UNE SEANCE DE FORMATION UTILISANT DES VIDEOS D'ELEVES EN DEMARCHE D'INVESTIGATION

Michèle GANDIT, Marion PASTORI
Maths-à-Modeler, Institut Fourier, Université J. Fourier, Grenoble

Résumé – Ce texte ne constitue pas exactement un compte-rendu de l'atelier qui portait le nom qui figure dans le titre, mais présente ce qu'on appelle une *situation de recherche pour la classe*, ainsi que sa mise en œuvre dans une classe de cinquième, au sein de ce qu'on appelle un *atelier Maths-à-modeler*. Nous explicitons les apprentissages visés dans un tel dispositif. Les temps forts d'un tel atelier sont illustrés par la description de séquences présentes dans la vidéo support.

Nous avons proposé aux participants à cet atelier d'analyser différents épisodes de la mise en œuvre d'une *situation de recherche pour la classe*, depuis la présentation initiale du problème aux élèves jusqu'au séminaire au cours duquel ceux-ci exposent leurs résultats. L'analyse devait permettre de relever certains moments forts de la mise en œuvre en classe d'une telle situation de recherche et de dégager les rôles des différents acteurs. Le déroulement de l'atelier a montré toute la difficulté, pour les participants observateurs, à relever les événements essentiels, rassemblés en un temps court, grâce à un montage vidéo. Le passage à l'écrit oblige à une présentation très différente. Ce texte présente ce qui est désigné par *situation de recherche pour la classe*, ainsi que l'exemple utilisé tout au long de l'atelier et pointe certains moments importants, chacun d'eux ayant été illustré par un extrait d'une vidéo.

Une situation de recherche (SR) à des fins didactiques

Une situation de recherche pour la classe est un modèle de situation didactique, construite à partir d'un problème qui relève généralement du domaine des mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998) et qui s'adresse à des élèves de tous âges, d'école primaire (Gravier & *al*, 2008), de collège, de lycée, d'université ou en formation d'enseignants (Gandit, 2004). Ces situations de recherche permettent aux élèves, sous réserve qu'elles soient gérées de manière adéquate, d'avoir une pratique scientifique qui se rapproche de celle du chercheur en mathématiques, que nous nommons *la démarche expérimentale en classe de mathématiques*. Nous renvoyons à Giroud (2011, p. 11) qui décrit la pratique de la démarche expérimentale en mathématiques comme une succession d'actions, non nécessairement ordonnée, centrées autour d'un problème – un problème est considéré comme un couple formé d'une question et d'instances, nous donnons plus loin un exemple – ces actions étant de trois types : « - proposer de nouveaux problèmes ; - expérimenter-observer-valider ; - tenter de prouver. ». Nous développons quelques-uns des savoir-faire liés à ces types d'actions tels que : se poser un problème, choisir des cas particuliers et les étudier de façon à s'approprier le problème, à voir ce qui est généralisable derrière le particulier, formuler une conjecture, tester cette conjecture sur d'autres cas particuliers, en tenter une preuve ou l'invalider, définir, nommer des objets rencontrés au cours de la recherche… Il s'y ajoute d'autres savoirs mathématiques qui relèvent davantage de la validation : les notions de condition nécessaire, condition suffisante, extremum local ou global, récurrence, raisonnement par décomposition, recomposition, raisonnement par induction…

Nos hypothèses de travail sont que ces savoirs ou savoir-faire ne peuvent s'apprendre qu'en situation de recherche (incluant expérimentation, observation, validation et tentative de preuve) et que leur acquisition facilite la compréhension d'autres savoirs mathématiques plus classiques.

Une *situation de recherche à des fins didactiques* (nous noterons SR dans la suite) permet d'engager les élèves dans une pratique scientifique qui va au-delà de ce qui se passe usuellement dans les classes. Par exemple, l'élève est amené à formuler ses propres questions, alors qu'on lui demande habituellement de répondre à celles qui lui sont posées par le professeur, à définir des objets parce qu'ils lui sont nécessaires au cours de sa recherche, alors qu'usuellement il se contente d'utiliser des définitions qui lui ont été données, à communiquer à une communauté ses propres résultats, alors qu'habituellement il doit seulement rédiger sa solution pour le professeur.

L'engagement d'une classe dans le problème se réalise par la présentation d'une sorte de jeu.

Prenons un exemple (Gandit & *al*, 2011) : dans un bâtiment, on cherche à entreposer le maximum de caisses de dynamite de sorte que, si une caisse explose, elle n'endommage aucune autre caisse (voir figure 1).

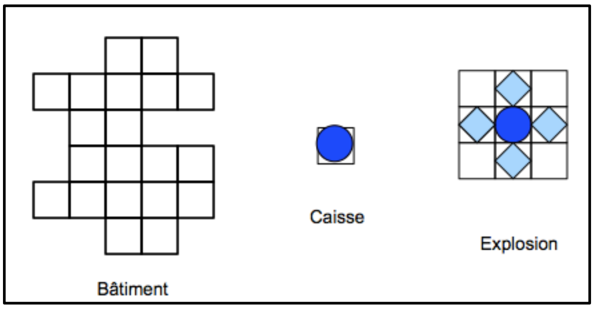


Figure 1 – Le bâtiment est une surface quadrillée, à mailles ou cases carrées identiques, une caisse de dynamite occupe une seule case du quadrillage, le mode d'explosion représenté (on peut aussi dire qu'il s'agit d'une contrainte de sécurité) est celui qui nécessite l'absence de toute caisse de dynamite à droite, à gauche, en haut et en bas de toute caisse posée sur une case.

Ainsi une autre façon de poser le problème pourrait être la suivante : sur une surface quadrillée, on cherche à placer le maximum de pièces (caisses), une pièce occupant une seule case, de sorte qu'aucune d'entre elles ne puisse être éliminée par une autre. Autrement dit, le placement d'une pièce sur une case de la surface quadrillée nécessite que reste libre un ensemble de cases (explosion).

Une première caractéristique d'une SR (Grenier & Payan 1998) est que, bien qu'elle soit liée à un problème de recherche actuellement travaillé1 dans le domaine des

2. Ce problème est une généralisation d'un problème célèbre : le problème des 8 reines. Comment placer 8 reines sur un échiquier (une reine « mange » les pièces sur la ligne et la colonne qui la contiennent) de sorte qu'aucune reine ne puisse en manger une autre ? Ce problème fut posé pour la première fois en

mathématiques discrètes, l'entrée dans le problème ne nécessite, de la part de tout élève-chercheur, que des connaissances élémentaires. Sa spécificité majeure réside cependant dans le fait qu'elle autorise toute personne, qui cherche, à prendre en charge certaines variables de la situation, qu'on appelle des *variables de recherche* (Godot 2005). Dans l'exemple choisi, *la forme du bâtiment* et *le mode d'explosion* sont deux variables de recherche, dont la figure 1 propose des valeurs. La possibilité laissée à l'élève-chercheur de choisir des valeurs de ces variables lui permet ainsi de se fabriquer ses propres questions. Ainsi une SR n'a pas de fin, une question résolue renvoyant à de nouvelles questions : pour la classe, l'arrêt de la recherche résulte d'une décision arbitraire liée à la fin du temps consacré à cette activité (le plus souvent, fixé au départ).

Entrons un peu plus dans la situation. Reprenons le même type de bâtiment et le même mode d'explosion (qu'on peut aussi considérer comme une contrainte de sécurité) qu'à la figure 1. La figure 2 montre d'abord une configuration qui n'est pas une solution puisque la contrainte de sécurité n'est pas respectée pour deux pièces. La configuration centrale de la figure 8 est une solution de cardinal 8 : elle est *localement maximale* en ce sens qu'on ne peut pas ajouter de pièce dans les cases vides, sans enfreindre la contrainte de sécurité. Mais cela ne signifie pas que 8 est le nombre maximum cherché. En effet, pourquoi ne pourrait-on pas arranger différemment les pièces sur le quadrillage de façon à pouvoir placer 9, 10… pièces ?

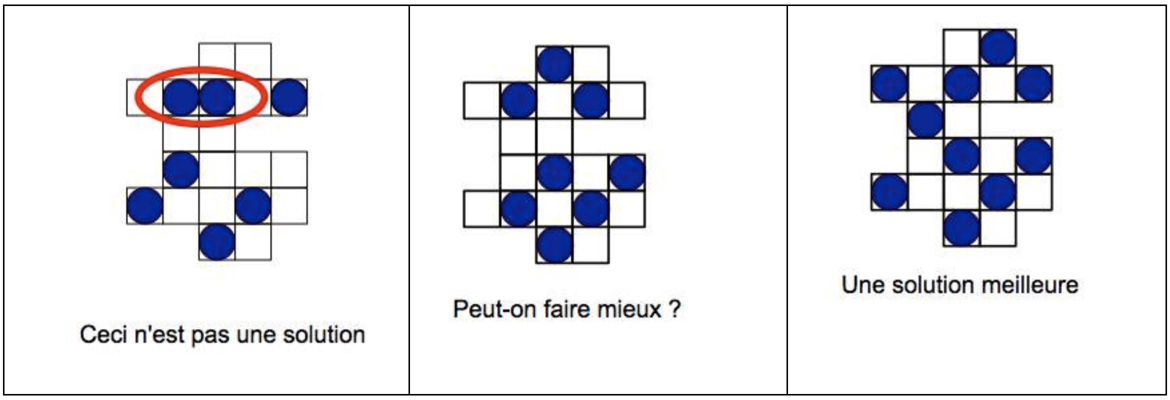


Figure 2 – Avec les valeurs des variables de recherche « bâtiment » et « explosion » fixées comme à la figure 1, un cheminement vers une solution localement maximale de cardinal 10. Peut-on faire mieux que 10 ?

La configuration de droite de la figure 2 montre en effet une solution *meilleure* que celle du centre puisqu'elle comporte 10 pièces, chacune respectant la contrainte de sécurité. Ainsi chaque configuration localement maximale fournit un minorant du maximum cherché. Cette dernière configuration nous permet d'affirmer que le nombre cherché, avec ce choix des valeurs des variables de recherche, est supérieur à 10.

Pour prouver qu'il est impossible de faire mieux que 10, on peut recourir à une majoration du nombre cherché. On peut utiliser pour cela l'argument que, sur deux cases consécutives, on ne peut pas mettre plus d'une pièce (si on en met deux, elles se détruisent nécessairement) et chercher s'il est possible de recouvrir le bâtiment choisi

1848, aujourd'hui, sa généralisation reste ouverte (Belle & Stevenson, 2009) : quel est le nombre maximum de reines qu'on peut placer sur un carré de taille strictement supérieure à 25 ?

par des couples de deux cases consécutives nous conduisant à un majorant égal à 10, comme le montre la figure 3.

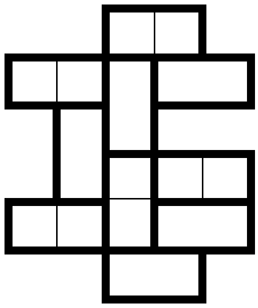


Figure 3 – Un recouvrement de la grille par 10 couples de deux cases consécutives

Le recouvrement de la figure 3 montre qu'on ne peut pas placer plus de 10 pièces sur la surface recouverte. On peut donc dire que le nombre cherché est inférieur à 10. Ainsi le nombre cherché est inférieur et supérieur à 10, il est donc égal à 10.

Ce problème, dans sa généralité, peut ainsi, comme l'illustre l'étude précédente, se décomposer en deux sous-problèmes : d'une part, comment construire une solution maximale, ce qui conduit à un minorant de l'optimum recherché, d'autre part, comment obtenir un majorant de cet optimum. La stratégie utilisée, dans l'étude précédente, pour résoudre ce second sous-problème a été le recouvrement de la surface quadrillée par des couples de deux cases consécutives.

Un atelier *Maths-à-modeler*

Il s'agit d'un ensemble de six ou sept séances avec une classe, autour d'une SR, à raison d'une séance d'une heure environ par semaine, qui a lieu dans l'emploi du temps normal de la classe. A la fin de l'atelier, a lieu un séminaire, à l'université, où les élèves présentent leurs résultats à une assemblée comportant entre autres des chercheurs, des participants à un autre atelier…

Les séances de l'atelier mettent en jeu des acteurs dont on pointe trois types de postures. Tout d'abord la *posture d'apprenti-chercheur* : c'est celle de chaque élève, qui travaille au sein d'un groupe ; il arrive aussi que certaines autres personnes (par exemple, des parents d'élèves) occupent aussi cette posture. Ensuite la *posture de gestionnaire de la SR* : elle est tenue par un ou plusieurs chercheurs, en mathématiques ou en didactique des mathématiques. Cette posture consiste à poser le problème, à apporter du matériel, à en faire vivre différentes instances, à étayer, à institutionnaliser sur le problème… Nous y reviendrons plus loin. Ces deux types d'acteurs pourraient suffire à faire vivre un contrat didactique dont l'objet est l'apprentissage de la démarche expérimentale en mathématiques et la communication de résultats scientifiques. Cependant, l'enseignant de la classe (c'est lui qui, au départ, sollicite le chercheur) est aussi présent, sa *posture est inhabituelle*, par rapport au contrat didactique usuel en vigueur lorsque les élèves cherchent habituellement un problème. L'enseignant de la classe ne connaît pas en général le problème, il aide à l'étayage, gère l'aspect organisationnel de l'atelier. Il pourrait prendre en charge l'institutionnalisation des connaissances relatives à la démarche ou aux notions en jeu.

Donnons un exemple dans chaque cas : d'une part, mettre en avant que le choix de travailler sur des cas où les nombres de cases de la grille étudiée sont « petits » (voir figure 4) et l'étude de ceux-ci permettent l'émergence d'une conjecture, qui est ensuite prouvée ; d'autre part, faire ressortir les deux types de maximum rencontrés, maximum local et maximum global.

Figure 4 - Dans ce groupe, les élèves se sont restreints à une grille 3 × 3, la contrainte de sécurité étant la même qu'à la figure 1 ; la solution proposée ne comporte que 3 pièces.

Cependant l'expérience montre qu'en général l'enseignant ne joue pas ce rôle. Inhabituel aussi est le critère de réussite pour l'élève : il ne s'agit pas pour lui de résoudre le problème, mais d'avancer dans la recherche, en établissant des résultats. Il est d'ailleurs essentiel d'aider les élèves à les repérer. Ceux-ci disposent d'un cahier de recherche qu'ils doivent compléter au cours des séances.

Les apprentissages visés pour les élèves et les savoirs en jeu

Ils sont de deux types. Comme nous l'avons dit plus haut, c'est l'apprentissage de la *démarche expérimentale en mathématiques* qui est visé avant tout. Nous illustrons d'abord ce point ci-dessous en reprenant les trois phases citées par Giroud (2011, p. 7 à 19), que nous illustrons par des exemples liés au problème des *caisses de dynamite*. Mais d'autres apprentissages sont en jeu, c'est ce que nous développons dans le second paragraphe.

L'apprentissage de la démarche expérimentale en mathématiques

Les phases décrites ci-dessous ne se rencontrent pas nécessairement dans cet ordre lors de la pratique d'une démarche expérimentale en mathématiques. Elles renvoient l'une à l'autre.

La phase de *proposition de nouveaux problèmes* se décompose en « – changer les instances du problème ; – changer la question du problème ; – changer les instances et la question. » (*Ibid.*, p.9). Le changement des instances a déjà été évoqué. Il s'agit, par exemple, de considérer d'autres contraintes de sécurité, comme les suivantes : « en carré » (les huit cases ayant un côté ou un sommet commun à celle où figure la caisse de dynamite doivent rester libres), en « ligne-colonne » (toutes les cases de la ligne et de la colonne qui ont pour intersection la case qui contient la pièce, ne doivent comporter aucune pièce). On peut aussi choisir d'autres formes de bâtiment, carrée, par exemple, de côté fixé ou non.

Si, avec les choix visibles à la figure 2, on trouve une solution localement maximale à 8 pièces, on peut se demander s'il existe d'autres configurations localement maximales à 8 pièces. On *change* ainsi *la question du problème*. On peut aussi chercher s'il existe des solutions de cardinal 9.

Enfin *changer les instances et la question* peut s'illustrer par le choix d'une autre forme de bâtiment, par exemple, carrée, et d'une autre contrainte de sécurité, par exemple, en ligne-colonne. On peut se demander si la stratégie de recouvrement (utilisée avec des dominos dans le cas de la figure 3) permet toujours de trouver un majorant du maximum recherché.

Passons à la deuxième phase (encore une fois, l'ordre n'est pas chronologique) d'*expérimentation-observation-validation* ; elle passe par l'utilisation ou la construction d'une stratégie, qui permette de répondre à la question posée. Giroud (*Ibid.*, p. 11) considère qu'une stratégie est « un ensemble de manipulations ordonnées sur des objets du problème ou sur leurs représentations ».

Reprenons, par exemple, les instances du problème déjà vues à la figure 1. On peut décrire, en utilisant des numéros (figure 5), l'ordre dans lequel sont placées les pièces. Il s'agit d'une *stratégie* de placement des pièces. Ce faisant, on *observe* que ce placement est conforme au problème (il n'y a qu'une seule pièce par case) et à la contrainte de sécurité (aucune pièce au dessus, en dessous, à droite et à gauche de chaque pièce posée), ce qui permet de *valider* la configuration.

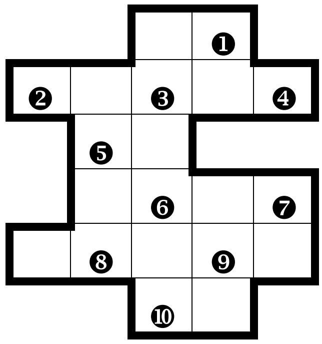


Figure 5 – Une stratégie pour placer les pièces, les numéros indiquant l'ordre dans lequel les pièces ont été placées

On pourrait ensuite se demander si cette stratégie (une case sur deux, avec un décalage d'une ligne à la suivante, qu'on peut voir aussi comme remplissage d'une diagonale sur deux, si on enferme la surface quadrillée dans un rectangle 5×6) peut s'utiliser de manière générale, sur d'autres types d'entrepôts. Ceci constitue alors un autre problème et renvoie à la première phase. Mais on peut aussi se demander si la solution obtenue est optimale.

L'expérimentation précédente peut aussi déboucher sur une troisième phase de *conjecture-preuve*. Par exemple, dans le cas de la figure 5, diverses autres expérimentations amènent à la conjecture qu'il est impossible de placer un onzième jeton sur cette surface. Il s'agit alors de prouver cette impossibilité (voir la preuve donnée au premier paragraphe).

D'autres savoirs mathématiques sont en jeu

On peut citer, par exemple, dans le cas des *caisses de dynamite*, les notions d'extremum local ou global. La figure 2 présente deux solutions localement maximales, l'une de cardinal 8, l'autre de cardinal 10. Il est impossible d'ajouter une pièce supplémentaire à chacune de ces configurations, tout en respectant la contrainte de sécurité. Ceci peut se prouver par essai sur chacune des cases libres. Mais on ne peut en déduire la valeur du maximum cherché. On sait seulement qu'il est supérieur au cardinal de ces solutions, donc qu'il est supérieur à 10. Un autre raisonnement est indispensable pour prouver que la solution à 10 pièces est effectivement globalement maximale. La compréhension du problème s'accompagne de celle de ces concepts. Cependant l'acquisition de ces derniers ne doit pas nécessairement être préalable à l'entrée dans le problème.

A ces savoirs notionnels s'ajoutent des savoir-faire liés à la mise en œuvre de raisonnements, souvent peu travaillés dans les classes. Par exemple, dans le cas du problème *des caisses de dynamite*, si l'on trouve une solution à n pièces (n entier naturel), on en déduit que le maximum cherché est supérieur à n. Par ailleurs, si l'on détermine un *motif* (une partie élémentaire), contenu dans la surface quadrillée étudiée – l'entrepôt – sur lequel il est impossible de mettre plus de p pièces (p entier naturel) et qu'on peut paver tout l'entrepôt avec k motifs (k entier naturel), alors le maximum cherché est inférieur à $k \times p$. On peut évidemment prendre pour *motif* une seule case, sur laquelle on ne peut pas placer plus d'une pièce, ce qui conduit à dire que le maximum cherché est inférieur au nombre de cases du quadrillage étudié. Mais ceci est trivial. L'idée est donc de déterminer un *motif* « plus gros », qui permette d'aboutir à une majoration du maximum plus pertinente. Le *motif* utilisé dans la preuve qui fait suite à la figure 2 est le *domino* : sur celui-ci, il est impossible de placer plus d'une pièce ; comme la figure 3 montre l'existence d'un pavage du quadrillage par 10 dominos, on en déduit que toute solution globalement maximale est de cardinal inférieur à 10.

Des moments-clés d'un atelier

La vidéo réalisée montre des extraits d'un *atelier Maths-à-modeler*, qui a eu lieu dans une classe de cinquième. Un premier extrait, sur lequel nous ne revenons pas dans ce texte, montre la présentation du problème aux élèves de cinquième. Les chercheurs sont des moniteurs (doctorants) de l'université Joseph Fourier. La forme sous laquelle le problème avait été posé aux élèves mettait en jeu des grenouilles somnambules (à la place des caisses de dynamite) et une mare couverte de nénuphars (à la place de l'entrepôt).

Voici le problème tel qu'il a été posé aux élèves. Entre parenthèses figurent des commentaires qui permettent au lecteur de faire le lien avec la forme du problème telle qu'elle a été présentée ci-dessus.

Des grenouilles (les pièces qu'on déplace ou les caisses de dynamite) vivent dans une mare (la surface quadrillée ou l'entrepôt) qui contient des nénuphars (les cases du quadrillage). La nuit, les grenouilles, chacune posée sur un nénuphar, sont somnambules et elles peuvent sauter sur les nénuphars voisins, suivant certaines modalités (les cases qui ne doivent pas être remplies ou la contrainte de sécurité) : par exemple, elles peuvent sauter sur les nénuphars de droite, de gauche, en bas ou en haut. La question est alors de savoir combien au maximum la mare peut contenir de grenouilles de façon à ce que les grenouilles ne se gênent pas mutuellement lorsqu'elles font une crise de somnambulisme.

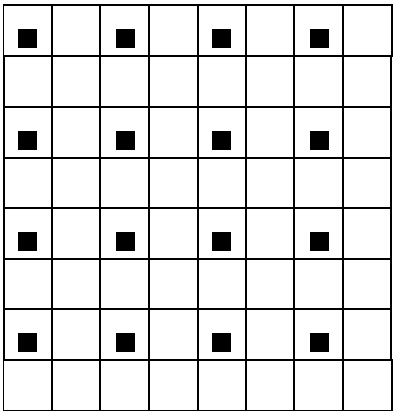
Cet habillage du problème ayant entraîné des difficultés de compréhension de la règle du jeu (certains élèves se sont demandé ce que faisait une grenouille après avoir sauté sur un autre nénuphar…), nous ne le reprenons pas dans le texte ci-après et nous en restons au problème des *caisses de dynamite*.

Dans la suite, nous nous centrerons sur quatre temps forts de cet atelier, à savoir *les relances*, *l'institutionnalisation*, *la préparation du séminaire* et *le séminaire*.

Les relances

Chaque groupe travaille sur une question qu'il a choisie. Le chercheur questionne sur l'avancement dans sa résolution. Les solutions qui ne respectent pas la contrainte sont rapidement invalidées. Les relances du chercheur concernent davantage le caractère maximal de la solution proposée. Nous donnons ci-après deux exemples.

Cette intervention du chercheur est relative au quadrillage 8 × 8 et à la contrainte de sécurité « en carré » (voir figure 6).



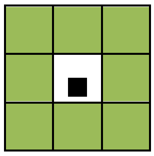
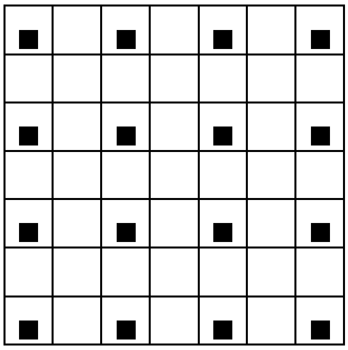


Figure 6 – Les élèves ont choisi de travailler sur un quadrillage 8 × 8, avec une contrainte de sécurité « en carré » (figure de droite) ; ils ont trouvé une solution de cardinal 16 (figure de gauche).

La question posée par le chercheur est alors : « Peut-on mettre une dix-septième pièce ? ». Les élèves répondent « non » parce qu'il est impossible de placer une dix-septième pièce sur les cases libres de la solution qu'ils ont trouvée (figure 20), tout en respectant la contrainte de sécurité. Il s'agit de leur faire comprendre que ceci ne permet pas de conclure que le maximum est 16. Un réarrangement des 16 pièces pourrait peut-être faire apparaître la possibilité de placer une dix-septième pièce. On peut seulement dire que le nombre maximum cherché est supérieur à 16.

Dans un autre groupe où les élèves traitent le problème sur une grille 7 × 7, avec la même contrainte de sécurité que ci-dessus, la question du chercheur est la suivante : « Tout à l'heure vous disiez qu'on en mettait 9, maintenant vous en avez 16 (voir figure 7), est-ce qu'on peut en mettre 17 ? ». Les élèves n'osent pas répondre. Le chercheur questionne à nouveau : « Vous savez ou vous ne savez pas ? ». Un élève répondant que c'est impossible, la nouvelle question est la suivante : « Tu penses que c'est pas possible ou c'est pas possible ? ». Quelques minutes plus tard, un élève du groupe est fortement encouragé à chercher à placer une dix-septième pièce.



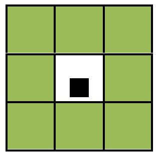


Figure 7 – Les élèves ont choisi de travailler sur un quadrillage 7 × 7, avec une contrainte de sécurité « en carré » (figure de droite) ; ils ont trouvé une solution de cardinal 16 (figure de gauche).

Le chercheur relève certains arguments donnés par les élèves et les encourage dans la preuve qu'ils ont, par exemple, prouvé que le nombre donné était le maximum. Ainsi, dans un groupe qui travaille sur le quadrillage 7 × 7 avec une contrainte de sécurité « ligne-colonne » (voir figure 7), le chercheur incite à noter l'argument trouvé par les élèves : « Comme il ne peut pas y avoir 2 pièces sur une même ligne, sinon elles se détruisent, il ne peut pas y avoir plus d'une pièce par ligne, donc pas plus de 7 pièces sur un 7 × 7. ».

Nous pointons ainsi la forme des relances de la part du chercheur qui gère la situation de recherche : il questionne les élèves (« Etes-vous sûrs que…? Pourquoi…? », il lève les malentendus en reprécisant la règle du jeu, le vocabulaire (ce qu'on appelle une diagonale), il ne donne pas de réponse, il relève les résultats, il pointe les arguments de preuve intéressants, il incite à prendre des notes pour pouvoir argumenter devant un public.

L'institutionnalisation

Chaque séance se clôt par un bilan faisant état de l'avancée de la recherche dans chaque groupe. Cette phase amène les élèves à formuler eux-mêmes les résultats de leurs recherches, à préciser le statut de leurs énoncés (conjecture ou théorème), à comprendre ce qu'on appelle un *résultat* en mathématiques. Elle montre aux élèves l'importance de la preuve et surtout que celle-ci ne consiste pas en un exercice formel de rédaction.

La vidéo montre, par exemple, un élève qui formule, au nom de son groupe, un énoncé relatif à un quadrillage 7 × 7 et la contrainte de sécurité « ligne ». Il affirme qu'il s'agit d'une propriété : « Comme sur le plateau, il y a sept lignes, donc une grenouille par ligne, donc il y a sept grenouilles. ». Le chercheur écrit au tableau que, dans ce cas, « le maximum sur un plateau 7 × 7 est égal à 7 grenouilles. », puis la preuve donnée par l'élève. Il lui demande ensuite si l'argument donné est suffisant pour établir que le maximum est égal à 7, à savoir qu'il y a une grenouille par ligne. L'élève acquiesce. Ceci montre que le raisonnement n'est pas complètement compris, par l'élève ou par le groupe. L'argument donné prouve en effet qu'on ne peut pas placer plus de 7 pièces ou encore que le maximum cherché est inférieur à 7. Le chercheur rajoute : « Et comment tu fais ? Un exemple de solution, c'est quoi ? ». C'est en effet l'exhibition d'une configuration à 7 pièces (par exemple, sur une diagonale), respectant la contrainte de sécurité « ligne », qui prouve que le maximum cherché est supérieur à 7. Nous faisons l'hypothèse que les élèves n'ont pas saisi la nécessité d'une preuve en deux temps et que cette première partie du raisonnement, à savoir l'exhibition d'une configuration localement maximale de cardinal 7 – qui est pourtant celle que les élèves ont découverte en premier – a été écrasée par la deuxième partie formulée ci-dessus. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée par le fait que les élèves, qui ont étudié le quadrillage 8×8 et la contrainte de sécurité « ligne-colonne », omettent la même partie du raisonnement.

Le film montre aussi, par exemple, l'écriture au tableau d'une conjecture établie par un groupe, concernant un quadrillage $L \times L$ et une contrainte de sécurité « diagonale », à savoir que le maximum est égal à $L + L - 2$.

La rédaction par chaque groupe du compte-rendu de sa recherche, parfois corrigé après formulation devant toute la classe, renforce cette institutionnalisation sur le plan de l'écrit et aide à la préparation du séminaire qui clôt l'atelier.

La préparation du séminaire

Cette préparation du séminaire fait l'objet d'une séance, en général, la dernière de l'atelier avant le séminaire lui-même. Il est expliqué aux élèves qu'ils vont avoir à présenter le problème et leurs résultats à l'université, devant un public de chercheurs et d'autres élèves, qui auront eux-mêmes cherché un autre problème. Ce type de séance est peu présent habituellement dans les classes.

La vidéo montre une intervention de la professeure de la classe qui insiste sur le fait qu'il faut s'organiser pour savoir « qui fait quoi ». Une élève pose au chercheur la question suivante : « Au niveau de toutes les solutions, vous savez ce que c'est ? ». Il reformule ainsi : « Tu veux dire si je sais si elles sont justes vos solutions ? ». L'élève acquiesçant, le chercheur répond : « C'est vous qui savez si vous avez démontré… Il faut que vous sachiez à quel moment, c'est une propriété démontrée, à quel moment c'est une conjecture… ». La responsabilité scientifique est ainsi renvoyée aux élèves.

Le chercheur et, éventuellement le professeur de la classe, aident à l'organisation de la présentation, sachant que le public ne connaît pas le problème. Il faut donc d'abord le présenter, puis construire l'exposé des résultats, distinguant bien ce qui relève de la conjecture ou du résultat.

Le séminaire

Il comporte en général la présentation de deux ateliers, qui ont eu lieu à des endroits différents. L'extrait choisi de la vidéo renvoie à un seul atelier qui montre un exposé construit à partir de transparents (figure 8) et qui comporte une présentation de la classe et des chercheurs, du problème et des différentes instances qui ont étudiées, ainsi que des résultats obtenus par les élèves, accompagnés des preuves. Chaque élève de la classe participe à cette présentation. L'exposé est suivi de questions, posées soit par des chercheurs, soit par d'autres élèves.

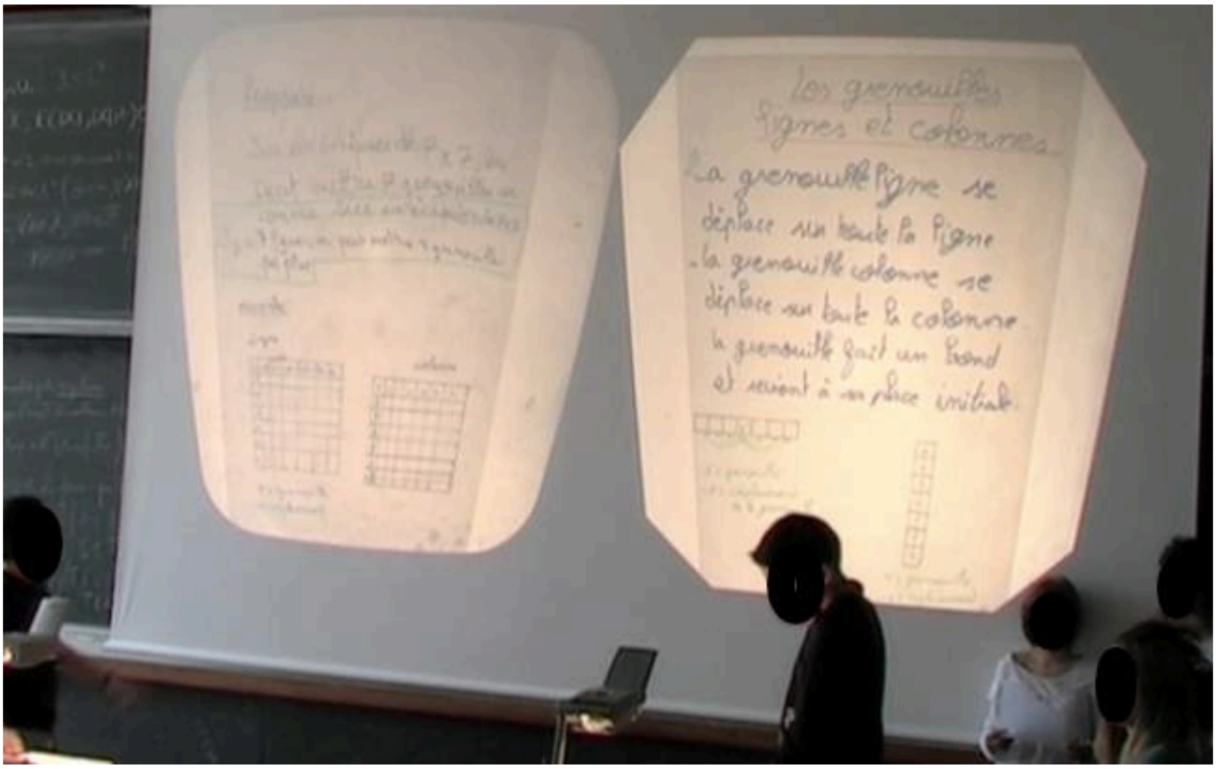


Figure 8 – Lors du séminaire, chaque élève de la classe participe à la présentation des questions étudiées et des résultats obtenus à un public constitué de chercheurs en mathématiques, d'enseignants, d'élèves d'un autre établissement, de parents d'élèves…

Nous n'évoquons ci-dessous qu'un seul épisode montré dans l'extrait de vidéo. La question étudiée porte sur un quadrillage 7 × 7 et une contrainte de sécurité « ligne et colonne ». Un élève a présenté le raisonnement suivant :

> Sur un échiquier 7 × 7, on a réussi à mettre 7 grenouilles, donc on sait qu'on peut en mettre au moins 7, et là, on a séparé le terrain en 7 parties (voir figure 15), et sur une partie, on peut mettre que une grenouille, donc, au final, on peut mettre que 7 grenouilles.

A la fin de l'exposé, un chercheur du public demande à un élève de revenir sur un transparent comportant la figure 9.

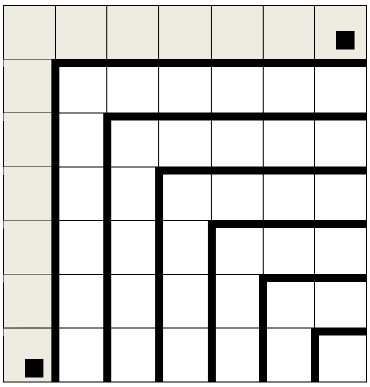


Figure 9 – La figure proposée sur transparent par un élève

Le chercheur fait remarquer à un élève (qui fait partie du groupe qui a travaillé sur le quadrillage 7 × 7 et la contrainte de sécurité « ligne et colonne ») que, si on place une pièce sur la case en haut à droite (voir figure 9) et sur la case en bas à gauche (voir figure 14), celles-ci ne se détruisent pas et que, par conséquent, sur la partie grisée de la figure 14, on peut mettre plus d'une grenouille. L'élève répète cependant qu'on ne peut mettre qu'une grenouille sur la zone grisée. Plusieurs élèves, persuadés qu'on ne peut mettre que 7 grenouilles, répètent l'argument, malgré l'invalidation proposée par le chercheur. L'un d'eux, ne se laissant pas perturber, tente de donner un dernier argument malgré l'insistance de l'organisateur du séminaire à laisser la place à l'autre groupe. Il dit :

> Il y a 7 lignes et 7 colonnes et, la grenouille, elle peut prendre qu'une ligne et qu'une colonne, donc on peut mettre que 7 grenouilles.

Le chercheur lui dit alors qu'il s'approche d'un argument plus pertinent. Il suffirait en effet de dire que chaque ligne ne peut contenir plus d'une pièce et que, le quadrillage étant recouvert par 7 lignes, il ne peut contenir plus de 7 pièces (on pouvait faire le même raisonnement avec les colonnes à la place des lignes).

Mais ce qui est à souligner, c'est que les élèves sont convaincus du résultat – 7 – et qu'ils ne se laissent pas intimider par le public, même si certains de ses membres sont des chercheurs en mathématiques. Cette attitude d'élève, qui consiste à défendre sa preuve, est assez rare dans les classes.

Conclusion

Le dispositif que nous venons de décrire a toute sa place dans le temps scolaire. Il permet en effet l'apprentissage par les élèves de la démarche expérimentale et de la communication en mathématiques, en plus de celui de concepts mathématiques majeurs tels que les notions d'extremum. La *preuve* y tient une place centrale. Certains de ces apprentissages, pourtant présents dans les programmes de l'enseignement secondaire, ne sont pas favorisés par le dispositif classe habituel. L'utilisation d'une vidéo non naturaliste, c'est-à-dire ne respectant pas le temps réel, outre qu'elle nécessite une préparation en amont, présente l'inconvénient de raccourcir trop le temps de la recherche des élèves, cachant l'essentiel du cheminement des élèves, mais aussi l'avantage de permettre, en un temps court, la découverte de certains temps forts d'un atelier *Maths-à-modeler*. Sous réserve d'une mise en situation préalable des étudiants ou des professeurs, il nous semble pertinent d'utiliser un tel montage vidéo en formation des futurs enseignants ou en formation continue des enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Gandit, M. (2004) Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : deuxième partie. *Petit x, 66* (49-82).

Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011) Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. In M. Grangeat (Ed.) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique : pratiques de classe, travail collectif enseignant et acquisitions des élèves* (pp 48-61). Lyon : Ecole Normale Supérieure.

Giroud, N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

Godot, K. (2005) *Situation recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation, Exemple de la roue aux couleurs.* Thèse de doctorat, Université J. Fourier Grenoble I.

Gravier, S., Payan, C. & Colliard, M.-N. (2008) Maths à Modeler Pavages par des dominos. *Grand N, 82* (53-68).

Grenier, D. & Payan, C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1) (59-100).