MATH & MANIPS
OU COMMENT INTEGRER DES MANIPULATIONS DANS LES CLASSES POUR FAVORISER L'APPRENTISSAGE DES GRANDEURS ET DE LA PROPORTIONNALITE

Marie-France Guissard, Valérie Henry,
CREM, FUNDP
Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen

Recherche

L'atelier présente un travail actuellement en cours au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Nivelles (Belgique). Il s'agit de la conception et de la mise au point de séquences d'apprentissage appelées *Math & Manips*, intégrant des manipulations, et destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement fondamental et secondaire. L'apport de telles activités dans l'apprentissage de la proportionnalité au collège est analysé dans une thèse de doctorat parallèlement en cours aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur.

La recherche propose d'insérer dans les cours de mathématiques des manipulations afin de favoriser la construction de certains concepts. Ces *Math & Manips* visent à provoquer chez les élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. En particulier, les activités destinées au collège confrontent les élèves à des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité.

Nous avons choisi de travailler dans chacune des *Math & Manips* des rapports de grandeurs, en limitant le recours aux mesures au strict nécessaire. Le passage du contexte expérimental aux modèles mathématiques se fait via différents registres. Par exemple, les données recueillies au cours des manipulations sont placées dans des tableaux de nombres et sont ensuite reportées dans des graphiques, ce qui permet de mettre en évidence divers aspects de la comparaison entre différents modèles.

Le contexte dans lequel les élèves évoluent lors de la réalisation d'une *Math & Manip* les amène tout naturellement à entrer dans des démarches où la modélisation prend tout son sens. En effet, notre volonté de confronter les conceptions des élèves avec le vécu expérimental puis d'en faire naître un modèle mathématique nous conduit à explorer différentes étapes d'un processus de modélisation telles que : conjecture, protocole, expérimentation, interprétation des résultats, construction d'un modèle, validation, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux, exploitation du modèle, …

Activités

L'atelier présente trois *Math & Manips* déjà expérimentées dans des classes. Les deux premières sont prévues pour des élèves du collège. Une activité analyse notamment l'effet de la duplication des dimensions d'une figure sur son aire et l'autre explore les liens entre le volume d'un cylindre et sa hauteur d'une part, entre le volume d'un cylindre et son diamètre d'autre part. La troisième séquence d'apprentissage a été conçue pour des élèves du lycée. Elle étudie les liens fonctionnels entre le volume d'un cône et sa hauteur. Ces trois activités sont brièvement décrites ci-après.

Math & Manip pour le début du collège

Cette activité consiste à proposer aux élèves une situation qui permet d'observer ce qu'il advient de l'aire d'un polygone lorsqu'on multiplie les longueurs de ses côtés par un nombre entier.

Tout d'abord, il est demandé aux élèves de reproduire deux dessins en doublant chacune des longueurs, y compris les distances entre les éléments des dessins. Les dessins de départ accompagnés de leur agrandissement sont illustrés ci-dessous.

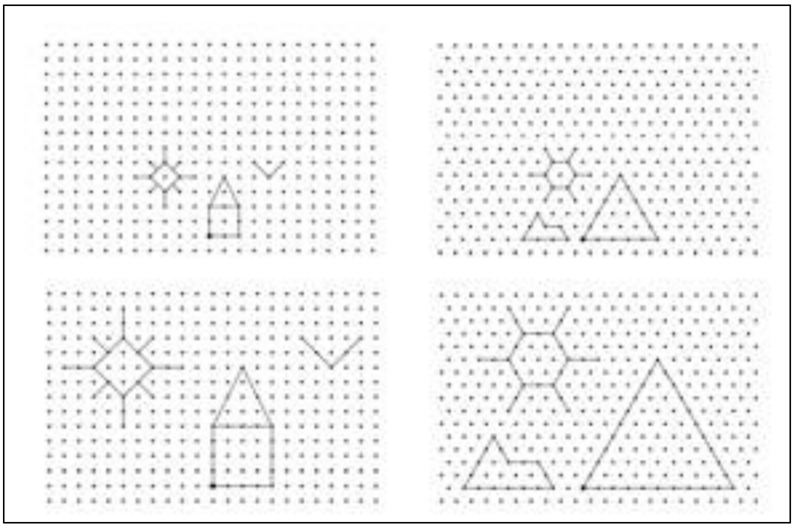

Figure 1 – Les dessins de départ accompagnés de leurs agrandissements

Ensuite, après avoir répertorié les différents polygones figurant dans les dessins, les élèves comparent l'aire de chaque polygone initial avec celle de son agrandissement. Diverses procédures sont mises en œuvre. Certains élèves tentent d'utiliser les formules de calcul d'aire connues mais sont rapidement limités par cette démarche. D'autres dénombrent les cellules carrées ou triangulaires contenues dans chaque polygone. Une troisième manière de procéder consiste à remarquer que certains polygones peuvent être reproduits quatre fois dans leur agrandissement.

Quelle que soit la méthode utilisée, les élèves arrivent à une même conclusion : lorsqu'on double les longueurs des côtés des polygones rencontrés, leur aire est multipliée par quatre. Est-ce vrai pour tout polygone ? La suite de l'activité a pour but de répondre à cette question.

Lorsqu'on s'intéresse au carré, il est facile de remarquer comment évolue son aire en fonction de la longueur du côté et ce, même lorsqu'on multiplie sa longueur par un facteur autre que deux. Il suffit d'observer les pavages des carrés successifs au moyen du carré initial.

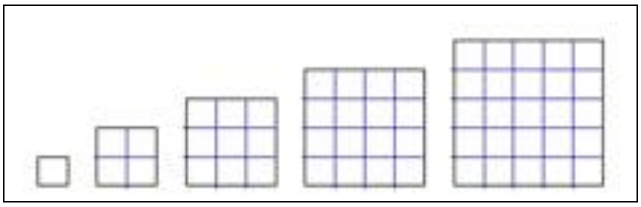

Figure 2 – Les pavages des carrés successifs au moyen du carré initial

Essayons donc d'appliquer la méthode du pavage à d'autres polygones. Le pentagone en forme de sphinx et un triangle quelconque sont proposés aux élèves. La consigne est de paver le polygone de côté double au moyen du polygone semblable de départ. Après quelques essais, les élèves obtiennent les puzzles suivants et observent que quatre figures de départ sont nécessaires pour réaliser le pavage demandé.

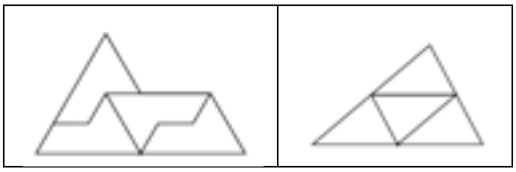

Figure 3 – Pentagone en forme de sphinx et triangle : après quelques essais, les élèves obtiennent ces puzzles

L'hexagone régulier est proposé ensuite. Les élèves remarquent qu'il n'est plus possible de le paver avec quatre hexagones entiers, il faut en découper un en trois losanges. Cependant, malgré la nécessité de découper, le pavage reste facile à réaliser. Par contre, le pavage d'un polygone en forme de tête de chat pose bien plus de difficultés.

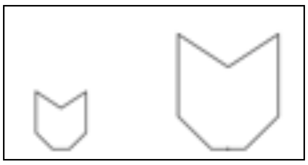

Figure 4 – Polygone en forme de chat : le pavage pose bien plus de difficultés

Après un temps de recherche et de réflexion, on conclut qu'il n'est pas si facile de paver tout polygone même en procédant à des découpages. Pour continuer, les élèves sont invités à réfléchir aux polygones qui leur ont paru facile à paver. En premier vient le carré mais il est impossible de découper le polygone en forme de tête de chat uniquement en carrés. Par contre, le pavage du triangle quelconque a également été réalisé rapidement et la « tête de chat » est décomposable en triangles.

Chaque petit triangle peut être reproduit exactement quatre fois dans le grand triangle qui lui est semblable. Ceci signifie que l'aire du polygone dont les longueurs des côtés ont été doublées est bien quatre fois plus grande que celle du polygone de départ.

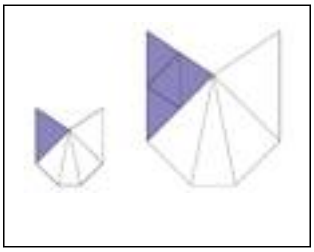

Figure 5 – Chaque petit triangle peut être reproduit exactement quatre fois dans le grand triangle qui lui est semblable

Ce procédé peut être appliqué à tout polygone car tout polygone est décomposable en triangles. La conclusion suivante peut enfin être formulée : « un polygone dont les longueurs des côtés ont été multipliées par deux a une aire égale à quatre fois l'aire du polygone initial ».

Si les longueurs sont multipliées non par deux mais par trois, que devient l'aire des polygones ? Un début de réponse a été donné par le pavage du carré de côté triple : son aire est multipliée par neuf. Est-ce vrai pour tout polygone ? Si cela se vérifie pour un triangle quelconque, le découpage d'un polygone quelconque en triangles permettra la généralisation de la propriété.

Les élèves obtiennent sans trop de peine le puzzle illustré ci-dessous, neuf triangles sont effectivement nécessaires pour paver un triangle semblable dont les longueurs des côtés ont été multipliées par trois.

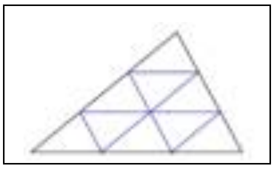

Figure 6 – Les élèves obtiennent sans trop de peine ce puzzle

La figure suivante illustre pour un pentagone quelconque la démarche qui démontre la généralisation.

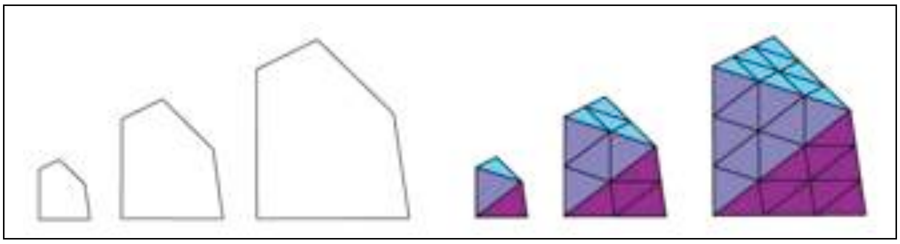

Figure 7 – Pour un pentagone quelconque

Si les longueurs ne sont multipliées ni par deux ni par trois mais par un autre facteur, que devient l'aire des polygones ? Afin d'aller plus loin dans la généralisation, il faudrait réaliser les pavages des agrandissements successifs d'un triangle quelconque par un facteur entier. Nous n'envisageons pas de mener cette démarche plus loin.

Les carrés de côté double, triple, quadruple… montrent que les aires sont respectivement quatre fois, neuf fois, seize fois plus grandes que celle du carré initial.

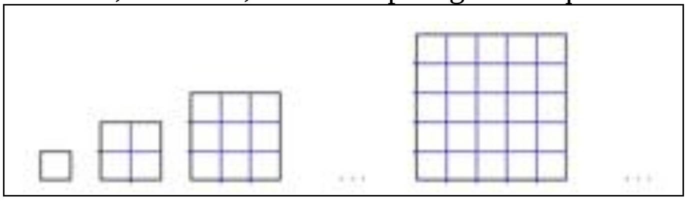

Figure 8 – La suite de carrés permet d'imaginer ce qui se passe pour d'autres multiples entiers

La suite de carrés ci-dessus permet d'imaginer ce qui se passe pour d'autres multiples entiers. Comme l'aire du triangle se comporte de la même façon pour les premiers multiples, nous admettrons que l'analogie persiste au-delà du facteur trois. Et comme tout polygone peut être découpé en triangles, l'aire d'un polygone quelconque suivra la même règle.

Math & Manip pour le collège

L'activité consiste à observer comment varie le volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur, puis en fonction de son diamètre.

Pour commencer, les élèves versent un certain nombre de mesurettes, trois par exemple, dans un récipient cylindrique assez haut (tel qu'un verre à long drink). Après avoir marqué la hauteur atteinte par le liquide, ils font deux nouvelles marques au double et au triple de la hauteur initiale. Les élèves estiment alors et vérifient par expérimentation les nombres de mesurettes nécessaires à verser dans le cylindre pour atteindre ces différentes hauteurs. Ils écrivent leurs résultats dans un tableau comme ci-dessous.

Hauteur	Nombre de mesurettes
haut. 1 = 3,5 cm	3
haut. 2 = 7 cm	6
haut. 3 = 10,5 cm	9

Tableau 1 – Les élèves estiment et vérifient par expérimentation les nombres de mesurettes nécessaires à verser dans le cylindre pour atteindre différentes hauteurs

Ensuite, il est demandé aux élèves de repérer et d'écrire les différents liens qu'ils observent entre des valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches.

	Hauteur	Nbre de mes.	
	haut. 1 = 3,5 cm	3	
×2	haut. 2 = 7 cm	6	×2
×3	haut. 3 = 10,5 cm	9	×3

	Hauteur	Nbre de mes.	
	haut. 1 = 3,5 cm	3	
+3,5	haut. 2 = 7 cm	6	+3
+3,5	haut. 3 = 10,5 cm	9	+3

Tableau 2 – Il est demandé aux élèves de repérer et d'écrire les différents liens qu'ils observent entre des valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches

Les réactions des élèves sont principalement de deux sortes. Certains voient dans ce tableau des liens de type multiplicatif et d'autres des liens de type additif.

Les relations mises en évidence dans les tableaux doivent permettre aux élèves d'imaginer combien de mesurettes seraient nécessaires pour atteindre quatre fois, cinq fois voire dix fois la hauteur initiale et de construire un graphique reprenant ces différents résultats.

La deuxième partie de l'activité consiste à observer et comprendre ce qui se passe si la hauteur reste fixe et qu'on fait varier le diamètre du cylindre.

Figure 9 – Les élèves reçoivent trois cylindres

Les élèves reçoivent trois cylindres. Les deux cylindres transparents ont des diamètres double et triple du plus petit. Ce dernier est utilisé comme mesurette étalon.

La question à laquelle il faut répondre est la suivante : combien de fois faut-il verser le petit cylindre pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu'à la même hauteur que celle du cylindre de départ ?

Après avoir noté leurs estimations dans un tableau, les élèves effectuent la manipulation pour vérification.

Les participants à l'atelier sont invités à tester cette partie de l'activité. Ils peuvent facilement imaginer les estimations que font les élèves en général : deux mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre double et trois mesurettes pour celui de diamètre triple. Après avoir constaté que quatre mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double, les élèves conjecturent souvent qu'il en faudra huit pour le cylindre de diamètre triple.

En faisant l’expérience, les participants observent – comme les élèves – que quatre et neuf mesurettes sont nécessaires pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu’à une même hauteur.

Comme pour le travail concernant la variation de la hauteur, il est demandé de placer, dans un tableau, les résultats obtenus pour la variation du diamètre. À nouveau, les liens découverts entre ces différentes valeurs doivent être mis en évidence afin d’essayer de compléter le tableau pour des diamètres quatre fois ou cinq fois plus grands que celui de départ.

	Diamètre	Nbre de mes.	
	diam. 1 = 0,8 cm	1	
$\times 2$	diam. 2 = 1,6 cm	4	$\times 2^2$
$\times 3$	diam. 3 = 2,4 cm	9	$\times 3^2$
$\times 4$	diam. 4 = 3,2 cm	16	$\times 4^2$
$\times 5$	diam. 5 = 4 cm	25	$\times 5^2$

$\boxed{\text{hauteur} = 3{,}5 \text{ cm}}$

Tableau 3 – Compléter le tableau pour des diamètres quatre fois ou cinq fois plus grands que celui de départ

Les liens mis en évidence dans le tableau peuvent être argumentés de diverses manières. Les élèves expliquent, par exemple, que deux mesurettes n’étaient pas suffisantes et l'illustrent par un dessin tel que celui-ci :

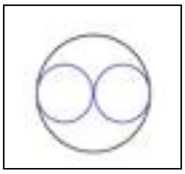

Figure 10 – Les élèves expliquent que deux mesurettes n’étaient pas suffisantes et l'illustrent par un dessin tel que celui-ci

Certains élèves font également le lien avec la formule correspondant au volume d’un cylindre mais ils sont peu nombreux.

Par contre, l’analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée, comme dans la figure ci-dessous, permet d’observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9 et de conjecturer les nombres de verres qui seront nécessaires au remplissage d’autres cylindres.

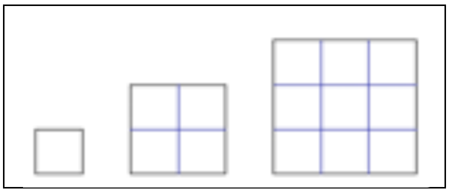

Figure 11 – L'analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée permet d'observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9

Les résultats sont ensuite placés dans un graphique. Une synthèse est produite à partir des tableaux et graphiques construits au cours de l'activité. Elle met notamment en évidence des caractéristiques permettant de distinguer les phénomènes proportionnels des autres.

Voici les graphiques des deux situations rencontrées :

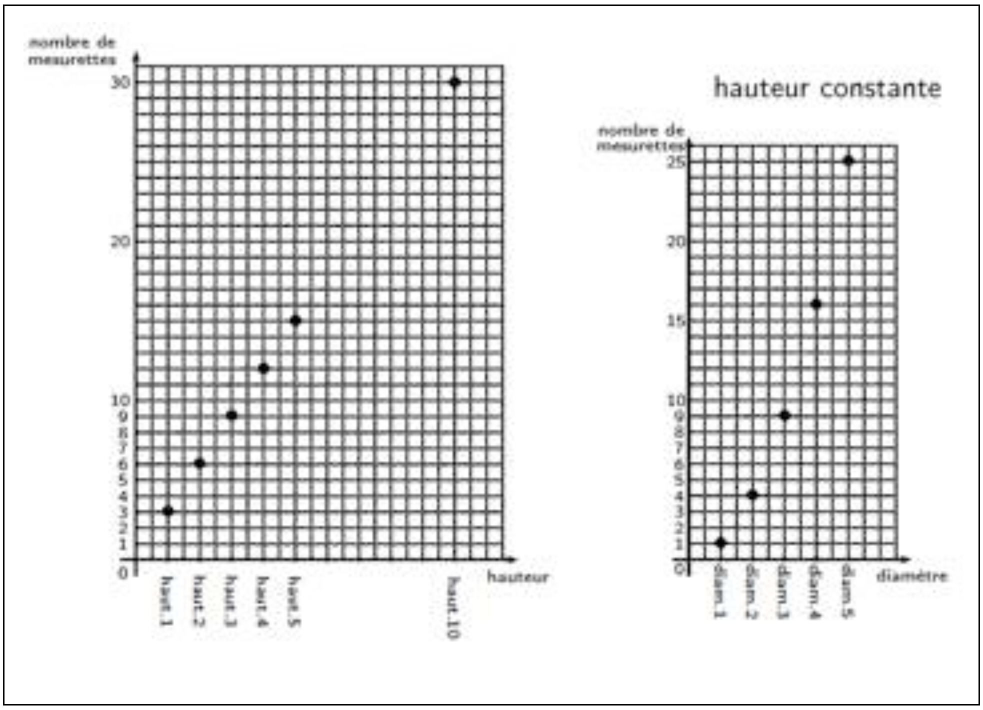

Figure 12 – Les graphiques de deux situations rencontrées

L'activité se complète en classe par une exploitation qui sera proposée à l'atelier mais que nous ne détaillons pas dans ce texte.

Parmi les récipients présentés, quels sont ceux pour lesquels le volume varie proportionnellement à la hauteur ? Cette photo rappellera aux participants ce qui aura été fait à l'atelier.

Figure 13 – Parmi ces récipients, quels sont ceux pour lesquels le volume varie proportionnellement à la hauteur ?

Cette *Math & Manip* est exploitée dans le cadre d'une thèse. Des premières impressions liées aux expérimentations dans les classes seront partagées et commentées avec les participants de l'atelier. Cependant, nous ne développerons pas ce point ici.

Math & Manip pour le lycée

Cette activité consiste à étudier les fonctions qui lient le volume d'un cône et sa hauteur. En fonction du niveau des élèves, l'objectif premier sera la découverte de la fonction cubique (en seconde) ou une introduction aux fonctions réciproques (en terminale) dans un contexte qui leur donne du sens. Au-delà du travail sur les fonctions, l'objectif est de réintroduire dans les cours de mathématiques une place pour la méthode expérimentale et un réel processus de modélisation.

La question de départ consiste à se demander jusqu'à quelle hauteur il faut remplir un verre conique pour le remplir à moitié, c'est-à-dire à la moitié de son volume. Les estimations sont bien souvent très en dessous de la réalité, l'expérience montre que les verres représentés ci-dessous doivent être remplis à 69 % de leur hauteur.

Figure 14 – Jusqu'à quelle hauteur faut-il remplir un verre conique pour le remplir à moitié

Pour obtenir une réponse théorique et mieux comprendre l'ensemble du phénomène, on procède à la graduation d'un cône. Les élèves versent le liquide par petites quantités en notant les quantités versées en ml et en repérant à chaque fois le niveau atteint sur la paroi. Ils devront ensuite remplir un tableau reprenant les volumes versés et les hauteurs correspondantes. Après avoir versé une première fois 5 ml, on constate que le niveau atteint presque le quart de la hauteur, on est loin d'imaginer à ce stade que le cône contient plus d'un quart de litre ! Comme les niveaux sont notés sur la paroi, il faudra déterminer la hauteur correspondant à chaque longueur de génératrice, soit par un procédé graphique, soit par calcul.

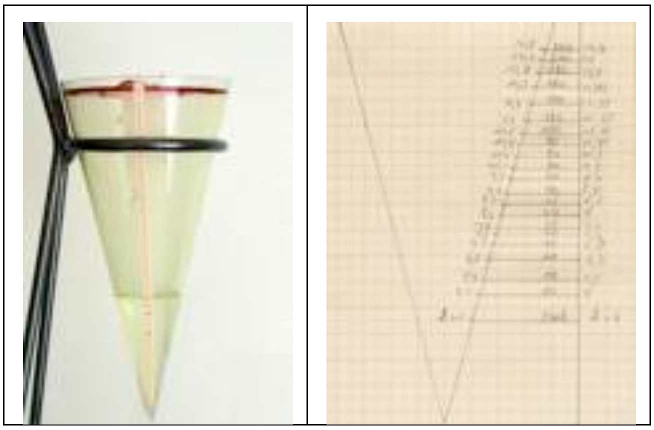

Figure 15 – Les niveaux sont notés sur la paroi, on peut déterminer la hauteur correspondant à chaque longueur de génératrice par un procédé graphique

L'étape suivante consiste à reporter dans un graphique ces « points expérimentaux ». Aux élèves de seconde, on demande de représenter le volume en fonction de la hauteur, pour faire apparaître des points d'une cubique. Aucune consigne en ce sens n'est donnée aux élèves de terminale, on espère donc voir apparaître aussi la fonction racine cubique.

Le modèle théorique est ensuite élaboré à partir de la formule du volume du cône, en utilisant la relation de proportionnalité entre le rayon et la hauteur. Pour terminer, on compare les résultats expérimentaux et les modèles théoriques, en confrontant tableaux et graphiques.

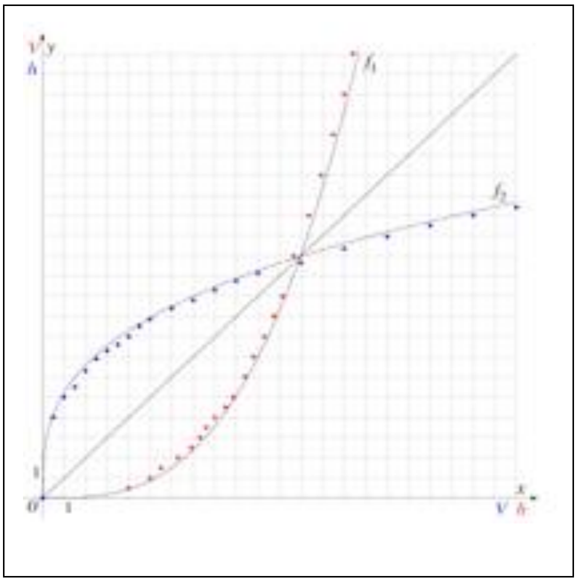

Figure 16 – Les fonctions réciproques, cubique et racine cubique, apparaissent…

Les fonctions réciproques, cubique et racine cubique, apparaissent dans ce contexte comme deux expressions d'un même phénomène, selon ce qu'on a choisi de placer en abscisse et en ordonnée.

Le modèle permet également de donner une réponse théorique au problème initial du verre à moitié plein : un cône idéal sera rempli à la moitié de son volume lorsque le liquide atteindra 79 % de sa hauteur. Les élèves peuvent trouver la réponse par les expérimentations sur leur cône, mais seul le modèle théorique permet de comprendre que ce rapport correspond à la racine cubique de ½.

Pour en savoir plus

Pour tout renseignement complémentaire concernant la recherche ou l'une des *Math & Manips* présentées, nous sommes à votre disposition. Vous pouvez prendre contact avec nous via l'adresse suivante :

info@crem.be

Pour plus d'information concernant les activités du CREM, consultez le site :

www.crem.be