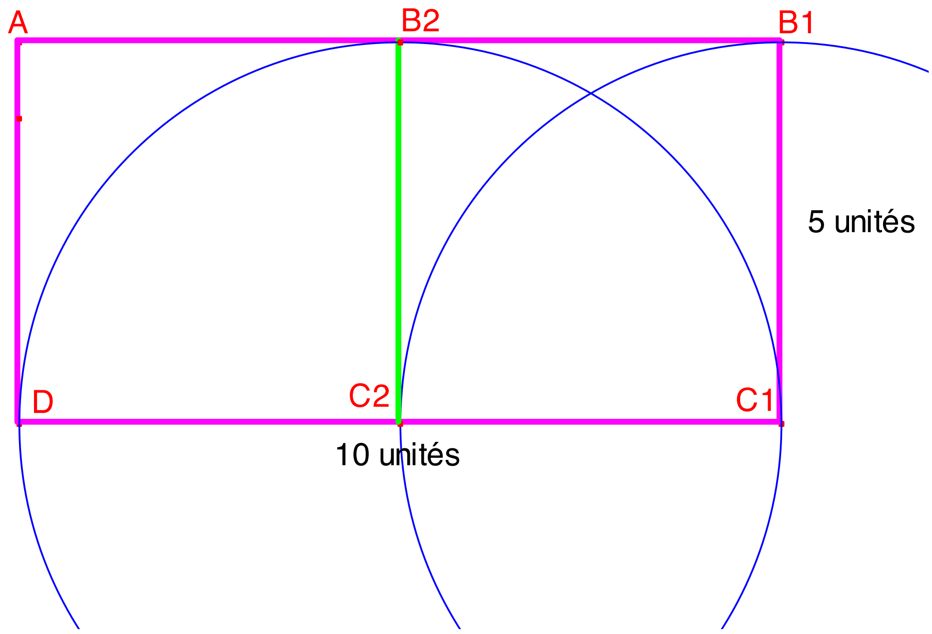
Etape 2
Aire du deuxième rectangle 8 x 4
Aire du deuxième carré 4 x 4 ; nombre de carrés 2
Aire qui reste après la « soustraction géométrique »
8x4 - 2x 4x4 =32–32=0

On propose aux élèves de formaliser la structure géométrique qui se dégage de la procédure dans l'univers de l'arithmétique. Au départ on a un rectangle 8 x 12, on observe le plus petit des deux nombres qui est 8 puis on s'intéresse au nombre 8 au carré noté : 82. On compte combien de fois 82 rentre au maximum dans 8 x12. Ceci reviens, pour les élèves, en observant la disposition géométrique de la figure, à se poser la question plus simple : « combien de fois 8 rentre-t-il dans 12 ? ».
Il reste un rectangle de 8 x 4 et on recommence la procédure : 4 est le plus petit des nombres 4 et 8, on se pose alors à nouveau la question : combien de fois 42 rentre-t-il dans 4 x 8, ce qui reviens à se poser la question : combien de fois 4 rentre-t-il dans 8 ? On arrête alors car la « soustraction géométrique » nous indique que la surface qui reste est nulle. Ce qui s'écrit 8 – 2 x 4 = 0.

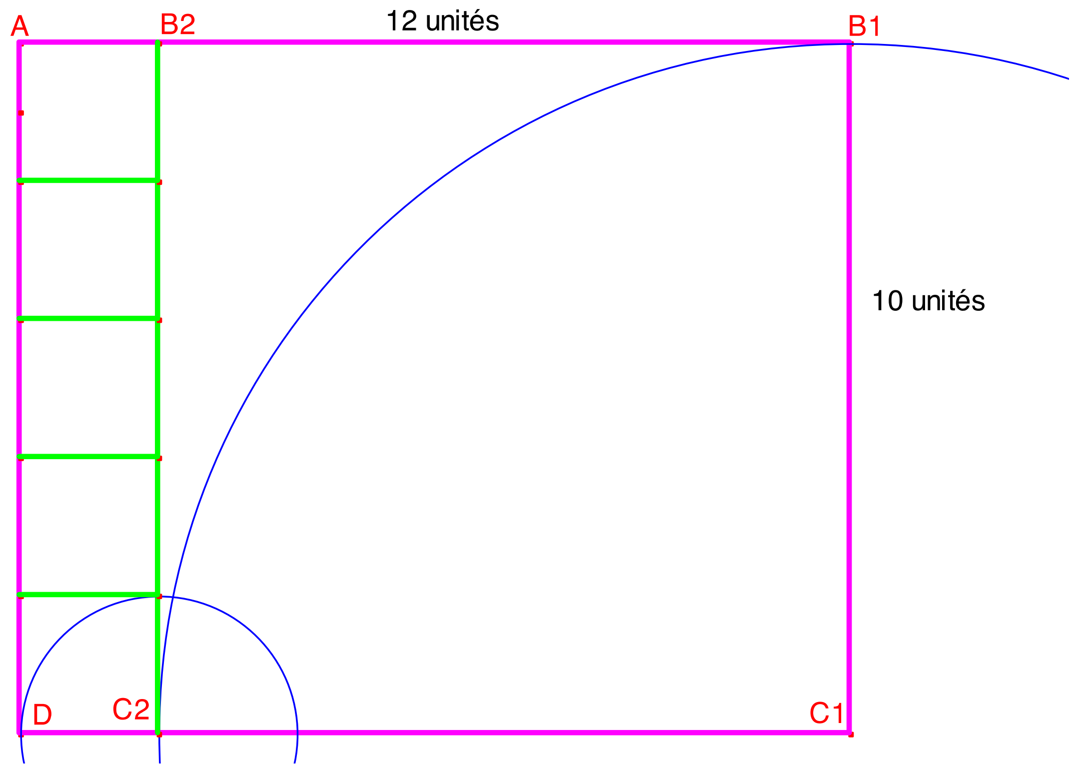
Phase 2
Après quelques exemples utiles, on constate qu'on obtient au bout de quelques itérations un carré de dimension entière : le PGCD de deux entiers (donnés par la largeur et la longueur du rectangle initial). Après le traitement de quelques cas différents (mais avec le même algorithme de construction) où le professeur ne suggère pas la notion de PGCD, on invite les élèves à modéliser les constructions dans un univers arithmétique.

Remarque : Cette suite d'étapes sera proposée à chaque exemple, ainsi on renforce à travers le travail de nos élèves leurs connaissances et compétences citées précédemment. Nous mettons, dans les exemples qui suivent l'accent sur le fait qu'on arrive toujours par cet algorithme géométrique à obtenir un carré final.
Nous invitons nos élèves à expliquer cette conclusion.

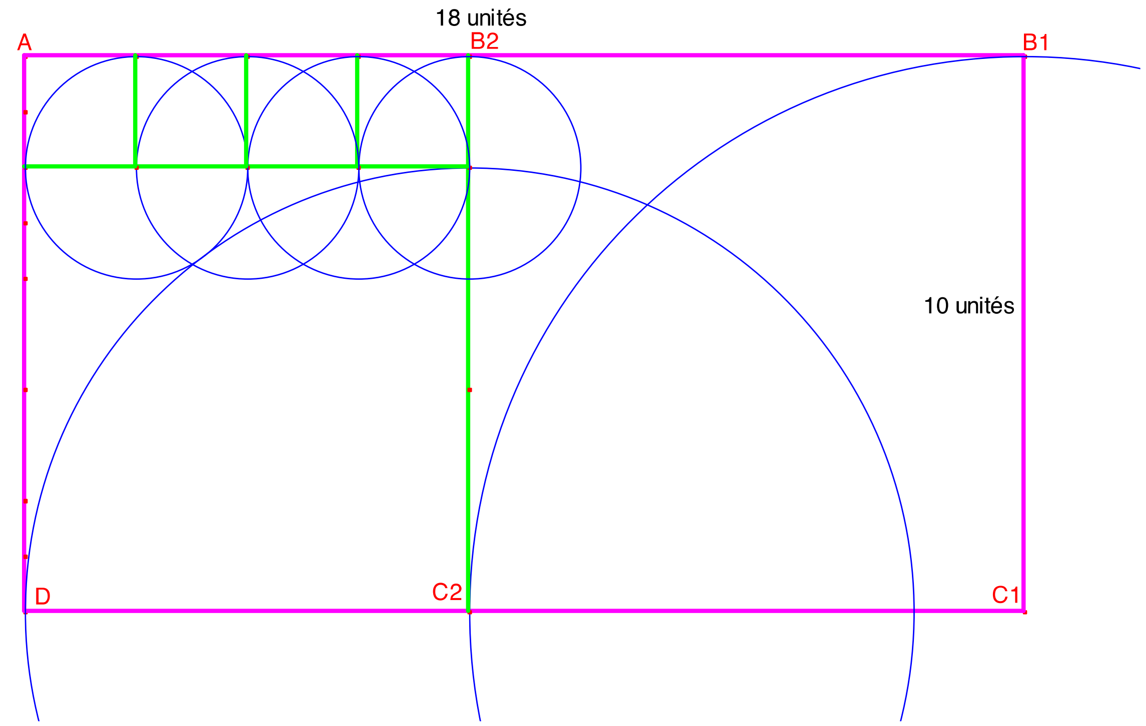
Exemple 2
A partir d'un rectangle de dimensions : 5 et 10
PGCD (5 ; 10) =5



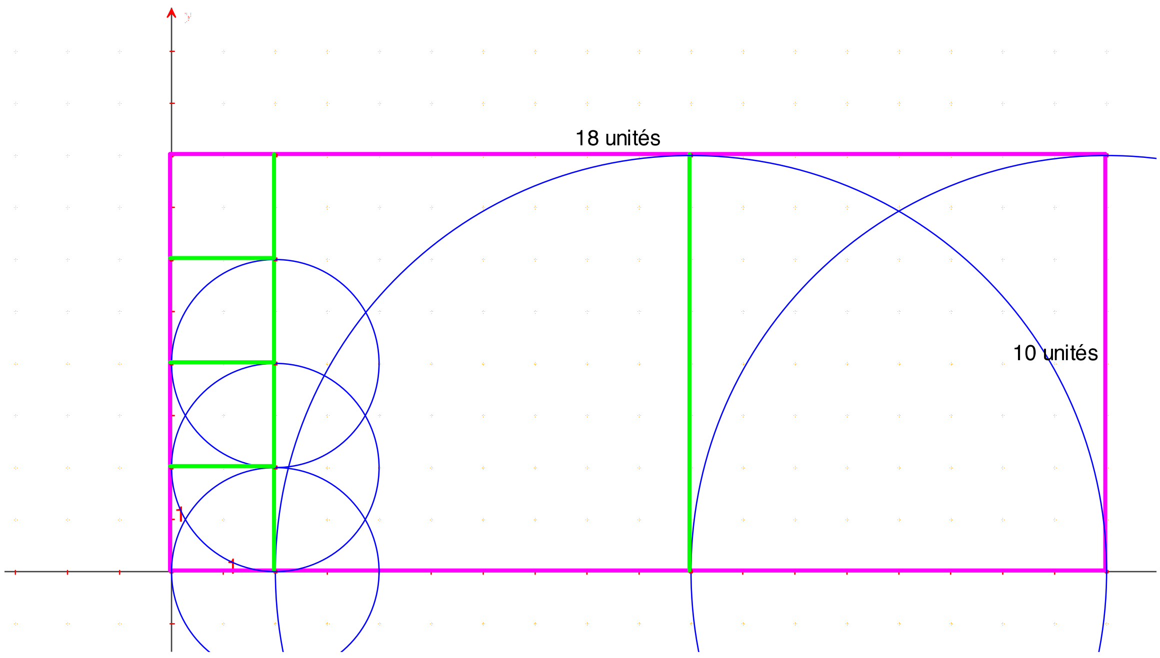
Exemple 3
A partir d'un rectangle de dimensions : 10 et 12
PGCD (10 ; 12) = 2



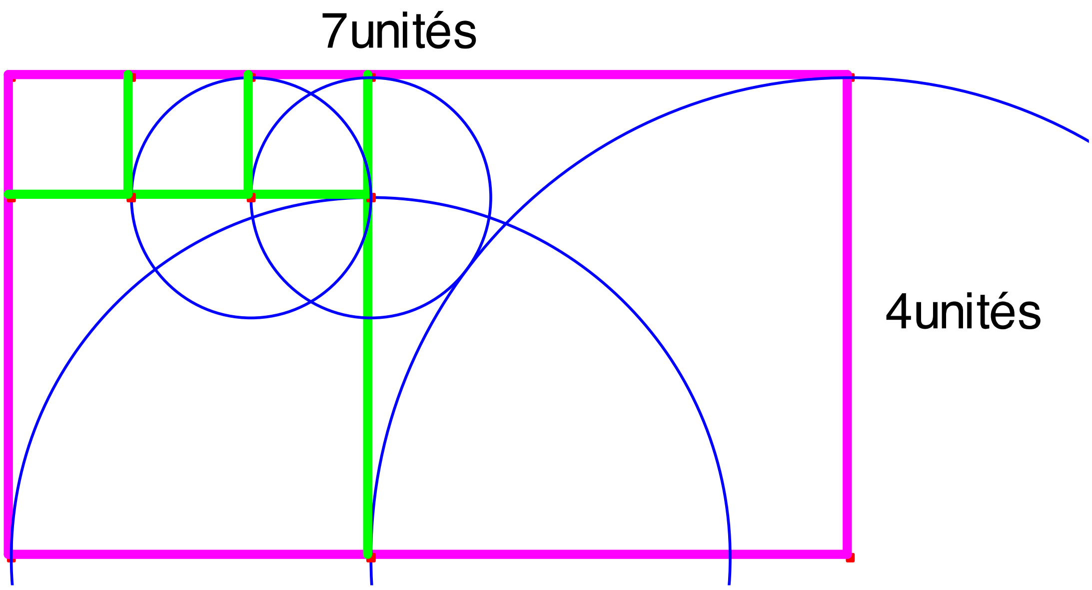
Exemple 4
PGCD (10 ; 18)=2



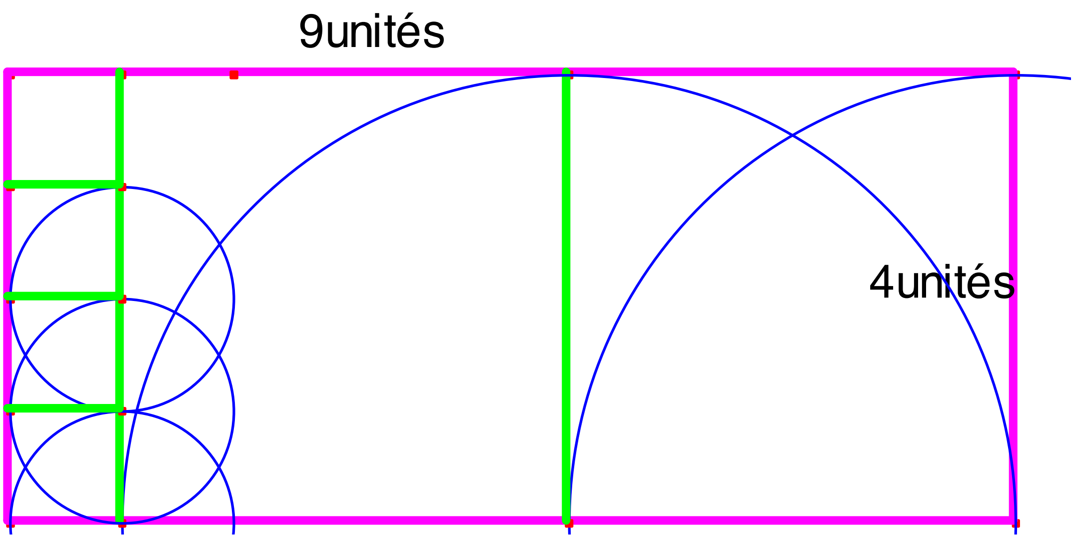
Exemple 5
PGCD (8 ;18) = 2



Exemple 6
PGCD (4 ; 7) = 1



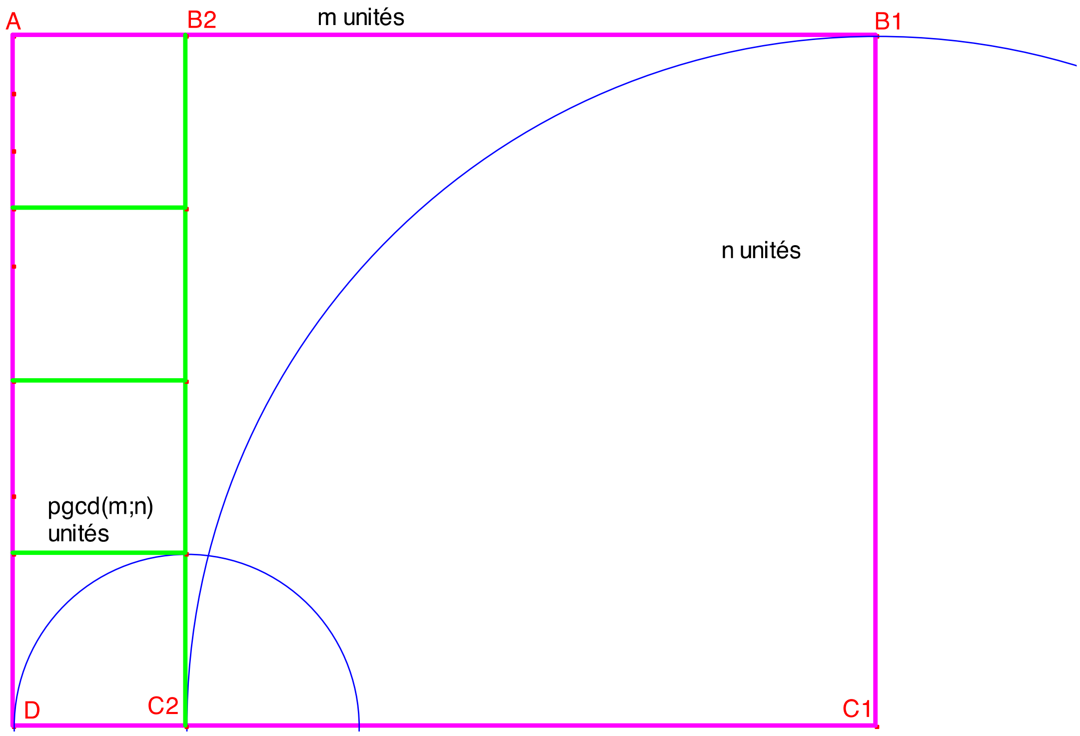
Exemple 7 PGCD(4 ;9) = 1
1



Dans cette phase on demande aux élèves de décrire une suite d'instructions qui va se généraliser sur la forme d'un texte construit par le groupe et avec l'aide de l'enseignant l'objectif est d'arriver à un algorithme géométrique.

Par exemple l'algorithme suivant , (il n'est pas forcement écrit avec les élèves dans une écriture classique d'algorithme:
1 Au départ on a un rectangle de dimensions m et n
2 Si m >n alors on construit une suite de carrés de dimension n
« posés sur la longueur » jusqu'à qu'on ne puisse plus construire un nouveau carré
3 On regarde les dimensions du rectangle obtenu, si elles sont égales on arrête, sinon on choisit la plus petite et on recommence.
Remarque : ici il faut bien laisser les élèves proposer des textes qui doivent correspondre à la suite de constructions. **Les élèves doivent bien, se rendre compte de l'itération, donc de l'existence d'un algorithme**.

Phase 3
a) Les élèves argumentent sur leur affirmation :
« Etant donnés deux entiers m et n dimensions du rectangle initial, **cet algorithme de constructions itérées permet toujours d'obtenir un carré. »**



Exemple d'argumentation possible
Dans la suite des constructions les dimensions des rectangles sont toujours des nombres entiers positifs de plus en plus petits. Les dimensions sont toujours positives, donc elles ne peuvent pas être plus petites que 1. Donc soit on trouve le dernier carré de dimensions 1 ou bien il est de dimension supérieure à 1.

b) Etant donnés deux entiers m et n
Construction avec les élèves de l'affirmation plus fine
« **Avec cet algorithme de constructions itérées on obtiendra toujours un carré de dimension le PGCD de m et n » Les élèves trouvent par eux-mêmes que par cet algorithme géométrique on trouve un nombre d dimension du dernier carré, tel que les nombres m et n sont dans la table des multiples de d D'autres élèves trouvent que par cet algorithme la dimension du dernier carré d est toujours un diviseur de m et de n**

Exemple d'argumentation possible
Dans la suite des constructions les dimensions des rectangles sont toujours des nombres entiers positifs de plus en plus petits. Les dimensions sont toujours positives, donc elles ne peuvent pas être plus petites que 1. Donc, soit on trouve le dernier carré de dimension 1 ou bien il est de dimension supérieure à 1.

Autre Argumentation :
On construit le premier rectangle en position « prototypique », (avec la largeur en position verticale).
Quand on rabat la largeur sur la longueur de chacun des rectangles successifs on obtient à la fin un carré. Soit de dimension 1, ou bien de dimension d>1.où d est un nombre entier positif, car la soustraction d'un entier plus petit à un autre entier plus grand donne un entier positif.

La dimension d du carré final est un diviseur des nombres donnés m et n, car d divise les deux dimensions Xi et Yi du rectangle à l'étape finale i. L'une de ces deux dimensions du rectangle Yi est la largeur n du rectangle initial, d'après la disposition des figures itérées. Donc d divise n.

L'une de deux dimensions Xi ou Yi est la dimension des carrés isométriques précédents qui, en nombre entier, constituent l'avant-dernier rectangle de dimensions Xi-1 et Yi-1, ainsi « de proche en proche » on arrive au rectangle initial de dimensions m et n. L'expression : « De proche en proche » montre, dans cette construction itérée, (qui est en fait un algorithme purement géométrique), que le « dernier carré » obtenu rentre un nombre de fois entier dans les rectangles de dimensions (Xi et Yi) , (Xi-1 et Yi-1) ,..... (m ; n)

On conclut que d divise m et n. Le carré de dimension d est le premier carré trouvé qui rempli entièrement le dernier rectangle donc il est le carré de plus grande dimension qui permet de remplir avec un nombre entier le rectangle initial de dimensions n et m.
Donc d est le PGCD de m et n.

Commentaire didactique
La formalisation de cet algorithme géométrique par un discours de formalisme mathématique est complexe, mais les élèves, par la suite de ces constructions en admettent plus aisément le résultat : « Le PGCD de m et n est d ». Le professeur de ne pas rendre obligatoire cette phase de formulation discursive au groupe entier mais de la proposer aux élèves intéressés.

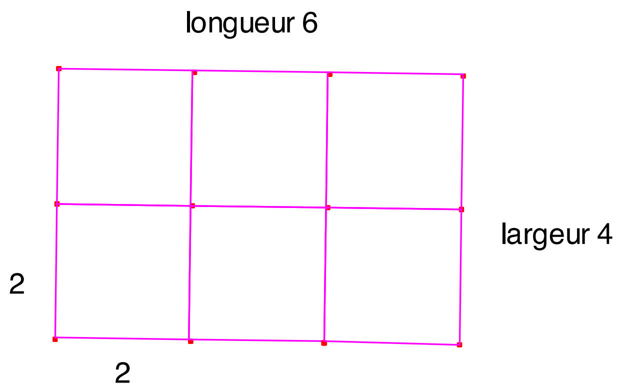
Partie II Du carré au rectangle

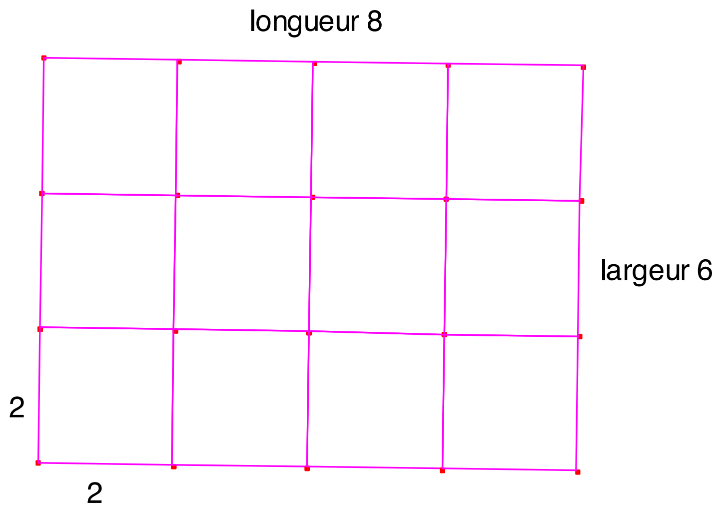
Il est fondamental, dans tout apprentissage d'une notion mathématique, de proposer l'activité réciproque. Ici nous avons deux directions possibles de l'inversion de l'Algorithme.

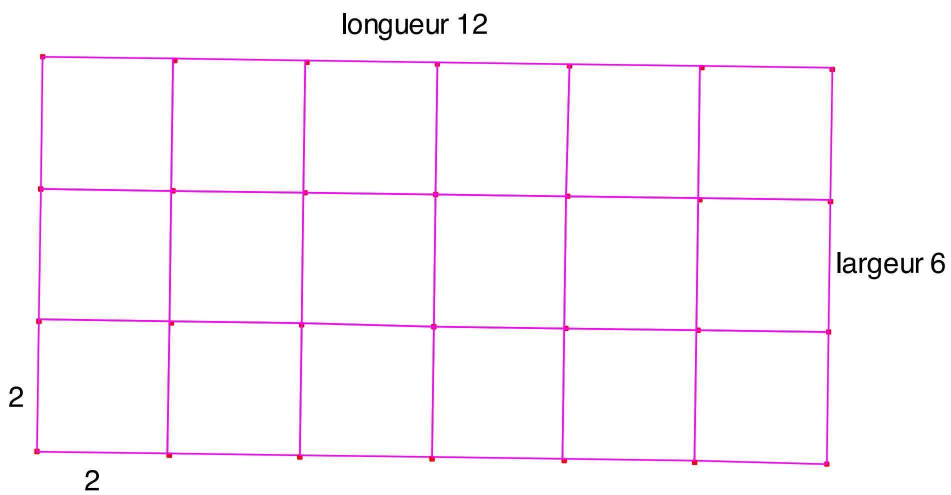
Possibilité 1
Phase 1

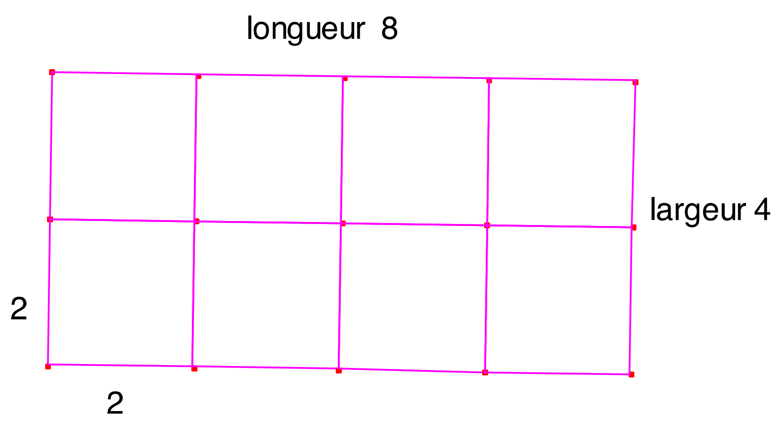
On propose de partir d'un carré de dimension 2 et de former des rectangles par recollement d'un certain nombre des carrés On laisse les élèves réfléchir librement et on leur demande de construire au moins quatre rectangles différents.

Exemples :









On demande aux élèves de justifier oralement l'obtention par recollement d'un rectangle

Compétence 3
Géométrie
Connaître et représenter des figures géométriques. Utiliser leurs propriétés.
Effectuer des constructions simples en utilisant :
Des outils (instruments de dessin, logiciels)
Des définitions, des propriétés
Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer

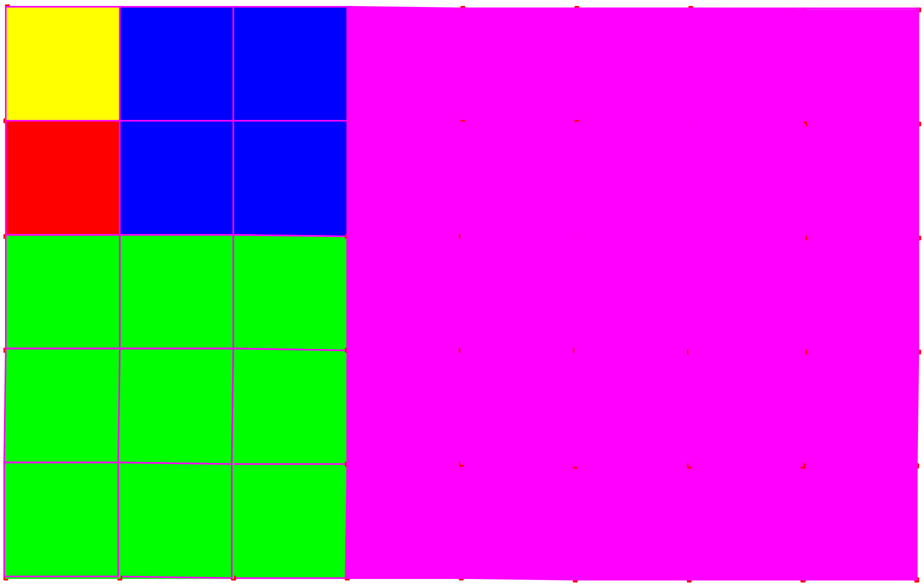
Phase 2' On demande aux élèves d'appliquer les constructions de l'algorithme de la partie I et d'expliquer si l'on trouve toujours le carré initial ou quelquefois un autre plus grand.

Phase 3' On demande aux élèves d'expliquer, dans l'univers numérique, les affirmations de cette partie 2 et les conclusions qui seront explicitées.

Possibilité 2
Phase 1''
On propose aux élèves de partir d'un carré et réaliser un « inverse réduit » de l'algorithme précèdent ce qui donne l'algorithme suivant :
(*) les élèves partent de valeurs de « d » numériques, par exemple 2, 3, 4,... puis par la suite on le généralise à un carré de dimension « d »

Voici un texte d'algorithme, pour un carré de dimension « d » donné au départ
1) Construire un carré de dimension « d »
2) Construire un carré de dimension « d », accolé, (ou «   »), au premier carré.
3) Construire un carré de dimension d+d, accolé au dernier rectangle, ceci donne un rectangle de dimensions 2d et 3d
4) On recommence avec un carré accolé de dimension 3d, ceci donne un rectangle de dimensions 3d et 2d+3d, c'est-à-dire 3d et 5d
5) On recommence le même type de construction et on arrête quand on le désire.

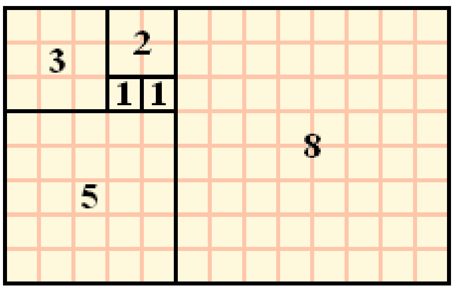
Par exemple avec un carré de dimension 2 au départ on obtient la suite de couples de dimension des rectangles successifs : (2 ; 4)   (4 ; 6)   (6 ; 10) (10 ; 16) ....



Phase 2’’
On demande aux élèves de calculer le PGCD de chaque couple précèdent
On obtient :
PGCD (2 ; 4) = 2
PGCD (4 ; 6) =2
PGCD (6 ; 10) = 2
PGCD (10 ; 16) = 2
Les élèves formulent une conjecture les PGCD sera toujours 2

Phase 3’’
On peut avec avancer dans l’apprentissage de la logique et de raisonner avec les élèves par une contraposée non rigoureusement formalisée mais assez intuitive:
Supposons que à une étape de cette construction on obtient comme PGCD un nombre k plus grand que 2
Alors il divise les deux dimensions a et b du rectangle, par exemple avec a<b
Alors il divise les deux dimensions du rectangle précèdent qui sont a et b-a
Ainsi de proche en proche on arriverait à la conclusion que k divise les nombres 2 et 4 tout en étant k>2 mais ceci est absurde car le PGCD de 2 et 4 est 2*(*)*

Pour approfondir cette question nous vous conseillons à nos collègues de consulter des articles sur la suite de Fibonacci et l’Algorithme d’Euclide. Si on part d’un carré de dimension 1 on obtient les termes de la suite classique de Fibonacci.



Partie III Problèmes dans le champ étudié : multiples, diviseurs PGCD

On propose dans cette partie des problèmes où les procédures et notions trouvées précédemment sont à la base de la résolution.

Pour cela nous pouvons extraire de certains manuels des énoncés qui ne soient pas que des énoncés d'application numérique directe du PGCD.

Exemple : sésamaths

Exercices d'approfondissement

62 *Division euclidienne par 13*

Dans une division euclidienne, le diviseur est 13, le reste est 5.

a. Si l'on augmente le dividende de 1, que devient le quotient ? Que devient le reste ?

b. De combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient ?

c. Si on veut diminuer le quotient de 1, combien faut-il enlever au dividende ? Donne toutes les possibilités.

63 *Division euclidienne*

On a l'égalité : $3\,625 = 85 \times 42 + 55$.
Réponds aux questions suivantes sans faire de division et en justifiant.

a. Quel est le quotient de la division euclidienne de 3 625 par 42 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 85 ?

c. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 42 ?

d. Mêmes questions que **b.** et **c.** en remplaçant 3 650 par 3 600.

e. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 569 par 85 ?

64 *Division euclidienne (bis)*

Dans une division euclidienne, que deviennent le quotient et le reste si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre ?

65 *Devinette*

Lorsque je divise 134 par ce nombre, le reste est 2 et lorsque je divise 183 par ce même nombre, le reste est 3.

Quel peut être ce nombre ? Trouve toutes les solutions.

66 *Distribution de crêpes*

La grand-mère de Nicolas a fait 26 crêpes. Elle demande à Nicolas de les distribuer à parts égales à chacun de ses quatre cousins présents dans la cuisine. Lorsqu'il ne pourra plus en distribuer, il gardera le reste pour lui.
Après réflexion, Nicolas s'empresse d'aller chercher ses trois autres cousins dans le jardin.

Pourquoi ?

67 Un groupe de moins de 40 personnes doit se répartir équitablement une somme de 229 €. Il reste alors 19 €. Plus tard, ce même groupe doit maintenant se répartir équitablement 474 € : cette fois-ci, il reste 12 €.

a. Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe ?

b. Ils décident de se répartir ce qu'il reste équitablement.
Combien chaque personne reçoit-elle en plus ? Quelle somme auront-ils reçue au total ?

68 *Démonstration de l'algorithme d'Euclide*

a et b sont deux entiers naturels, $a > b$.
On effectue la division euclidienne de a par b :
$a = b \times q + r$ où $r < b$.

a. Démontre que si d est un diviseur commun à a et b alors d est aussi un diviseur de r.

b. Démontre que si d' est un diviseur commun à b et r alors d' est aussi un diviseur de a.

c. Démontre que PGCD $(a\ ;\ b)$ = PGCD $(b\ ;\ r)$.

69 *Pages*

Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules ou cahiers, qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.

a. Quel est le nombre de pages d'un cahier ?

b. Quel est le nombre de cahiers qui composent les deux livres ?

70 *Énigmes*

a. Trouve deux nombres entiers naturels dont la somme est 2 285 et le PGCD est 457. Y a-t-il plusieurs solutions ?

b. Trouve deux nombres entiers naturels dont le PGCD est égal à 8 et dont le produit est 960. Y a-t-il plusieurs solutions ?

71 *Timbres*

Un philatéliste possède 17 017 timbres français et 1 183 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, comportant le même nombre de timbres français et le même nombre de timbres étrangers.
Calcule le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser et dans ce cas, le nombre de timbres de chaque sorte par lot.

Page suivante de sésamaths

Exercices d'approfondissement

72 *Tempête*

Des poteaux téléphoniques étaient plantés le long d'une route sur une ligne droite, régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres.
Après une tempête, il n'en reste plus que trois : le premier, le dernier et un autre situé entre les deux, à 345 m du premier et 184 m du dernier.
Un technicien arrivé sur les lieux estime le nombre de poteaux tombés à plus de 10 mais moins de 100 !
Combien de poteaux sont-ils tombés ?

73 *Soyons tous à l'heure*

a. La montre d'Éric sonne toutes les 6 heures et celle de Leïla, toutes les 14 heures. Elles ont sonné ensemble le 9 octobre à 17h30.
À quelle date et à quelle heure sonneront-elles ensemble de nouveau ?

b. Même question si la montre d'Éric sonne toutes les 15 heures et celle de Leïla toutes les 21 heures.

74 *Arbres*

Un terrain rectangulaire a pour dimensions 966 m et 1 008 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter ?

75 *Piscine*

Une piscine rectangulaire mesure 3,36 m par 7,80 m et a une profondeur de 1,44 m.
On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques.
Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

a. Quelle taille de carreaux doit-il commander ?

b. Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

76 *Entiers naturels consécutifs*

a. Calcule le PGCD de 34 et 35 puis celui de 456 et 457.

b. Quelle conjecture peux-tu faire ? Démontre cette conjecture.

77 *Premiers entre eux*

a. Démontre que les entiers naturels k et $2k + 1$ sont premiers entre eux pour n'importe quelle valeur de k.

b. Même question avec $k + 1$ et $2k + 1$.

c. Déduis-en des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

78 Rends la fraction $\frac{11\,413}{14\,351}$ irréductible.

79 Soit $C = \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \frac{5}{9}$.

a. En écrivant la liste des premiers multiples de chacun des dénominateurs, trouve le dénominateur commun aux trois fractions le plus petit possible.

b. Calcule C et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

c. Procède de la même façon pour calculer $D = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4}$.

80 *Addition*

a. Soit $G = \frac{3\,575}{4\,225}$.
Écris G sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Soit $H = G + \frac{4}{26}$.
Écris H sous la forme d'un nombre entier. Indique le détail des calculs.

81 Calcule $J = \frac{575}{161} - \frac{45}{21}$. (Donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.)

82 Calcule en détaillant les étapes et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$A = \frac{24 \times 9 \times 72 \times 121}{36 \times 33 \times 64}$

$B = 56 \times \frac{15}{128} - \frac{1}{18}$

$C = \left(\frac{24}{15} + \frac{35}{25}\right) \times \frac{20}{33}$

$D = \frac{81}{63} \div \left(4 - \frac{2}{14}\right)$

$E = \frac{56}{15} \times \frac{\frac{5}{6} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$

$F = 3 + \frac{2}{15} \times \left(5 \times \frac{23}{25} - \frac{12}{49} + \frac{9}{14}\right) \div \frac{1}{70}$

Conclusion de cette partie: Cette proposition didactique basée sur l'algorithme d'Euclide permet aux élèves d'avancer à partir de leurs productions et d' aborder des propriétés des multiples et diviseurs, en particulier le PGCD de deux entiers naturels non nuls. Ceci dans le cadre du développement des connaissances et compétences du socle commun.

II) Ouverture d'un problème par une transformation de l'énoncé. Sur l'exercice du manuel Sésamaths 3e, le 75 Piscine, page 27, Chapitre N1, Collection Mathenpoche, Génération5

75 ***Piscine***

Une piscine rectangulaire mesure 3,36m par 7,80m et a une profondeur de 1,44m.

On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

a) Quelle taille de carreaux doit-il commander ?

b) Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

Analyse didactique :

1° Les capacités travaillées par ce problème chez les élèves

Partie de la question (a)

1) Capacité relevant du socle commun

Les élèves doivent rechercher et organiser l'information.

Ils doivent ici à partir de « Une piscine rectangulaire » penser à un parallélépipède rectangle ou pavé droit. Mais faire attention qu'il y a seulement 5 faces à prendre en compte car une piscine a seulement un fond et quatre faces latérales.

Ils doivent penser à la forme des faces du pavé droit, c'est-à-dire des rectangles. Ils doivent penser aux différents rectangles, (largeur et longueur) et au nombre de chaque type. Soit deux rectangles de 3,36m x 1,44m , deux rectangles de 7,80m par 1,44 et pour le fond un rectangle de 3,36m par 7,80m

2) Capacité relevant du socle commun

Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer

Ils doivent penser que l'interdiction de faire des découpes implique un « nombre entier de carrés ».

Ils doivent penser que « préfère les grands carreaux » implique « chercher le carré de plus grande dimension »
Capacité relevant du socle commun
Calculer, mesurer, appliquer des consignes
Ils doivent penser à transformer les mesures en cm et regarder s'il s'agit de nombres entiers.
Ils doivent penser à chercher un carré tel que sa dimension lui permette de rentrer un nombre entier de fois dans la largeur et la longueur de chaque type de rectangle.
Ils doivent modéliser ceci par « il faut trouver un diviseur commun à 336 ; 144 ; et 780, le plus grand possible »
Ils doivent adapter leurs connaissances apprises des méthodes de recherche du PGCD de deux nombres à la recherche d'un PGCD de trois nombres.

Partie de la question (b)
Capacités relevant du socle commun
Calculer, mesurer, appliquer des consignes
Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer
Ils doivent penser que « calculer le nombre de carreaux par face de la piscine » revient à mesurer l'aire de chaque rectangle avec comme unité « le carreau obtenu dans la question (a) » Pour cela il faut qu'il pensent à diviser la largeur et la longueur de chaque rectangle par le PGCD obtenu et ensuite multiplier les deux quotients obtenus.
Ils doivent une fois qu'ils ont trouvé le nombre total des « carreaux carrés », penser à la division euclidienne par 100, puis augmenter le quotient d'une unité si le reste est non nul.

Proposition de transformation de l'énoncé

75 *Piscine*
Une piscine rectangulaire mesure 3,36m par 7,80m et a une profondeur de 1,44m. On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.
a) Quelle taille de carreaux doit-il commander ?
b) Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

Nous proposons soit d'ajouter à l'énoncé le texte suivant
Dessiner « à main levée » un schéma de représentation en perspective de cette piscine. Quelle est la forme géométrique de cette piscine ?

Si tu préfères, tu peux résoudre, pour commencer, le même type de problème mais plus facile, avec une piscine de 6m par 12m par 4m de profondeur.
Tu peux nous montrer que tu sais trouver la solution pour une des faces de la piscine, par exemple celle de 6m par 4m, puis celle de 4m par 12m, puis celle de 6m par 12m. Tu écris quelle est la forme de chaque face.
Et tu nous montres que tu sais calculer le nombre de carreaux carrés de chaque face.
Maintenant peux-tu résoudre le problème donné au départ ? Pour cela tu nous expliques chaque étape de tes calculs.

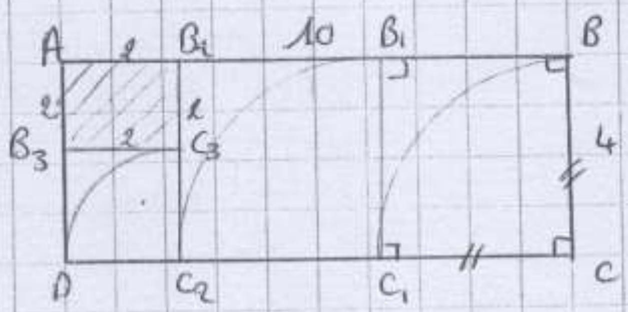
Soit d'ouvrir complètement l'énoncé, même jusqu' à tenir compte des observations faites sur un carrelage réel. Par exemple dans la salle de cours. Dans ce cas il faudra même tenir compte d'un nouveau paramètre : la largeur des « 'joints ». Le problème devient plus en accord avec la réalité. Il faudra bien se mettre d'accord avec nos élèves quelles ont les modélisation possibles. On garde par contre le choix des valeurs entiers des carreaux carrés et le fait qu'on ne veut pas les découper. Ce deuxième choix pédagogique nous parait le plus approprié et plus en accord avec l'orientation du « socle commun ». Les élèves qui travaillent de cette manière comprennent que les mathématiques sont fort utiles quand on modélise bien un problème de la vie réelle.

Annexe 1 productions des élèves « étudiants professeurs des écoles »

Champ Numérique et Géométrique

I Dessiner un rectangle

de dimensions 4 et 10 (unité le bord du carré du quadrillage)



Algorithme de construct°

1) B_1BCC_1 est un carré car 4 côtés consécutifs de m lgueurs et il possède 4 angles droits

2) On continue l'agorithme
$C_2C_1B_1B_2$ est un carré aussi.

3) On continue l'agorithme et on arrête qd on obtient $AB_2C_3B_3$ (carré) de dimension 2

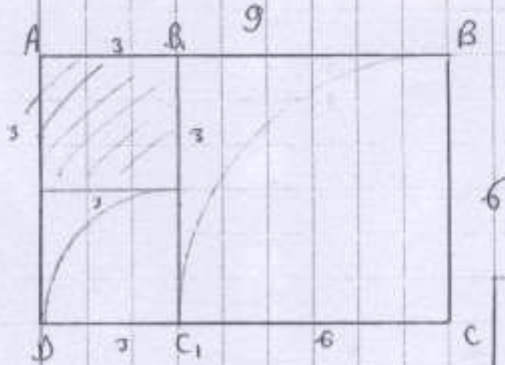
II ... modeliser numériquement les étapes de cet algorithme

1) rectangle 10 ; 4
calcul 10-4
2) rectangle 6 ; 4
calcul 6-4 ;

rectangle
3) 2 ; 4
calcul ; 4-2
4) 2 ; 2 Fin

Entrée	Sortie
(10;4)	2

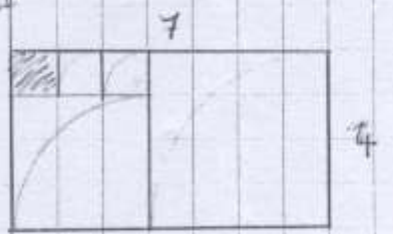
III Deuxième exemple



1) rectangle 9 ; 6
(9-3)
2) rectangle 3 ; 6
(6-3)
3) 3 ; 3

Entrée	Sortie
(9;6)	3

IV



rectangle
1) 7 ; 4
(7-4)
2) 3 ; 4
(4-3)
3) 3 ; 1
(3-1)
4) 2 ; 1
(2-1)
5) 1 ; 1

Entrée	Sortie
(7;4)	1

V En partant d'un rectangle quelconque ayant 1 lg et 1 la... do cet algorythme arrive-t-on tjr à un carré ?

Raisonnement = Dans cet algorythme des construct° géométriques, A chq étape on obtient un rectangle + petit mais ayant de dimens° de 2 nbres entiers.

Au pire on arrive on arrive à 1 rectangle ayant pr largeur 1 et pour longueur un nb entier. → On obtient 1 carré de dimens° 1.

Remarque = L'algorythme peut s'arrêter avt ac un carré de dimens° supérieure à 1.

VI Dans la géométrie

Dans la géométrie

(10;4) → 2
(9;6) → 3
(7;4) → 1.
(12;6) → 6
(12;15) → 3
(18;10) → 2
(24;30) → 6
60;36 → 12

$6 \times 5 \to 30$
$6 \times 4 \to 24$

VII Expliquer, par des propriétés des nombres, le résultat trouvé pr chq exemple

→ Chq nb entre parenthèse ∈ à la table de multiplicat° du nb que l'on trouve.

→ Le nb trouvé est le + grd diviseur commun.

PGCD de (60;36) = 12
(+ grd commun diviseur)

Annexe2 Propositions de différents manuels
Collection phare hachette éducation 3ème

> Activités

1 J'effectue une division euclidienne

J'AI DÉJÀ

1) a. Effectuer la division euclidienne de 264 par 15. Quel est le quotient entier ? Quel est le reste ?
   b. Quelle égalité peut-on écrire à l'aide de ces nombres ?

2) a. Effectuer la division euclidienne de 1 288 par 23. Quel est le quotient entier ? Quel est le reste ?
   b. Quelle égalité peut-on écrire à l'aide de ces nombres ?
   c. Recopier et compléter : « *23 est un ... de 1 288* » et « *1 288 est un ... de 23.* »

2 Je détermine les diviseurs d'un entier

J'AI DÉJÀ

A : Liste de diviseurs

1) On veut déterminer tous les diviseurs du nombre 20.
   a. Recopier et compléter les égalités : $20 = 1 \times ...$
   $20 = 2 \times ...$
   $20 = 4 \times ...$
   b. Déduire de chaque égalité deux diviseurs du nombre 20.
   c. Pourquoi n'a-t-on pas écrit l'égalité $20 = 3 \times ...$? l'égalité $20 = 5 \times ...$?
   d. Écrire la liste des diviseurs de 20.

2) Déterminer la liste des diviseurs de 90.

B : Nombres premiers

Un **nombre premier** est un nombre entier qui admet exactement deux diviseurs.
Dans chaque cas, préciser si le nombre est premier. Justifier la réponse.

a. 11 ; b. 4 ; c. 2 ; d. 34 ; e. 1 ; f. 0.

3 Je découvre le PGCD de deux nombres entiers

A : Notion de PGCD

1) a. Déterminer la liste des diviseurs de 24, celle des diviseurs de 30 et celle des diviseurs de 35.
   b. Écrire la liste des diviseurs communs à 24 et 30. Quel est le plus grand ?
   c. Écrire la liste des diviseurs communs à 30 et 35. Quel est le plus grand ?
   d. Écrire la liste des diviseurs communs à 24 et 35. Quel est le plus grand ?

2) Expliquer pourquoi deux nombres entiers positifs ont au moins un diviseur commun.

3) Le plus grand des diviseurs communs à deux nombres entiers a et b s'appelle le Plus Grand Commun Divise
   de a et b et se note **PGCD $(a ; b)$**.
   Recopier et compléter : « PGCD (24 ; 30) = ... ; PGCD (30 ; 35) = ... ; PGCD (24 ; 35) = ... »

B : Propriétés du PGCD

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs. Justifier chaque propriété :

a. PGCD $(a ; b)$ = PGCD $(b ; a)$; b. PGCD $(a ; a) = a$; c. Si b est un diviseur de a, alors PGCD $(a ; b)$ =

52

4 Je calcule le PGCD de deux nombres entiers

A : Propriétés

a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $a > b$.

1) **a** Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise a et b, alors d divise b et a − b* ».

b Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise b et a − b, alors d divise a et b* ».

2) Que peut-on dire des diviseurs communs à a et b et des diviseurs communs à b et $a - b$?

3) Que peut-on en déduire pour PGCD (a ; b) et PGCD (b ; $a - b$)?

B : Algorithme des soustractions successives

On veut calculer le PGCD de 145 et 87.

Recopier et compléter en utilisant la propriété démontrée dans la partie **A 3)**.

145 − 87 = 58,	d'où PGCD (145 ; 87) = PGCD (87 ; 58)
87 − 58 = ...,	d'où PGCD (87 ; 58) = PGCD (58 ; ...)
58 − ... = ...,	d'où PGCD (58 ; ....) = PGCD (... ; ...).
Or, PGCD (... ; ...) = ...	Donc, PGCD (145 ; 87) = ...

5 Je calcule le PGCD par l'algorithme d'Euclide

A : Propriétés

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec $a > b$.

r désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

1) **a** Démonter la propriété :

« *Si un nombre d divise a et b, alors d divise b et r* ».

b Démontrer la propriété :

« *Si un nombre d divise b et r, alors d divise a et b.* »

2) Que peut-on dire des diviseurs communs à a et b et des diviseurs communs à b et r?

3) Que peut-on en déduire pour PGCD (a ; b) et PGCD (b ; r)?

B : Algorithme des divisions euclidiennes successives

On veut calculer le PGCD de 2 295 et 612.

Recopier et compléter en utilisant la propriété démontrée dans la partie **A 3)** :

2 295 = 612 × 3 + 459,	d'où PGCD (2 295 ; 612) = PGCD (612 ; 459)
612 = 459 × ... + ...,	d'où PGCD (612 ; 459) = PGCD (459 ; ...)
459 = ... × ... + 0.	

D'où ... est un diviseur de 459. Ainsi, PGCD (459 ; ...) = ...

Donc, PGCD (2 295 ; 612) = ...

Ed. BREAL 3eme

activités

Activité de découverte

La pelouse d'un terrain de rugby

On veut refaire la pelouse d'un terrain de rugby avec des plaques carrées, toutes de la même taille. L'enceinte de jeu d'un terrain de rugby ne doit pas dépasser 100 mètres de long sur 70 mètres de large. On veut trouver la longueur des côtés des plaques, sachant qu'elle doit être égale à un nombre entier de mètres.

1. Donner tous les diviseurs de 100, puis tous les diviseurs de 70.

2. En utilisant les diviseurs communs à 100 et 70, trouver les différentes longueurs des carrés de pelouse qui peuvent être utilisés pour recouvrir l'enceinte de jeu.

3. Quelle est la plus grande longueur des plaques carrées de pelouse ? Combien en utilisera-t-on ?

1 Calculs en écriture fractionnaire

Exercices 15 à 27, p. 17-18

A. Additionner et soustraire

▶ Effectuer les calculs suivants : $A = \frac{2}{7}+\frac{5}{7}$; $B = \frac{4}{5}+\frac{9}{15}$; $C = -\frac{8}{3}-\frac{7}{5}$; $D = \frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$.

▶ Recopier et compléter :
« Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire, on les écrit d'abord avec le même .... et on ajoute (ou soustrait) les ...., en gardant le .... commun. »

B. Multiplier

▶ Effectuer les calculs suivants : $E = \frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$; $F = \frac{2}{3}\times\frac{-7}{5}$; $G = -\frac{8}{7}\times\frac{5}{-16}$; $H = -3\times\frac{7}{36}$.

▶ Recopier et compléter :
« Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on .... les .... entre eux et les .... entre eux. »

C. Diviser

▶ Effectuer les calculs suivants : $I = \frac{5}{4}:\frac{3}{2}$; $J = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{16}{21}}$; $K = \frac{\frac{2}{-5}}{4}$; $L = \frac{2}{-5}:4$.

▶ Recopier et compléter :
« Diviser par un nombre en écriture fractionnaire non nul revient à .... par son .... »

2 Diviseurs communs et PGCD

Exercices 28 à

A. Le plus grand diviseur commun à 48 et 60

- Énoncer les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9.
- Écrire dans l'ordre croissant tous les diviseurs de 48, puis ceux de 60.
- Donner tous les diviseurs communs à ces deux nombres. Quel est le plus gra
On l'appelle le plus grand diviseur commun et on le note PGCD (48 ; 60).

B. À vous de jouer !

- Calculer le PGCD de 76 et 24.
- Calculer le PGCD de 27 et 81.

3 Calcul du PGCD

Exercices 35 à 4

A. Diviseurs de la différence et de la somme

- Écrire tous les diviseurs de 75, puis tous les diviseurs de 45.
- Vérifier que les diviseurs communs à 75 et 45 sont des diviseurs de la différen
et de la somme 75 + 45.
- Démontrer que si 5 est un diviseur commun à deux nombres entiers a et b avec $a < b$, alors 5 est un diviseur de $a - b$ et de $a + b$.

Je me souviens que si c est un diviseur de a, alors il existe un entier q tel que $a = c \times q$.

- On sait que :
  - si c est un diviseur de a, alors il existe un entier q tel que $a = c \times q$;
  - si c est un diviseur de b, alors il existe un entier q' tel que $b = c \times q'$.

  Recopier et compléter les égalités suivantes :
  $a - b = c \times (\ldots\ldots)$; $a + b = c \times (\ldots\ldots)$.
- En déduire que c est un diviseur de $a - b$ et de $a + b$.
On a démontré la propriété suivante : *un diviseur de deux nombres entie aussi leur différence et leur somme.*
On pourrait aussi démontrer que : *si a et b sont deux nombres entiers pos $a > b$, alors PGCD(a ; b) = PGCD($a - b$; b).*

B. L'algorithme des soustractions successives

- Utiliser cette propriété pour déterminer le plus grand diviseur commun de 2
Arrêter dès que l'on trouve deux nombres égaux. Ce nombre est le PGCD cherc
PGCD (252 ; 144) = PGCD (144 ; …) car 252 – 144 = …
PGCD (… ; …) = PGCD (… ; …) car … – … = …
PGCD (… ; …) = PGCD (… ; …) car … – … = …
PGCD (… ; …) = PGCD (… ; …) car … – … = … .
Conclusion : PGCD (252 ; 144) = … .

Attention ! Il faut soustraire le plus petit nombre au plus grand.

- **À vous de jouer !** Calculer avec cette méthode le PGCD de 493 et 377.

Sésamath Collection Mathenpoche

Activités de découverte

Activité 3 : Diviseurs communs, PGCD

1. On veut paver une surface rectangulaire avec des carrés identiques et sans coupe. La longueur du côté des carrés est un nombre entier de centimètres.

a. La surface rectangulaire mesure 12 cm par 18 cm.
Quelle peut être la longueur du côté des carrés ? Y a-t-il plusieurs possibilités ? Que représente(nt) ce(s) nombre(s) pour 12 et 18 ?
Mêmes questions lorsque la surface rectangulaire mesure 49 cm par 63 cm, puis 27 cm par 32 cm et enfin 21 cm par 84 cm.

b. Cherche les dimensions maximales d'un carré pouvant paver une surface rectangulaire de 108 cm par 196 cm.

2. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons.
Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ?
Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

3. **PGCD**

a. Dresse la liste des diviseurs de 117 et celle des diviseurs de 273.
Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

> On appelle ce nombre le PGCD de 117 et 273 et on le note : PGCD (117 ; 273) ou PGCD (273 ; 117).

b. Quel est le PGCD de 14 et 42 ? Que remarques-tu ? Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Activité 4 : Vers la méthode des soustractions successives

1. **Somme et différence de multiples**

a. Sans faire de division, explique pourquoi 49 014 est un multiple de 7 et pourquoi 13 est un diviseur de 12 987.

b. Démontre la propriété suivante :

> « Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$. ».

2. **Vers la méthode des soustractions successives**

a. Détermine le PGCD de 75 et 55 puis celui de 55 et 75 − 55.
Recommence avec celui de 91 et 130 et celui de 91 et 130 − 91.
Que peux-tu conjecturer ? Si cette conjecture est vraie, quel est son intérêt ?

b. **La preuve**
Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Soit d le PGCD de a et b et d' le PGCD de b et $a - b$.

- En utilisant la propriété vue au **1.**, explique pourquoi $d \leqslant d'$.
- Montre que d' est à la fois un diviseur de b, de $a - b$ et de a. Compare d et d'.
- Conclus.

c. Trouve le PGCD de 2 724 et 714 en utilisant plusieurs fois la propriété précédente.

Annexe3
Algorithme classique d'Euclide