

## VARIABILITE, INCERTITUDE, ERREUR

Jacques TREINER

Université Pierre et Marie Curie et Sciences-Po, Paris

**Résumé** – Le caractère aléatoire de tout processus de mesure physique peine à être pleinement reconnu, et pas seulement dans l'enseignement. A preuve, la référence persistante à la notion de « valeur exacte » d'une grandeur physique qui, bien que proclamée inconnue, est postulée exister, alors qu'une analyse même succincte de situations concrètes montrent qu'il n'en est rien. Cette conception, prise au sens strict, implique que les incertitudes résultent d'imperfections (incertitudes) qui empêcheraient d'atteindre cette valeur vraie. En réalité, les grandeurs physiques sont modélisées par des variables aléatoires, et les incertitudes de mesure ont leur origine dans la variabilité propre à toute variable aléatoire. Cette dispersion des valeurs observées, loin d'être une imperfection, représente une connaissance positive, incompressible dans des conditions données, sur les systèmes physiques. Quant au terme « erreurs », il convient de le réserver à ce qu'on peut éviter de commettre, c'est-à-dire les « erreurs systématiques ».

Dans le numéro 928 du BUP de novembre, François-Xavier Bally et Jean-Marc Berroir nous proposent une mise au point assez complète sur les « incertitudes expérimentales ». Je n'ai pas de remarque sur tous les développements techniques de l'article, très complets, mais en revanche la façon d'introduire les notions de base contient des incohérences susceptibles de déclencher une certaine perplexité chez un élève qui prendrait au sérieux le sens de mots.

Nous avons tous, en tant qu'élève, étudiant, ou même enseignant, vécu ces instants où l'on a ce vif sentiment d'inconfort produit par une argumentation qui, soudainement, révèle une faille logique. L'élève motivé et têtu se dit : nous verrons cela plus tard, et il poursuit ; le moins motivé se dit : si c'est ainsi, ce n'est pas pour moi, et il décroche. Je connais ainsi une personne douée en mathématique qui se souvient, longtemps après l'événement, s'être dit que la physique n'était pas pour elle après qu'un professeur ait énoncé cette idée qui semblait pourtant aller de soi : « une force est un vecteur ». La confusion entre le phénomène et sa représentation avait fermé pour longtemps une porte dans le cerveau de l'élève sans que le professeur, évidemment, s'en aperçoive, tant l'habitude de prendre le mot pour la chose lui était devenue une seconde nature.

Les incohérences en question sont, hélas, présentes dans un certain nombre de textes officiels concernant la métrologie. Ce n'est pas une raison pour les reprendre telles quelles dans notre enseignement. Il est plus ...éducatif, de leur montrer que même les textes officiels, parfois...

La discussion ci-dessous s'inspire du document d'accompagnement de Terminale S des programmes de l'an 2000, document intitulé « Variabilité et incertitudes dans les

mesures physiques »<sup>1</sup>, rédigé avec Daniel Beaufiles après discussion avec Claudine Schwartz.

Voici les quelques phrases-clef de l'article de Bally et Berroir que je voudrais analyser ici.

P1 : « On introduit d'abord la notion d'incertitude. Puis on montre comment, à l'aide d'une étude statistique, on peut quantifier les incertitudes associées au caractère aléatoire des processus de mesure. »

P2 : « Lors de la mesure d'une grandeur physique  $x$ , l'erreur est la différence entre la valeur mesurée  $x$  et la valeur vraie  $X$ . La valeur vraie est en général inconnue (puisqu'on la cherche) ».

P3 : « Le résultat de la mesure est caractérisé par une distribution de probabilité répartie autour de la valeur vraie dans le cas d'erreurs purement aléatoires ».

P4 : « En l'absence d'erreur systématique, l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur vraie  $X$  tandis que l'incertitude  $\delta x$ , directement reliée à l'estimation de l'écart-type de la distribution, définit un intervalle dans lequel la valeur vraie de  $X$  se trouve avec un niveau de confiance connu. On choisit le plus souvent comme incertitude l'estimation de l'écart-type de la distribution. On parle alors d'incertitude-type ».

P5 : « Ayant obtenu la valeur mesurée avec son intervalle d'incertitude, on la compare à la valeur de référence (pour une valeur expérimentale de référence, ne pas parler de valeur exacte, parler de valeur tabulée) ».

P6 : « On s'occupe ici de la mesure d'une grandeur physique  $x$  dont les sources de variabilité sont uniquement aléatoires. Dans les deux premiers paragraphes, on décrit les méthodes statistiques qui permettent d'évaluer la valeur vraie de  $x$  et l'incertitude-type ».

Allons tout de suite à l'essentiel : cette notion de « valeur vraie ». Elle est inconnue, nous dit-on, puisqu'on la cherche, mais en tout cas *elle existe*.

Or, à l'évidence - une évidence que l'élève peut percevoir - cette valeur vraie *n'existe pas* ! Et voilà où, au lieu de partir de la perception intuitive du monde qu'a l'élève, pour élaborer une construction qui va allier physique et mathématique et le faire progresser vers l'assimilation de notions générales, on le condamne à installer dans sa tête une chimère dont ni lui, ni les rédacteurs ne peuvent se débrouiller sans contradiction. Reste à obéir aux injonctions - ce qui n'est pas l'idéal que nous cherchons à transmettre aux élèves.

Quelques exemples pour commencer :

Quelle est la valeur vraie de la largeur du bureau sur lequel l'élève travaille ? Quelle est la valeur vraie de la taille de l'élève, de son poids ? Quelle est la vraie valeur du nombre de tirages pile lors de  $N$  lancers de dé ? Quelle est la vraie valeur de la

---

<sup>1</sup> Document consultable à l'adresse : <http://www2.cndp.fr/archivage/valid/38815/38815-5719-5536.pdf>, page 88. Document TG5 du Cédérom d'accompagnement des programmes de Terminale S, SCEREN CNDP.

température ou de la pression de la pièce ? Quelle est la vraie valeur du nombre d'habitants vivant en France ? Quelle est la vraie valeur de l'énergie du premier état excité de l'atome d'hydrogène ? Quelle est la vraie valeur de la durée de vie d'UN atome radioactif donné ? Quelle est la valeur vraie de la fréquence d'une note de piano ?

Poser ces questions, c'est y répondre.

La valeur de la largeur du bureau dépend de l'endroit où on la mesure. Si le meuble est très bien fait, il suffit de descendre l'échelle d'observation pour retrouver de la variabilité locale. Et à l'échelle atomique, on verra sans arrêt des molécules quitter le bois ou venir s'y agréger.

La taille d'un individu dépend de l'heure du jour. Elle est plus grande le matin, plus petite le soir. Le poids dépend aussi du moment où on le mesure. Ces fluctuations ne sont pas une incertitude, et il est intéressant de s'interroger sur leur origine.

Le nombre de pile est, en moyenne,  $N/2$ , avec une variabilité de l'ordre de  $\sqrt{N}$ . Ce résultat est une connaissance positive, pas une incertitude.

Outre le fait que la température n'est pas uniforme dans la pièce, il s'agit d'une grandeur macroscopique liée à la valeur moyenne de l'énergie cinétique des molécules. Cette valeur moyenne est elle-même une grandeur aléatoire dont les fluctuations sont en racine du nombre de molécules. La pression est reliée à l'énergie cinétique moyenne par unité de volume. C'est également une variable aléatoire. Les deux grandeurs ont donc des fluctuations qui deviennent de plus en plus mesurables à mesure qu'on diminue le volume de l'échantillon. Ces fluctuations sont négligeables à l'échelle macroscopique, mais elles sont bien présentes.

Le nombre d'habitants vivants en France fluctue sans arrêt par les entrées-sorties du territoire, les décès et les naissances. Pour ne considérer que ces deux derniers nombres, ils sont du même ordre de grandeur (la population varie lentement), et valent environ 800 000 par an. Si l'on distribue de façon uniforme ces événements au cours de l'année, cela fait en moyenne un changement d'unité toutes les 20 secondes. Le nombre d'habitants est donc impossible à déterminer – un recensement prend plus de 20 secondes à effectuer !- et si l'on effectue plusieurs recensements, on va trouver une variabilité dépendant du temps que prend le recensement. Si l'opération prend un an, la variabilité sera de l'ordre de la racine des 1 600 000 tirages +1, -1 correspondants aux naissances et aux décès, soit environ 1350. Si cela prend six mois, la variabilité sera de l'ordre de racine de 800 000, soit 900 etc. Signalons au passage que les recensements actuels sont faits pas sondages, qui introduisent par eux-mêmes une dimension statistique.

Chaque état possède une largeur en énergie qui est reliée à sa durée de vie. La durée de vie des états quantiques est une propriété fondamentale sur laquelle repose, par exemple, le mécanisme d'inversion des populations dans un laser. Nommer incertitude sur l'énergie la largeur d'un état serait un contresens physique total.

La durée de vie d'un atome radioactif est une variable aléatoire (lié à l'effet tunnel en mécanique quantique), et la probabilité de se désintégrer dans un certain intervalle de temps est indépendante du temps écoulé (mort sans vieillissement). La loi de désintégration n'est pas une « incertitude » sur la durée de vie, c'est une connaissance sur le processus de désintégration.

Une note de piano est caractérisée par un spectre de fréquences. Le fait que le son ne soit pas composé d'une seule fréquence n'est pas une « incertitude » sur la fréquence,

c'est une connaissance positive sur le son : par exemple, le spectre est relié au timbre de l'instrument.

En parcourant ces exemples, le lecteur aura peut-être le sentiment d'un mélange des genres suspect : certains cas semblent relever explicitement des probabilités, comme le jeter de dés, d'autres pas, comme la largeur du bureau. Mais précisément, mon but ici est de souligner que l'on est *toujours* face à des grandeurs aléatoires. Les différences tiennent à la forme des lois de probabilité, qui sont plus ou moins « piquées » autour de la valeur moyenne, voire pas piquées du tout comme dans le cas de la durée de vie d'un noyau radioactif. En ce sens, *effectuer une mesure doit être considéré comme le tirage d'une variable aléatoire* dont on cherche à déterminer la loi de probabilité !

Convient-il de distinguer les phénomènes qui relèvent de la mécanique quantique ? Ce n'est pas essentiel ici, puisque n'interviennent dans la discussion que des probabilités, et non les *amplitudes* de probabilité. Précisons un point, à ce sujet : les « inégalités de Heisenberg » sont parfois désignées sous la dénomination historique de « relations d'incertitude ». Mais cette dénomination masque leur sens physique réel, comme nous l'avons vu pour la largeur d'un état quantique. Reprenons l'exemple du son musical. Il existe une relation de type Heisenberg entre la durée du son et la largeur de son spectre en fréquence : plus le son est bref, plus son spectre est large, c'est une simple propriété déduite de la transformation de Fourier. Dira-t-on pour autant que la fréquence est « incertaine » ? Evidemment non. La connaissance du spectre, de même que la durée du son, constituent des connaissances positives sur le son.

Que conclure de ces exemples ? Qu'il n'y a pas de valeur vraie, que toute grandeur physique est distribuée suivant une loi de probabilité qui dépend du système. La notion première, c'est donc celle de *variabilité* des grandeurs physiques. Les exemples ci-dessus montrent aussi que, à cause de ces fluctuations, les grandeurs physiques n'ont de sens qu'à une certaine échelle et pour un certain usage. L'échelle moléculaire est non pertinente si l'on cherche à savoir seulement si le bureau va passer par l'ouverture de la porte. La température d'une molécule n'a pas de sens. Une variation de quelques milliers sur une population de 60 millions est sans importance pratique etc.

Cette discussion est non seulement possible à mener avec les élèves, mais elle *doit* l'être, car elle peut aiguïser leur sens physique, et mieux leur faire comprendre le sens de la production des nombres dans l'acte de mesure.

Donc, exit la « valeur vraie ». Que reste-t-il ? La distribution des valeurs de la grandeur. Le plus simple, c'est de caractériser cette distribution par une valeur moyenne et un écart-type (des moments de la distribution plus élevés que l'ordre deux peuvent être parfois nécessaire). L'écart-type est directement relié à ce qu'on a pris l'habitude d'appeler « incertitude », mais en fait, ainsi que les exemples le montre, le terme d'incertitude est inapproprié pour décrire une propriété du système. La variabilité est intrinsèque, elle est incompressible, elle fait partie de la connaissance que l'on a du système.

Maintenant que nous nous sommes débarrassés de la « valeur vraie », reprenons les phrases P1-P6.

Dans P1, le caractère aléatoire est affecté uniquement au processus de mesure. Mais l'appareil de mesure est un système physique comme un autre. S'il est siège de variabilité, pourquoi le système mesuré n'en serait-il pas aussi ? Ah non, c'est interdit, il a été dit qu'il existait une « valeur vraie » ! Voilà une contradiction qui saute.

Dans P2, on ne cherche plus la valeur vraie, qui a disparu, mais on cherche la distribution des valeurs de la grandeur physique. Si la variabilité est faible, on se contentera de la valeur moyenne. Si elle est observable, on apprend quelque chose de plus.

Dans P3, il suffit de (et il faut !) remplacer valeur vraie par valeur moyenne.

Dans P4, on peut supprimer toute référence à la valeur vraie. De plus, pourquoi introduire une notion nouvelle, celle d'incertitude-type ?? Les élèves voient en cours de mathématiques la notion d'écart-type, pourquoi ne pas s'en satisfaire ? Parce que nous sommes en physique, en chimie, en biologie, et qu'il faut marquer sa différence ? Pourquoi ne pas leur faciliter la tâche de compréhension en leur montrant que les notions vues *là* peuvent servir *ici* ?

Dans P5, brusquement, la valeur vraie est interdite. Pourquoi ?? Valeur de référence, c'est très bien. Pourquoi introduire une nouvelle notion, celle de valeur *tabulée* ?? Pourquoi multiplier les termes, sans ajouter de contenu ?

Dans P6, la notion d'erreur : ce qu'on détermine, c'est une valeur moyenne, qu'on espère proche de la valeur de référence.

Venons-en au terme d'erreur, justement. Le mot erreur, comme son nom le suggère, devrait être réservé à *ce qu'on peut éviter*, donc à l'erreur systématique, qu'elle vienne de l'appareil ou de l'opérateur. Pour le reste, insistons sur la variabilité, et introduisons prudemment le terme d'incertitude en évitant son contenu négatif lié au préfixe « in ». Lorsque les élèves ont bien compris de quoi il s'agit, alors nous pouvons leur parler du poids historique des mots, et parler de propagation déterministe des incertitudes, ou d'écart-type d'une variable aléatoire fonction d'autres variables aléatoires. Il sera également facile de discuter l'origine des incertitudes : la variabilité du phénomène étudié, la variabilité des appareils de mesure, qui sont des systèmes physiques comme les autres, la variabilité de l'opérateur, et l'impossibilité, parfois, d'attribuer la variabilité observée à l'une ou l'autre cause.

Et pour terminer sur le sens des mots, il est utile également de distinguer deux sens (au moins) du terme « incertitude » : l'incertitude au sens de l'écart-type d'une loi de probabilité, et l'incertitude *non statistique* liée à une ignorance. Prenons l'exemple de la météorologie et de la climatologie. La météorologie s'efforce de calculer UNE trajectoire à partir de données initiales. C'est très difficile car la dynamique du système relève du chaos déterministe : de petites fluctuations dans les conditions initiales s'amplifient exponentiellement avec le temps. La climatologie s'intéresse à l'ENSEMBLE des conditions météorologiques en un lieu donné. Cet ensemble est caractérisé par des valeurs moyennes et des écarts par rapport à ces valeurs moyennes. Pas plus de « valeurs vraies » ici qu'ailleurs ! Il est même très important de connaître les écarts en question, car ils renseignent sur les événements extrêmes qui peuvent survenir. Les climatologues utilisent en fait les mêmes codes informatiques que les

météorologues. Simplement, déterminer les propriétés *statistiques* du temps qu'il fait, ou fera, est plus facile que suivre *une* trajectoire particulière.

En revanche, il existe des sources d'incertitudes liées à notre ignorance de certains processus. La présence de nuages, par exemple, est difficile à prévoir, car la formation des gouttelettes est un phénomène hors équilibre qui est très sensible à la présence d'aérosols dans l'atmosphère, lesquels servent de centres de nucléation pour le changement de phase vapeur-liquide. Or les nuages ont un double effet sur le climat : ils ont tendance à réchauffer les basses couches de l'atmosphère, tout en réfléchissant une partie du rayonnement solaire. C'est la raison pour laquelle les incertitudes sur le rôle des nuages dans le réchauffement climatique ne diminuent pas. Mais si l'on maîtrisait mieux la théorie, ou la façon de l'implémenter dans les codes climatiques, ces incertitudes diminueraient. Les incertitudes liées à la variabilité d'un phénomène, au contraire, sont stables et ne diminuent pas lorsque les connaissances progressent.