RELATIONS ENTRE GRANDEURS, NOMBRES ET OPERATIONS EN PRIMAIRE

Christine CHAMBRIS[1]
Laboratoire de didactique André Revuz - Université Paris-Diderot
IUFM - Université de Cergy-Pontoise.

Introduction

Préliminaire en guise d'introduction

Les questions relatives au thème « grandeurs » posées par les organisateurs du 18^{e} colloque de la CORFEM sont les suivantes :

- Peut-on préciser comment les grandeurs ont été réintroduites dans des domaines de savoir et dans lesquels ?
- Quels objets mathématiques ont-ils été influencés par la prise en compte des grandeurs ?
- Quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ? Quelles situations peuvent être mises en place sur l'enseignement des grandeurs en lien avec cet objet ?

Il se trouve que ces questions recouvrent mes questions de recherche, à la différence près qu'elles concernent le second degré et que mes recherches sont centrées sur le premier. J'ai donc fait l'hypothèse, avec les organisateurs du colloque, que mon expertise sur les grandeurs en primaire (Chambris 2012 a, 2010, 2009, 2008, 2007) pouvait nourrir la réflexion actuelle sur la *réintroduction* des grandeurs au secondaire.

Ma connaissance de l'enseignement secondaire est assez limitée. Pourtant, deux indices obtenus par une première prise d'information, grossière, sur les grandeurs dans le secondaire me porte à croire que certains problèmes d'enseignement sont communs aux deux « ordres » d'enseignement :

- le découpage des programmes mathématiques du secondaire,
- une partie des questions mises en avant dans ce colloque sont problématiques… en primaire.

Je vais donc essentiellement essayer de montrer comment et pourquoi certaines des questions du colloque se posent dans l'enseignement primaire et les réponses que j'y apporte dans mes travaux de recherche. Dans la mesure où certaines réponses montrent une situation assez peu satisfaisante en primaire, je ferai aussi part de réflexions pour envisager des évolutions – en primaire. J'ai centré cette communication sur les points qui me semblent particulièrement adaptés pour une réflexion sur l'enseignement secondaire.

---

[1] cchambris@free.fr

Avant de m'attaquer aux questions du colloque, je vais présenter les limites de ce que j'étudie – qui constituent aussi un cadre pour les limites de cette communication – puis mes références théoriques. Je m'intéresse donc aux relations des grandeurs aux objets numériques (nombres, opérations, calcul, proportionnalité…) et non aux objets géométriques. Mes techniques d'investigation sont essentiellement des études curriculaires (contenus d'enseignement) et l'étude des connaissances des élèves de fin de primaire. Globalement, mon travail vise à comprendre les relations actuelles entre les grandeurs, les nombres et les opérations à l'école primaire et aussi à envisager d'autres possibles. Je considère que ces relations sont le produit de modifications de plusieurs ordres qui ont eu lieu tout au long du 20^e^ siècle : dans les mathématiques savantes, à l'école et dans les pratiques de la vie courante pour le mesurage. Nombres de modifications se sont cristallisées au moment de la réforme des mathématiques modernes (années 1970). Aussi pour comprendre l'état actuel des grandeurs, de leurs relations avec les autres objets d'enseignement, paraît-il nécessaire de s'intéresser à la période de la réforme des mathématiques modernes. Et, pour comprendre ce qui s'est passé au moment de la réforme, paraît-il nécessaire de caractériser la situation antérieure. Mon projet consiste alors à mettre en évidence l'organisation curriculaire des grandeurs, nombres et opérations en primaire, avant la réforme, les modifications que la réforme y a introduites et leurs effets à long terme sur l'enseignement et l'apprentissage pour ensuite envisager des alternatives.

Une motivation pour cette contribution est aussi celle de la continuité des apprentissages entre le primaire et le secondaire. A minima, elle informe en effet les formateurs du secondaire sur certains aspects de l'enseignement en primaire actuel.

Cadre théorique

Dans mes recherches, j'utilise principalement le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) développée par Chevallard (1997). Dans ce cadre, *l'écologie des savoirs* permet d'étudier les conditions de vie des objets d'enseignement : comment ils vivent et avec qui, comment ils naissent et meurent. Retenons qu'en règle générale plus un objet est relié à d'autres, mieux il vit !

La *praxéologie* est une notion centrale dans la TAD. Une praxéologie permet de décrire une pratique au moyen de quatre composantes complémentaires, à savoir un type de tâches c'est-à-dire un ensemble de problèmes qui se ressemblent en ce sens qu'ils peuvent être traités à l'aide d'un même type de techniques, la technique pouvant être justifiée à l'aide d'une technologie, discours justificatif qui est lui-même justifié par la théorie. La théorie n'apparaît parfois qu'à l'état de traces, dans un état évanouissant. Les agencements des types de tâches et des techniques via des technologies communes sont les outils-clés pour décrire les relations entre les objets d'enseignement, c'est-à-dire l'écologie des praxéologies.

J'en viens aux questions posées par les organisateurs du colloque et à leur « transposition » dans le cadre du primaire.

Les questions

L'exposé des questions du colloque est précédé de quelques lignes qui les mettent en perspective :

> Pendant de nombreuses années, les grandeurs ont été peu présentes dans les programmes de collège et de lycée. Elles ont été réintroduites en 2005 (à la suite des programmes de 2002 de l'école primaire) et ce, de façon importante, puisque qu'une rubrique du programme s'intitule « Grandeurs et mesures ».

La première question est alors : « Peut-on préciser comment les grandeurs ont été **réintroduites** dans des domaines de savoir et dans lesquels ? » (nous soulignons).

À première vue, il existe une différence majeure entre les domaines *grandeurs et mesures* du primaire et du secondaire. Il n'est en effet pas question de parler d'une réintroduction des grandeurs en primaire. Contrairement à celui du secondaire, le domaine *mesures* de primaire naît en 1970. Pourtant, cette différence peut-être fondamentale au regard des questions du colloque est sans doute moins importante qu'il n'y paraît de prime abord, en tout cas si on prend une échelle de temps assez longue. Plus précisément, l'existence d'un domaine *mesure* en primaire pendant 35 ans et son inexistence dans le secondaire dans la même période sont très probablement deux manifestations différentes du même phénomène. Une manifestation de ce phénomène pour le primaire est paradoxalement la création du domaine *mesure* dans le programme de 1970 de mathématiques.

Pour qu'elle résonne avec l'école primaire, je transforme donc d'abord la première question de la façon suivante : peut-on préciser comment, en *1970*, les grandeurs ont été *exclues* des différents domaines de savoir et desquels ? Et je la prolonge comme suit : peut-on préciser, comment *à partir des années 1980*, les grandeurs ont été *réintroduites* dans des domaines de savoir et dans lesquels ?

Parallèlement, je transforme la deuxième question : quels objets mathématiques ont-ils été influencés par l'*exclusion* et la *réintroduction* des grandeurs ?

Pour le dernier aspect, je ne retiens que les deux premières questions : quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ? Cet aspect sera spécifique à un objet particulier : l'étude du système métrique et son pendant du côté des nombres, la numération de position.

Ce texte comprend ainsi trois parties qui correspondent à un découpage temporel. D'abord, j'étudie comment, en primaire, les grandeurs ont été exclues en 1970 de différents domaines de savoir et quels sont les objets qui ont été influencés. J'indique aussi des conséquences possibles en termes de difficultés d'enseignement. Ensuite, j'étudie comment les grandeurs ont été réintroduites à partir de 1980 et quels sont les objets qui ont été influencés. Enfin, je m'intéresse plus précisément à certaines difficultés actuelles d'enseignement et d'apprentissage plus particulièrement relatives au système métrique (et à la numération !).

1970 et avant : les grandeurs, comment et avec qui ?

Pour commencer, je vais donc non pas évoquer la « réintroduction » des grandeurs mais plutôt leur exclusion, ou plus précisément une série de phénomènes qui se manifestent dans le programme de 1970 de primaire. Que peut-on donc dire de l'exclusion des grandeurs en 1970 ? Quels sont les objets concernés ? En termes d'écologie des savoirs, quelles conséquences cet événement peut-il avoir ?

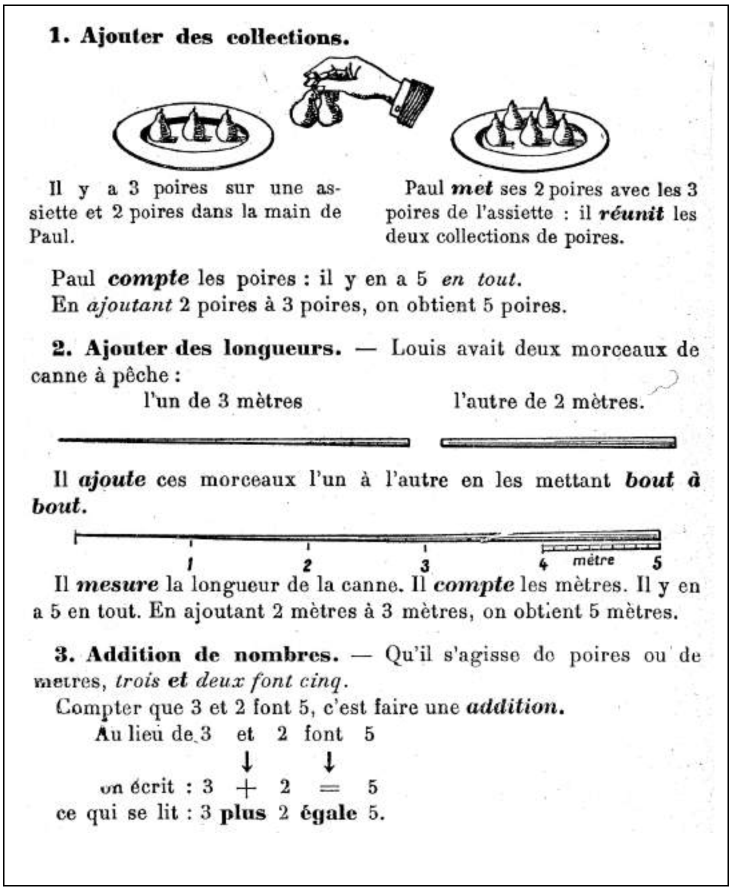
Avant 1945 : une théorie des grandeurs

Bronner (2008) étudie le numérique dans le secondaire comme produit des transformations curriculaires depuis 1850. Il observe une grande stabilité jusqu'en 1947 : une théorie de la mesure des grandeurs fonde l'étude des nombres. Les manuels d'arithmétique commencent généralement ainsi :

> Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. […] Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. (Guilmin 1855, cité par Bronner 2008, p.26)

Il est connu que les ordres d'enseignement primaire et secondaire étaient étanches avant 1945. Toutefois, les programmes pour les petites classes du secondaire et pour les niveaux correspondants de primaire sont communs depuis 1925. Il y a ainsi peu de raisons que, s'il en existe, des appuis mathématiques théoriques différents fondent l'enseignement des nombres des deux ordres.

La figure 1 tirée d'un manuel scolaire des années 1940 montre comment les nombres apparaissent comme des mesures de grandeurs (discrètes ou continues) et comment les opérations sur les nombres sont « tirées » des opérations sur les grandeurs.



1. Ajouter des collections.

Il y a 3 poires sur une assiette et 2 poires dans la main de Paul.

Paul ***met*** ses 2 poires avec les 3 poires de l'assiette : il ***réunit*** les deux collections de poires.

Paul ***compte*** les poires : il y en a 5 *en tout*.
En *ajoutant* 2 poires à 3 poires, on obtient 5 poires.

2. Ajouter des longueurs. — Louis avait deux morceaux de canne à pêche :
l'un de 3 mètres l'autre de 2 mètres.

Il ***ajoute*** ces morceaux l'un à l'autre en les mettant ***bout à bout.***

Il ***mesure*** la longueur de la canne. Il ***compte*** les mètres. Il y en a 5 en tout. En ajoutant 2 mètres à 3 mètres, on obtient 5 mètres.

3. Addition de nombres. — Qu'il s'agisse de poires ou de mètres, *trois* ***et*** *deux font cinq*.
Compter que 3 et 2 font 5, c'est faire une ***addition.***

Au lieu de 3 et 2 font 5
↓ ↓
on écrit : 3 + 2 = 5
ce qui se lit : 3 **plus** 2 **égale** 5.

Figure 1 – Extrait de Marijon A. et al. 1947, p. 14, 4e leçon Addition - CE1

L' « exclusion » des grandeurs en 1970

La création du domaine mesure en 1970 en primaire

L'étude du programme de 1970 permet de mieux cerner la rupture entre les grandeurs et les nombres lorsqu'elle est introduite. Avant 1970, il y a l'arithmétique. En 1970, en remplacement de l'arithmétique, on crée deux domaines : la mesure et le numérique, qui apparaissent ainsi comme les deux faces d'une même pièce[2].

La rupture discret / continu

En 1970, dans le numérique, les nombres, même non entiers, mesurent le discret. Dans le domaine « mesure », ils mesurent le continu. Par exemple, le programme propose une approche des décimaux, identique dans le « numérique » et « mesure », en mesurant les grandeurs (respectivement discrètes et continues) mais sans les fractionner. La « définition » est donnée avec la mesure des grandeurs discrètes :

> Une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. (Instructions officielles de 1970)

Elle est reprise dans le continu :

> Prenons comme unité le carreau (…) aire A = 28 (…). Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2,8. (Ibid.)

Cette construction n'est pas satisfaisante sur le plan mathématique. On a essayé toutefois, par ce moyen, de créer une étude des nombres non entiers qui ne s'appuyait pas sur le fractionnement, un peu comme dans la théorie savante où les réels sont construits à partir des entiers. Cette scission du domaine « arithmétique » manifeste donc un changement de théorie de référence.

La « numérisation » : les opérateurs dans les thèmes fractions et proportionnalité, les opérations sur les nombres

Précisons toutefois que le traitement de la proportionnalité échappe à la dichotomie discret / continu, mais il participe d'un autre ordre de modifications. En effet, une autre dimension fondamentale des changements de 1970 est la suivante. Jusqu'en 1970, les opérations, les fractions, les relations de proportionnalité impliquent de près ou de loin des opérations sur les grandeurs (même si cette affirmation mériterait d'être nuancée pour le programme de 1945). Citons par exemple les opérations sur les nombres concrets (qui sont des grandeurs), les fractions de grandeurs, le traitement de la proportionnalité avec la théorie des rapports et la multiplication externe d'une grandeur par un scalaire jusqu'en 1938 auxquels s'ajoute à partir de cette date l'utilisation des produits et quotients de grandeurs (Whitney 1968). Dans le programme de 1970, les opérations sur les grandeurs disparaissent, les relations de proportionnalité et les fractions sont considérées comme des opérateurs numériques agissant sur des séries de nombres et les quatre opérations s'appliquent exclusivement aux nombres. L'exclusion des opérations sur les grandeurs a été maintenue jusque très récemment.

---

2 Plus précisément, le domaine « mesures » de 1970 est constitué par ce qui relevait du continu dans « l'ancienne arithmétique » et des grandeurs géométriques (aire et volume) de « l'ancienne géométrie ».

Les savoirs de référence depuis 1970

En fait, c'est aujourd'hui encore « le numérique » qui gouverne l'enseignement des nombres, des opérations et de la proportionnalité ; le « numérique », c'est-à-dire, ici, une théorie des nombres non entiers fondée sur les entiers et une théorie des fonctions linéaires numériques. Il n'y a pas eu de changement de théorie de référence pour l'étude des nombres et des opérations après 1970.

Écologie : interactions entre les objets, entre les grandeurs et les objets

Avant la réforme

Depuis 1923, l'enseignement du système métrique est mêlé à celui des nombres dans les programmes :

> Il faut signaler (pour le cours élémentaire) une intention qui se manifeste dès la première ligne : « Numération décimale, le mètre, le gramme... ». Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. Ainsi le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération.
> L'étude des sous-multiples du mètre, du gramme, se fera plus tard, quand on aura à parler des nombres décimaux. (Instructions officielles de 1923)

De plus, une théorie de la mesure des grandeurs pour fonder le numérique est susceptible de favoriser l'existence de relations entre grandeurs, nombre et opérations. En effet, avec une telle théorie, l'étude des nombres, c'est l'étude des mesures de grandeurs.

Aussi, l'existence d'une théorie des grandeurs pour asseoir l'étude des nombres et des opérations amène à supposer que jusqu'à la réforme, les grandeurs (dont le système métrique) ont été finement associées à l'étude des nombres et des opérations. La création du domaine mesure en 1970 est alors symptomatique de la destruction de ces relations.

Le programme de 1970 : ruptures et créations de liens

L'examen des modifications introduites par le programme de 1970 montre des ruptures possibles :

- au sein de la géométrie, puisque la proportionnalité migre dans le numérique (ce thème autrefois réparti entre la géométrie pour les échelles et l'arithmétique pour les autres questions se retrouve intégralement dans le « numérique »),
- le système métrique étudié dans le nouveau domaine « grandeurs et mesures » se trouve séparé de la numération qui est étudiée dans le domaine numérique,
- la théorie « numérique » sépare l'étude des grandeurs de celles des nombres et des opérations. Elle est ainsi susceptible de modifier les relations entre ces objets.

MULTIPLICATION PAR PLUSIEURS DIZAINES OU CENTAINES

MULTIPLIER UN NOMBRE DE DIZAINES. — **Problème** — *Une boîte de plumes pèse* **60 g.** *Combien pèsent* **72 boîtes?**

Le poids est 72 fois 6 dizaines de g. ;
6 dizaines × 72 = 432 dizaines ; 432 dizaines = **4.320 g.**

Solution. — Le poids total de 72 boîtes est :

60 g. × 72 = **4.320 g.**

MULTIPLIER PAR UN NOMBRE DE DIZAINES. — **Problème.** — *Que peuvent contenir* **60 tonneaux** *de* **72 l. chacun?**

Une dizaine de tonneaux contient : 72 l. × 10 = 720 l.
6 dizaines de tonneaux contiennent : 720 l. × 6 = 4.320 l.

Solution. — La contenance totale des tonneaux est :

72 l. × 60 = **4.320 l.**

RÈGLE ET DISPOSITION PRATIQUE. — Pour multiplier un nombre de dizaines **60 par 72**, ou pour multiplier **72 par** le nombre de dizaines **60**, *on multiplie 72 par 6 et on met un zéro à la droite du produit.*

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 60 \\ \hline 4.320 \end{array}$$

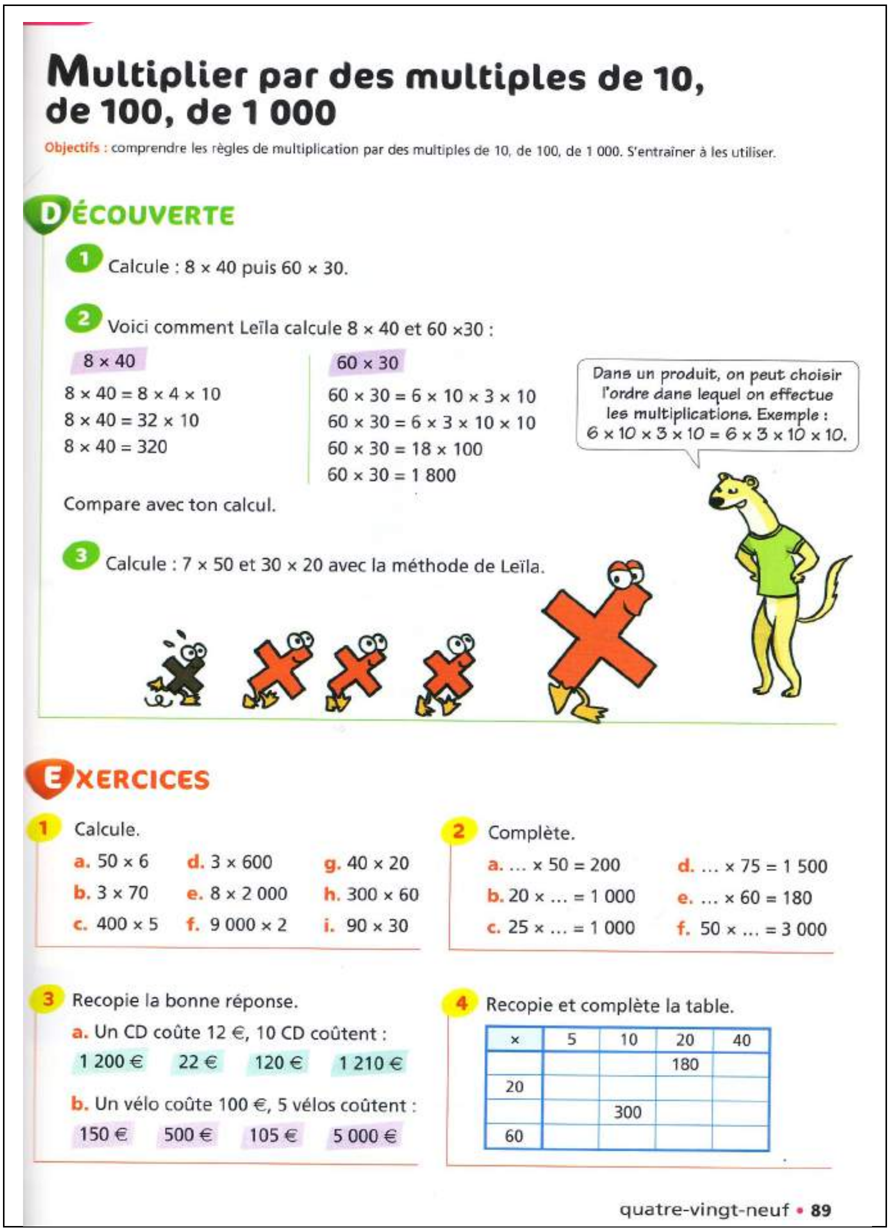
Dans la pratique on écrit d'abord le zéro et on place le produit à gauche.

Figure 2 – Extrait de (Châtelet A. et al. 1932, p. 160 - CE

La confrontation des figures 2 et 3 permet d'appréhender le rôle des grandeurs dans la justification des techniques de calcul avant la réforme (1932), ici la justification de la technique de multiplication par 10. L'absence de grandeurs (en 2010) est compensée par des règles de calcul sur les nombres.

La modification des savoirs de référence provoque ainsi des modifications importantes dans l'agencement des « gros » domaines d'enseignement. Ces modifications sont susceptibles d'avoir engendré des bouleversements majeurs dans les relations entre les objets, dans l'enseignement.

L'unification du traitement de la proportionnalité a-t-elle fait apparaître, à terme, de nouvelles relations dans le numérique ? De nouvelles relations sont-elles apparues au sein du domaine « mesures » ?



Multiplier par des multiples de 10, de 100, de 1 000

Objectifs : comprendre les règles de multiplication par des multiples de 10, de 100, de 1 000. S'entraîner à les utiliser.

DÉCOUVERTE

1 Calcule : 8 × 40 puis 60 × 30.

2 Voici comment Leïla calcule 8 × 40 et 60 ×30 :

8 × 40

8 × 40 = 8 × 4 × 10
8 × 40 = 32 × 10
8 × 40 = 320

60 × 30

60 × 30 = 6 × 10 × 3 × 10
60 × 30 = 6 × 3 × 10 × 10
60 × 30 = 18 × 100
60 × 30 = 1 800

Compare avec ton calcul.

3 Calcule : 7 × 50 et 30 × 20 avec la méthode de Leïla.

EXERCICES

1 Calcule.

a. 50 × 6 b. 3 × 70 c. 400 × 5
d. 3 × 600 e. 8 × 2 000 f. 9 000 × 2
g. 40 × 20 h. 300 × 60 i. 90 × 30

2 Complète.

a. … × 50 = 200 b. 20 × … = 1 000 c. 25 × … = 1 000
d. … × 75 = 1 500 e. … × 60 = 180 f. 50 × … = 3 000

3 Recopie la bonne réponse.

a. Un CD coûte 12 €, 10 CD coûtent :
1 200 € 22 € 120 € 1 210 €

b. Un vélo coûte 100 €, 5 vélos coûtent :
150 € 500 € 105 € 5 000 €

4 Recopie et complète la table.

×	5	10	20	40
			180	
20				
		300		
60				

quatre-vingt-neuf • 89

Figure 3 – Peltier M.L. et al. 2010, p. 89 - Euro Maths CE2

1980 et après : les grandeurs, comment et avec qui ?

Comment les grandeurs ont-elles été réintroduites à partir de 1980 dans différents domaines de savoir ? Quels objets ont-ils été influencés ? Pour étudier ces questions, je me réfère essentiellement à des textes officiels.

Les textes officiels

Pour le secondaire, j'ai consulté le document d'accompagnement des programmes « Grandeurs et mesures au collège » paru en 2007. Ce texte est paraît-il atypique dans son genre littéraire, il contient notamment plusieurs théories mathématiques relatives à différents objets (annexe 1).

Pour le primaire, les textes qui me servent de références sont les programmes et les instructions « de 1980 » (publiés en réalité de 1977 à 1980) et ceux de 2002 (la publication des documents d'accompagnement s'échelonne jusqu'en 2005). Pour 2002, plusieurs textes concernent les grandeurs ou leur mesure :

- le document d'application des programmes reprend chaque rubrique du programme, notamment les compétences du domaine mesures, en donnant des pistes pour l'étude ;
- dans la série des documents d'accompagnement (DESCO 2005), un texte est relatif au domaine mesure (Grandeurs et mesure à l'école élémentaire), un autre à la liaison école collège, il évoque notamment la proportionnalité.

En particulier, le calcul avec les unités métriques est « réhabilité » (et même encouragé) en 2005 :

> Il est donc légitime et correct d'écrire des égalités telles que :
> 1 m = 100 cm, 1 km = 1000 m. (…)
> Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :
> 3 cm + 15 mm = 30 mm + 15 mm = 45 mm = 4,5 cm. (…) (DESCO 2005, p.82)

Les réintroductions locales des grandeurs de 1980 à 2002

Depuis 1980, les instructions prescrivent l'étude des fractions par la mesure des grandeurs d'objets (des tâches) et, depuis 2002, des techniques de résolution pour la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs.

Le retour des grandeurs dans le numérique : la proportionnalité

Depuis 1970, le « numérique » est le savoir savant de référence. En 1970 et en 1980, la proportionnalité est traitée avec des tableaux de nombres puis des fonctions numériques. En 2002, les instructions officielles présentent à propos de la proportionnalité, puis de la multiplication par un décimal, des « raisonnements personnels » du type suivant :

> Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ?, les raisonnements peuvent être du type :
> * pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) (…). Pour 1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;
> * la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1000 : 5 = 200).

Ces « raisonnements » constituent deux techniques pour la résolution des problèmes de proportionnalité : linéarité et coefficient. Bien que le savoir savant de référence soit le « numérique », ces deux techniques font appel à des opérations sur les grandeurs (d'ailleurs, incomplètement formulées dans les instructions officielles, comme on le voit dans les extraits) : addition de grandeurs et multiplication (ou division) d'une grandeur par un scalaire.

Le retour des grandeurs dans le numérique : les nombres non entiers

En fait, en 1980, les instructions réintroduisent discrètement les grandeurs dans le numérique. Plus précisément, c'est le « continu » qui est réintroduit pour étudier les décimaux et fractions. Il s'agit alors de proposer aux élèves des « situations » qui leur permettront de « prendre conscience de la nécessité de disposer de nouveaux nombres ». Cette approche est confirmée par les programmes suivants. Ce n'est cependant qu'en 2002 que les grandeurs apparaissent explicitement, plus précisément les longueurs et aires, par exemple :

> (…) utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder le résultat de mesurages de longueurs ou d'aires, une unité de mesure étant choisie explicitement.

Les nombres non entiers sont donc introduits comme des mesures de grandeurs.

L'émergence de « théories » des grandeurs dans le numérique

Depuis 1970, le numérique est le savoir savant de référence. Pourtant, dans les programmes, depuis 1980, on prescrit l'étude des fractions par la mesure des grandeurs et, en 2002, des discours justificatifs sur la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs. Ces éléments sont officiellement réintroduits pour favoriser la *construction des savoirs par les élèves*. Une particularité de ces objets didactiques réintroduits (tâches et justifications) n'ont pas de correspondance mathématique immédiate dans la théorie savante du « numérique » qui ne comporte pas de grandeurs.

Je cherche alors à rapprocher d'une théorie mathématique ces tâches et discours explicatifs impliquant des grandeurs. J'utilise une théorie mathématique qui n'est pas le savoir de référence mais un savoir « dérivé », la théorie des grandeurs développée par Rouche (1992, 1994) au début des années 1990. Les tâches et discours réintroduits s'inscrivent bien dans cette théorie. Ceci permet de rapprocher les différentes composantes des praxéologies enseignées : tâches, techniques, discours justificatifs et la théorie mathématique (des grandeurs).

Les évolutions des « théories » des grandeurs dans le domaine mesure

Dans le programme de 1970, il n'y a pas vraiment de théorie des grandeurs sous-jacente mais l'approche préconisée pour l'étude est assez structurée. On évoque les questions de comparaison et on cite explicitement, mais brièvement, les quatre opérations (sur les mesures !) :

> Certaines expériences conduisent à effectuer la somme (ou la différence) de deux mesures, le produit (ou le quotient) d'une mesure par un nombre entier.

En 1980, dans le domaine « mesurer », les grandeurs réapparaissent. On dégage les notions de grandeur et de mesure d'une grandeur et même « l'addition » de grandeurs. On utilise ces mots et les trois niveaux, objet, grandeur et mesure.

Plusieurs indices conduisent cependant à penser que les grandeurs ici réintroduites ne doivent pas être considérées comme mathématiques :

- une bonne partie des activités est située dans la partie « activités d'éveil », par exemple égalité et somme de longueurs au CE,
- on écrit dans la partie « mathématiques », à la fin du thème mesurer, que :

> Certaines activités ne relèvent pas spécifiquement des mathématiques, bien que traditionnellement proposées dans les programmes ; par exemple la lecture de l'heure ne doit pas être dissociée de la notion de durée mise en place au cours des activités d'éveil.

- enfin, on écrit :

> [Les activités] doivent permettre une première prise de conscience de la notion de grandeurs mesurables, celles pour lesquelles on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure. (Les grandeurs pour lesquelles on ne sait pas définir une telle opération sont des grandeurs « repérables » ; exemple les températures.)

La théorie développée est donc « grandeur repérable / grandeur mesurable ». Elle est en usage en physique, même si elle a été axiomatisée, de façons diverses, par des mathématiciens. Il semble donc qu'on donne aux grandeurs un statut d'objets de la physique.

Par ailleurs, la caractérisation indiquée, une addition sur les objets qui induit une addition sur les mesures, implique que les nombres préexistent à la notion de grandeurs mesurables. Cette approche théorique n'est pas compatible avec l'utilisation des grandeurs pour définir les nombres non entiers. Elle ne semble pas favorable à une articulation entre utilisation des grandeurs dans « Mesurer » et dans le numérique.

Enfin, l'addition est la seule opération sur les grandeurs qui soit étudiée et les calculs se font sur les nombres exprimant des mesures.

En 2002, l'étude des grandeurs dans la rubrique « grandeurs et mesures » ne relève plus de l'approche grandeur repérable / grandeur mesurable. Il n'y a plus, explicitement, d'addition de grandeurs. Plus généralement, à l'exception des fractions d'angle droit, on ne parle pas d'opérations sur les grandeurs dans cette rubrique. Les instructions indiquent un programme d'étude. On met l'accent sur les procédés de comparaison sans la mesure. On prescrit du mesurage, en unités arbitraires ou non selon les grandeurs, avant l'utilisation des unités usuelles. Enfin, un troisième type d'activités consiste à utiliser ou prendre des informations pour en déduire, par calcul, d'autres mesures. Ces activités peuvent solliciter n'importe laquelle des quatre opérations sur les grandeurs continues, par exemple le découpage-recollement met en jeu l'addition ou la soustraction des aires mais ces opérations ne sont pas l'objet d'un apprentissage signalé par le programme.

Les problèmes théoriques posés par l'articulation entre les grandeurs du domaine mesure et celles du numérique ont disparu, de fait, en 2002 car on n'utilise plus l'additivité de la mesure pour caractériser les grandeurs. Néanmoins, aucune caractérisation générale des grandeurs n'est indiquée. De plus, de quatre opérations explicitement objet d'enseignement dans le domaine mesure en 1970, il n'en reste qu'une en 1980 et aucune en 2002.

Des tâches possibles pour la formation des PLC ?

Ces différents éléments d'analyse des programmes permettent d'envisager des tâches pour la formation des PLC. En particulier, il pourrait s'agir de leur proposer d'articuler des éléments « théoriques » mathématiques et des techniques d'enseignement (et leurs justifications).

Par exemple, pour ce qui concerne la proportionnalité, on peut demander de mettre en relation les techniques de résolution proposées dans le programme de primaire (document d'application 2002) et les éléments théoriques du texte « grandeurs et mesures au collège » relatifs aux fonctions linéaires (page 34) ou une théorie des grandeurs du type Rouche (1992).

On peut aussi demander d'interpréter, via une théorie des grandeurs, la technique de résolution des « produits en croix ».

Concernant les nombres non entiers, il peut s'agir de mettre en relation (en allant ou pas jusqu'à la question de l'irrationalité) les constructions « savantes » des nombres (rationnels ou réels) et les reconstructions à partir des grandeurs (Rouche 1992, Lebesgue 1975) ou encore de mettre en relation ces reconstructions théoriques et des éléments d'enseignement (tâche, techniques ou justification -technologies-)

Quelles sont les difficultés des élèves ? Quelles sont les difficultés d'enseignement ?

Dans cette dernière partie, je vais présenter des éléments sur l'articulation entre numération et système métrique. On l'a vu dans la première partie, les deux thèmes sont deux domaines distincts dans l'enseignement actuel, et ce depuis 1970. Les connaissances des élèves sur le système métrique ont été évaluées à plusieurs reprises dans les évaluations à l'entrée en 6^{e}. Par exemple, voici les résultats de deux items proposés plusieurs fois :

3 km = ………… m		
réponse	2002	2003
5000	80,1	77,9
Autre	15,3	16,8
Absence	4,6	5,3

5 kg = ………… g			
réponse	2005	2006	2007
5000	61,41	60,38	62,0
Autre	34,05	34,70	33,8
Absence	4,54	4,92	4,2

Figure 4 – Les résultats de deux items dans les évaluations à l'entrée en 6^{e}

L'échec à la conversion de kg en g à partir de 2005 est plus important qu'à la conversion des km en m avant 2003. Il est peu probable que ces éléments s'expliquent par une baisse brutale des performances des élèves entre les deux dates mais plutôt par le fait qu'il s'agit de deux grandeurs différentes. Convertir des km en m serait ainsi plus « facile » que convertir des kg en g. Ceci pourrait s'expliquer avec des raisons de « familiarité » avec la grandeur et avec les unités : le gramme et la masse sont moins « fréquentés » que le mètre et la longueur.

Ces deux conversions n'apparaissent ainsi pas nettement reliées l'une à l'autre par le préfixe *kilo* qui signifie mille. Par ailleurs, dans une étude complémentaire, réalisée en 2006 sur 273 élèves en fin de CM2, 15 % des élèves écrivent 5 kg = 500 g (Chambris 2008).

Ceci m'amène à évoquer le lien entre la numération et le système métrique dans l'enseignement. Voici deux extraits d'un même manuel scolaire de CE2 (année au cours de laquelle on commence à étudier les nombres entiers au-delà de mille) (Figures 4 et 5). On observe que le traitement des deux thèmes est très différent notamment pour le remplissage des tableaux et les types de décompositions. Le tableau de numération est complété avec des zéros ce qui n'est pas le cas de celui de système métrique. Les décompositions en système métrique comportent des Ecritures Chiffrées des Puissances de Dix (ECPD) là où les décompositions de numération comportent des unités métriques.

Tableau de décomposition des nombres

mille (milliers)			unités				
c	d	u	c	d	u		
3	5	7	4	8	9	→	357 489
3	0	0	0	0	0	→	300 000
	5	0	0	0	0	→	50 000
		7	0	0	0	→	7 000
			4	0	0	→	400
				8	0	→	80
					9	→	9

357 489 =

300 000 + 50 000 + 7 000 + 400 + 80 + 9

(3 x 100 000) + (5 x 10 000) + (7 x 1 000) + (4 x 100) + (8 x 10) + (9 x 1)

Figure 5 – Champeyrache et al. 2002, p. 133 - Nouveau Math Elem CE2

Les unités de longueur du système métrique

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
4	5	7	2			
			3	1	8	

1 000 mètres = **1 kilomètre** 1 000 m = 1 km

100 mètres = **1 hectomètre** 100 m = 1 hm

10 mètres = **1 décamètre** 10 m = 1 dam

Exemples : • 4 km 5 hm 7 dam 2 m = 4 572 mètres • 318 cm = 3 m 1 dm 8 cm

Figure 6 – Champeyrache et al. 2002, p. 60 - Nouveau Math Elem CE2

Existe-t-il d’autres façons de faire qui mettraient davantage en évidence le rôle de la numération dans la définition des unités métriques ? Entre 1923 et 1970, numération et système métrique étaient dans un seul « domaine », il est alors intéressant d’étudier le traitement de ces thèmes dans des manuels scolaires antérieurs à la réforme pour commencer à répondre à cette question.

Voici maintenant plusieurs extraits (annexe 2) d’un manuel du cours élémentaire du début des années 1930. Concernant la numération, on remarque qu’il n’y aucune décomposition en ECPD. En revanche, c’est le point nous semble saillant, on trouve des conversions dans les leçons de numération : exercices 186 à 188, par exemple. Des exercices de même forme se trouvent aussi dans les leçons de système métrique 239 à 241 par exemple. Le « cours » sur le système métrique réfère à la numération :

Dans l’écriture d’un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s’écrivent au rang des centaines. (Boucheny G. et al. p.52 – CE)

Il ne faut tirer de ce propos que « c’était mieux avant ». Mon but consiste à montrer qu’il existe au moins une façon d’enseigner des liens entre numération et système métrique. C’est la signification que j’accorde aux tâches « communes » mises en évidence avant la réforme (les conversions en numération et système métrique), ces liens se manifestent aussi dans les « cours » de système métrique qui réfèrent explicitement à la numération en lui empruntant notamment son lexique. Les liens de cette forme entre numération des entiers et système métrique sont inexistants dans l’enseignement actuel. En particulier, il n’y a pas de conversion dans l’enseignement actuel de la numération. S’il existe des liens ayant d’autres formes, je n’ai pas réussi à les repérer.

Sur certains points notamment, les connaissances des élèves sur la numération des entiers (Parouty 2005) et en système métrique semblent médiocres. Un levier pour agir sur la situation est peut-être le renforcement des liens entre numération et système métrique : les connaissances dans les deux domaines étant alors susceptibles de se renforcer[3].

Conclusion

Les éléments apportés par ce texte concernent les relations entre les nombres et les grandeurs en primaire. L'approche développée inclut une perspective historique. Elle permet d'envisager d'autres possibles que la situation actuelle.

Les instabilités relatives au domaine mesure et la pénétration progressive des grandeurs dans le numérique depuis 30 ans identifiées dans ce texte trouvent leur origine dans la séparation des nombres des grandeurs au moment de la réforme, le domaine mesure étant un avatar de cette séparation. Quelle signification accorder alors à la création du domaine mesure dans le secondaire 40 ans après la réforme ? S'agit-il de juxtaposer un certain enseignement des grandeurs à d'autres enseignements : numérique, géométrique, statistique ? S'agit-il au contraire d'articuler les autres domaines à ce nouveau domaine mesure, plus profondément par exemple de penser un enseignement des nombres, des opérations, de la proportionnalité voire des statistiques ou de la géométrie qui s'appuieraient sur les grandeurs ? Notre connaissance du secondaire ne nous permet pas de le dire. Toutefois, nos recherches sur le primaire montre qu'une telle articulation ne peut être simple à mettre à en œuvre et qu'il ne suffit pas de décréter l'existence du domaine mesure, ni même l'enseignement d'une ou plusieurs théories de la mesure des grandeurs pour qu'une telle articulation s'opère.

REFERENCES

Bronner, A. (2008) La question du numérique dans l'enseignement du secondaire. In Rouchier A. et Bloch I. (Eds.) *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp.17–45). Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris, C. (2012 a) Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N* 89 39-69

Chambris, C. (2012 b) Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs. in Durpaire, J.L. & Mégard, M. eds, *Le nombre au cycle 3*, France : SCEREN CNDP-CRDP

Chambris, C. (2010) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels. In L. Coulange & C. Hache (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* 2009. (pp. 139–160). Paris: IREM de Paris 7, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Chambris, C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In C. Ouvrier-Buffet & M.J. Perrin-Glorian (Eds.) (2009) *Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques*. (pp. 211–222) Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

[3] Un texte d'accompagnement des programmes pour le cycle 3 devrait être publié prochainement sur cette question. (Chambris 2012 b)

Chambris, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* (Thèse de doctorat). Téléchargeable à http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/

Chambris, C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, 69, 5–31.

DESCO (2005) *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. Ecole primaire.*

DGESCO (2007) *Grandeurs et mesures. Projet de document d'accompagnement*.

Lebesgue H. (1975) *La mesure des grandeurs*. Paris : Albert Blanchard.

Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres (Cédérom).* Toulouse : IREM de Toulouse.

Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier

Whitney H. (1968) The mathematics of physical quantities, Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. *American Mathematical Monthly* 75 227–256.

Manuels scolaires

Boucheny G., Guérinet A. (1930) *L'arithmétique au cours élémentaire (1re et 2e année)*. Paris : Librairie Larousse.

Châtelet A., Condevaux G., Blanquet L. (1932) *Arithmétique. Cours élémentaire (1re et 2e année)*. Paris : Bourrelier-Chimènes

Guilmin A. (1855) *Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges*. Paris : Auguste Durand.

Marijon A., Masseron R., Delaunay E. (1947) *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire.* Coulommiers-Paris : Brodard et Taupin.

Peltier M.L., Briand J., Ngono B., Vergnes D. (2010) Euro Maths - CE2, éditions Hatier.

Champeyrache G., Fatta J.C. (2002) Le nouveau Math Elem - CE2. Belin. Paris.

Annexe 1 : extraits du document d'accompagnement des programmes : grandeurs et mesures au collège (DGESCO 2007)

Nombreuses sont les références proposant une théorie des grandeurs[3]. Pour préciser la notion d'espèce de grandeurs, on suppose connu un ensemble X d'*objets* et une relation d'équivalence $\sim$ sur X qui définit une certaine *espèce* de grandeurs (volume, longueur, etc.) : deux objets x_1, x_2 appartenant à X qui sont équivalents seront dits avoir *même grandeur* (Il existe en général plusieurs relations d'équivalence intéressantes définissant autant d'espèces de grandeurs différentes). Pour des raisons qui s'éclairciront plus tard, on supposera que chaque classe d'équivalence est *infinie*.

On suppose d'abord qu'on a défini sur X, ensemble des objets, une relation de *préordre total* $\prec$ associée à $\sim$, c'est-à-dire telle que, pour tous x, y, z :

- un et un seul des énoncés $x \prec y$, $y \prec x$, $x \sim y$ est vrai ;
- si $x \prec y$ et $y \prec z$ alors $x \prec z$.

En d'autres termes, on suppose qu'on peut dire que deux objets ont même grandeur ou non, et, dans ce dernier cas, on peut comparer ces deux objets.

[…]

On suppose ensuite qu'on a défini sur X une addition, notée $\oplus$. Cette addition sur les objets n'est pas partout définie : il est en effet impossible d'ajouter un objet à lui-même[5] :

$x \oplus y$ est défini si, et seulement si, $x \neq y$;

si $x \neq y$, alors $x \oplus y \sim y \oplus x$, et si, de plus, $x \neq z$ et $y \sim z$, alors $x \oplus y \sim x \oplus z$;

si $(x \oplus y) \oplus z$ et $x \oplus (y \oplus z)$ sont définis, alors $(x \oplus y) \oplus z \sim x \oplus (y \oplus z)$.

Ces axiomes sont en effet choisis de manière à correspondre au mieux aux objets physiques et aux opérations qui les concernent, et de manière à pouvoir définir l'addition des grandeurs associées, c'est-à-dire des classes d'équivalence. On suppose enfin que sont satisfaites trois conditions unissant $\sim$, $\prec$ et $\oplus$:

- si $x \neq y$, alors $x \prec x \oplus y$;
- si $x \prec z$, alors il existe y tel que $x \oplus y \sim z$;
- pour tout x et tout entier $n \in \mathrm{N}^*$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $y_1 \sim \ldots \sim y_n$, $y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$ est défini et $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$. (On comprend ici pourquoi on a supposé que chaque classe d'équivalence est infinie).

On désigne par G (comme grandeur) l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$ dans X, noté $X/\sim$. Dans la suite, la classe de x est notée $\tilde{x}$. À partir de la structure $(X, \sim, \prec, \oplus)$ ainsi supposée, on définit alors sur G :

- un *ordre total* : $\tilde{x} < \tilde{y}$ s'il existe $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$ tel que $x' \prec y'$.
- une *addition* : $\tilde{x} + \tilde{y}$ est l'ensemble des z tels que $z \sim x' \oplus y'$, où $x' \in \tilde{x}$ et $y' \in \tilde{y}$.

On définit la *multiplication* par un entier n à l'aide de l'addition itérée.

- une *soustraction* : $\tilde{x} - \tilde{y}$ est l'unique élément de G qui, ajouté à $\tilde{y}$ donne $\tilde{x}$.
- une *division* par $n \in \mathbf{N}^*$: le quotient de $\tilde{x}$ par n est $\tilde{y}$ où y est tel que : $y \sim y_1 \sim \ldots \sim y_n$, avec $x \sim y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$.

DGESCO 2007, pp. 3-4, Objets, grandeurs, mesures

Définition des grandeurs empruntée à (Rouche 1994). (Rouche 1992) propose une définition des rationnels et de la proportionnalité à partir de ce cadre.

• Pour une eau sucrée, à un volume d'eau v dL, il correspond une masse de sucre, que nous noterons provisoirement "m. pour v dL".
On a alors :

m. pour $(v + v')$ dL = m. pour v dL + m. pour v' dL

m. pour kv dL = $k \times$ m. pour v dL,

Par ailleurs, si on connaît la concentration en sucre, par exemple 2,5 g/L :

m. pour v dL = 2,5 g/dL $\times$ v dL = 2,5v g

De telles formulations, qui fournissent des moyens de résolution à adapter selon le niveau d'enseignement (la dernière fait intervenir une grandeur quotient), ont déjà été évoquées comme une alternative au tableau de proportionnalité. Elles conduisent à considérer une fonction, notée symboliquement m., qui à v dL associe 2,5v g, ce que l'on peut noter m. (v dL) = 2,5v g ou symboliquement v dL $\mapsto$ 2,5v g, fonction qui modélise la situation en termes de grandeurs.

• À une masse m kg de fromage, il correspond un prix, que nous noterons provisoirement "p. de m kg".
On a alors :

p. de $(m + m')$ kg = p. de m kg + p. de m' kg

p. de km kg = $k \times$ p. de m kg ,

Si par ailleurs, on connaît le prix au kilogramme, par exemple 16 €

p. de m kg = 16 €/kg $\times$ m kg = 16m €.

On est conduit à mettre en œuvre une fonction, notée symboliquement p. qui à m g associe 16m €, ce que l'on peut noter symboliquement p. (m g) = 16m €, ou encore m g $\mapsto$ 16m €, fonction qui modélise la situation en termes de grandeurs.

DGESCO 2007, p.34, 7.1 Calcul sur les grandeurs et fonction linéaire

Annexe 2 : extraits du manuel de cours élémentaire (Boucheny G. et al. 1930)

Mois de Novembre.

17e LEÇON

CENTAINES

80. ***Le nombre cent.*** — Prenons 99 jetons :

99 jetons correspondent à 9 piles de dix jetons et 9 jetons.

Ajoutons 1 jeton; nous avons **cent** jetons ou une **centaine** de jetons (fig. 32).

Avec cent jetons, nous pouvons former dix piles de dix jetons.


Cent jetons
FIG. 32.

Une centaine vaut dix dizaines ou cent unités.

Le nombre cent s'écrit 100. Le chiffre 1 qui représente une centaine s'écrit au 3e rang à partir de la droite.

81. ***Centaines.*** — Constituons des sacs de jetons contenant chacun cent jetons.

Prenons 2 sacs (fig. 33); nous avons 2 centaines de jetons, ou **deux cents,** que l'on écrit 200.

200 jetons
FIG. 33.

Prenons successivement 3, 4, ... 9 sacs de cent jetons; nous obtenons ainsi :

trois centaines ou **trois cents,** que l'on écrit 300,
quatre centaines ou **quatre cents,** » 400,
.....
neuf centaines ou **neuf cents,** » 900.

On compte par centaines comme on compte par dizaines et par unités.

82. ***Opérations sur les centaines.*** — Réunissons 2 sacs et 3 sacs de cent jetons. Nous avons en tout :

2 centaines + 3 centaines = 5 centaines de jetons,
ou 200 + 300 = 500.

On a de même :

5 centaines — 3 centaines = 2 centaines ou 500 — 300 = 200.
3 centaines × 2 = 6 centaines ou 300 × 2 = 600.
8 centaines : 2 = 4 centaines ou 800 : 2 = 400.

EXERCICES ORAUX

1. Compter par centaines de 100 à 900.

2. Combien peut-on remplir de boîtes de 100 plumes avec 500 plumes ? avec 900 ? avec 80 dizaines de plumes ? avec 70 dizaines ?

3. Combien peut-on faire de paquets de 10 cahiers avec 600 cahiers ? avec 800 ? avec 50 ?

4. Quelle est la somme formée par 3 billets de 100f ? par 5 billets ?

CALCUL MENTAL

Ajouter 3. — **1.** *Apprendre par cœur le tableau suivant (V. fig. 34) :*

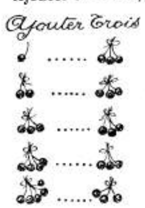


FIG. 34.

1 et 3 font 4	6 et 3 font 9
2 et 3 » 5	7 et 3 » 10
3 et 3 » 6	8 et 3 » 11
4 et 3 » 7	9 et 3 » 12
5 et 3 » 8	10 et 3 » 13

2. *Ajouter 1 et 3, 3 et 1; 2 et 3, 3 et 2; 4 et 3, 3 et 4....*

3. *Comptons des bûchettes. Combien en avons-nous, si nous en prenons :*

1 et 3? 11 et 3? 21 et 3? ... 91 et 3?
2 et 3? 12 et 3? 22 et 3? ... 92 et 3?
.....
9 et 3? 19 et 3? 29 et 3? ... 99 et 3?

4. *Ajouter 3 centaines et 2 centaines, 300 et 200, 300 et 300, 300 et 400, ...*

EXERCICES ET PROBLÈMES

1re et 2e années. — 185. Ecrire en chiffres les nombres suivants : trois cents, sept cents, neuf cents.

186. Convertir en unités : 5 centaines, 7 centaines, 40 dizaines.

187. Convertir en dizaines : 8 centaines, 6 centaines, 300 unités.

188. Convertir en centaines: 500 unités, 20 dizaines, 90 dizaines.

189. Ecrire de 3 en 3 les nombres de 30 à 60, de 61 à 91, de 52 à 82.

190. Effectuer : 1° 300l + 400l + 200l; 2° 500l + 100l + 200l.

191. Effectuer : 1° 900m — 300m; 2° 800m — 400m; 3° 700m — 200m.

192. Effectuer : 1° 200m × 2; 2° 300m × 2; 3° 400m × 2.

193. Effectuer : 1° 800m : 2; 2° 600m : 2; 3° 1 200m : 2.

194. Un crémier a 300 œufs dans un panier et 400 dans un autre. Combien a-t-il d'œufs en tout ?

195. Une plantation compte 500 arbres. On en retire 200. Combien reste-t-il d'arbres ?

196. Un libraire achète 6 paquets de 100 cahiers. Combien a-t-il de cahiers ?

197. Deux enfants se partagent 400 billes. Combien chaque enfant reçoit-il de billes ?

2e année. — 198. Un libraire avait 9 paquets de 100 cahiers. Il a vendu 5 paquets. Combien lui reste-t-il de cahiers ?

199. Combien peut-on remplir de boîtes de 100 plumes avec 800 plumes ?

200. Un employé place à la Caisse d'épargne 200f par mois. Combien place-t-il par trimestre ?

201. Un ouvrier a reçu 600f pour 2 semaines de travail. Combien gagne-t-il par semaine ?

202. Paul devait 800f à son menuisier. Il a donné deux acomptes de 300f chacun. Combien doit-il encore ?

203. Pierre devait 900f à son charron. Il a déjà payé deux acomptes, l'un de 300f, l'autre de 400f. Que doit-il encore ?

204. Une pépinière contient 500 pommiers et 400 poiriers. Combien a-t-elle d'arbres en tout ?
Si l'on enlève 200 pommiers et 200 poiriers, combien reste-t-il : 1° de pommiers ? 2° de poiriers ? 3° d'arbres en tout ?

205. Jacques part à l'école, distante de sa maison de 400m. A moitié chemin, il s'aperçoit qu'il a oublié un livre. Il revient chez lui, puis retourne à l'école. Quelle distance a-t-il parcourue en arrivant à l'école ?

19e LEÇON

ENTRE DEUX CENTAINES CONSÉCUTIVES

89. Pour former les nombres compris entre cent et deux cents, nous avons ajouté successivement, à cent, les 99 premiers nombres.
Si, de même, nous ajoutons successivement les 99 premiers nombres à 200, à 300, ..., à 900, nous obtenons les nombres :

FIG. 39.

deux cent un (fig. 39), que l'on écrit 201,
deux cent deux, que l'on écrit 202,

.....

deux cent quatre-vingt-dix-neuf, que l'on écrit 299,

trois cent un, que l'on écrit 301,
trois cent deux, que l'on écrit 302,

.....

trois cent quatre-vingt-dix-neuf, que l'on écrit 399,

.....

neuf cent un, que l'on écrit 901,

.....

neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, que l'on écrit 999.

90. De 100 à 999, les nombres ont 3 chiffres.
Le premier chiffre, à droite, représente des unités; le 2e représente des dizaines; le 3e, des centaines.
Le nombre formé de 3 centaines, 2 dizaines et 5 unités (fig. 40) s'écrit 325 et se lit **trois cent vingt-cinq.**

FIG. 40.

Le nombre formé de 3 centaines et 5 unités s'écrit 305 et se lit **trois cent cinq.** Le zéro tient, au 2e rang, la place des dizaines.

Addition et soustraction. — Se reporter aux règles nos 61 et 63.

EXERCICES ORAUX

1. Lire les nombres suivants : **207. — 311. — 426. — 533. — 640.** — 704. — 873. — 994.

2. Dans le nombre 478, que représente le 8 ? le 7 ? le 4 ?

3. Dans le nombre 509, quel est le chiffre des unités ? Combien y a-t-il d'unités ? Quel est le chiffre des dizaines ? Combien y a-t-il de dizaines ? Quel est le chiffre des centaines ? Combien y a-t-il de centaines ?

CALCUL MENTAL

Multiplier et diviser par 3.

1. *Apprendre par cœur la table suivante (fig. 41) :*

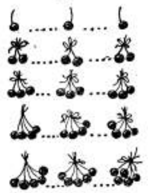


FIG. 41.

3 fois 1 font 3	**3 fois 6 font 18**
3 » 2 » 6	**3 » 7 » 21**
3 » 3 » 9	**3 » 8 » 24**
3 » 4 » 12	**3 » 9 » 27**
3 » 5 » 15	**3 » 10 » 30**

2. ***Multiplier un nombre par 3, c'est le tripler.***
Quel est le triple de 4? de 7? de 8?

3. ***Diviser un nombre par 3, c'est en prendre le tiers.***
Quel est le tiers de 6? de 12? de 24? de 15? de 30?

4. *Combien a-t-on de cerises si l'on en a :*
2 groupes de 3? 3 groupes de 2? 3 groupes de 3?
3 paniers de 20? de 30? de 200? de 300?

5. *Un jardinier met des navets par bottes de 3. Combien fera-t-il de bottes avec 9 navets? avec 18? avec 12? avec 24? avec 15? avec 30? avec 21? avec 27?*

EXERCICES ET PROBLÈMES

1re et 2e années. — 226. Ecrire en chiffres les nombres suivants : **cent huit — deux cent vingt — trois cent soixante-six — quatre cent soixante-seize — cinq cent treize — six cent quatre-vingt-treize — sept cent neuf — huit cent onze — neuf cent quatre-vingt-onze.**

227. Décomposer en centaines, dizaines et unités les nombres :
345. — 408. — 600. — 894. — 901.

228. Ecrire un zéro entre les deux chiffres des nombres suivants et écrire en lettres les nombres obtenus :
18, 27, 35, 49, 33.

229. Ecrire de dix en dix :

1° les nombres de 200 à 300;	5° les nombres de 600 à 700;
2° » 300 à 400;	6° » 700 à 800;
3° » 400 à 500;	7° » 800 à 900;
4° » 500 à 600;	8° » 900 à 990.

230. Ecrire les nombres pairs de **200 à 250**; de 300 à 250.

231. Ecrire les nombres impairs de **301 à 351**; de 399 à 351.

232. Ecrire de **3** en 3 les nombres de **0 à 30**, puis de 30 à 0.

233. Un jardinier porte au marché 3 caisses de 6 melons. Combien a-t-il de melons ?

234. Une fleuriste confectionne des bouquets de 3 roses chacun. Combien fera-t-elle de bouquets avec 24 roses ?

235. Un horticulteur a cueilli 18 roses; il en fait 3 bouquets égaux. Combien met-il de roses par bouquet ?

236. Un marchand de vin mélange, d'une part, 8 litres; d'autre part, 7 litres de vin de même qualité; il répartit le tout également en 3 flacons. Combien y a-t-il de vin dans chaque flacon ?

237. Un jardinier partage 24 pommes entre 3 enfants. Combien chaque enfant reçoit-il de pommes ? Combien aurait-il fallu de pommes pour que chaque enfant en reçoive 9 ?

238. Pierre possède 8f, Jean ne possède que 4f. Combien Pierre devra-t-il donner à Jean pour qu'ils possèdent tous deux la même somme ? Que manque-t-il à Pierre pour posséder 3 fois plus que Jean ?

LES ÉLÈVES MESURENT UNE LONGUEUR AVEC LA CHAÎNE.

20e LEÇON

L'HECTOMÈTRE

91. A l'aide de la chaîne d'arpenteur, mesurons, dans la rue, en ligne droite, une distance de 100^{m} : c'est un **hectomètre.** Si la chaîne employée mesure 10^{m}, nous avons dû la porter dix fois.

92. L'hectomètre (hm) vaut 100 mètres ou 10 décamètres.

93. Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines.

hm	dam	m
cent.	diz.	u.
.	.	.

Les points indiquent qu'il faut un chiffre pour représenter chacune des unités de longueur.

EXEMPLES :

$3^{hm}\ 7^{dam}\ 5^{m}$ s'écrit 375^{m}.
$3^{hm}\ 7^{dam}$ » 370^{m}.
$3^{hm}\ 5^{m}$ » 305^{m}.

Le nombre 428^{m} représente $4^{hm}\ 2^{dam}\ 8^{m}$.

94. Il n'y a pas de mesures de longueur d'un hectomètre. Le long des routes, les hectomètres sont indiqués par de petites bornes dites **bornes hectométriques.** (V. n° 127.)

EXERCICES D'ÉVALUATION ET DE MESURAGE

1. Jalonner une distance de 100^{m}. Planter un jalon tous les 10^{m}. Parcourir cette distance d'un pas régulier. Compter les pas. Chronométrer.

2. Continuer la marche, en ligne droite et du même pas :
1° en faisant le même nombre de pas que précédemment;
2° en marchant pendant le même temps.
Mesurer la distance parcourue dans les deux cas.

3. Déterminer, à vue, dans diverses directions, le point qui se trouve à 1^{hm}, à 2^{hm}, ..., de la porte de l'école.

EXERCICES ORAUX ET CALCUL MENTAL

1. *Le mètre étant pris pour unité, à quel rang s'écrivent les décamètres ? les hectomètres ?*

2. *Dans le nombre 348^{m}, que représente le 3? le 4? le 8?*

3. *Combien y a-t-il de mètres dans 3^{hm}? dans 5^{dam}? dans $3^{hm}5^{dam}$? dans $3^{hm}5^{m}$?*

4. *Combien y a-t-il d'hectomètres dans 8^{hm}? dans $8^{hm}5^{dam}$?*

5. *Combien y a-t-il d'hectomètres dans 600^{m}? dans 40^{dam}?*

EXERCICES ÉCRITS ET PROBLÈMES

1re année. — 239. Convertir en mètres : 8^{hm}; $8^{hm}5^{dam}$; $8^{hm}5^{m}$.

240. Convertir en décamètres : 7^{hm}; $7^{hm}6^{dam}$; 700^{m}.

241. Convertir en hectomètres : 900^{m}; 300^{m}; 90^{dam}; 30^{dam}.

242. Votre laitière habite à 9^{hm} de chez vous. Quelle distance, en mètres, parcourez-vous, aller et retour, pour aller chercher votre lait ?

243. Une rue a 9^{hm} de longueur. On en a pavé le tiers. Quelle est, en mètres, la longueur pavée ? Quelle longueur, en décamètres, reste-t-il à paver ?

244. Il faudrait 3^{hm} de fil de fer pour entourer un jardin. On n'en a que 25^{dam}. Combien manque-t-il de mètres ?

2e année. — 245. Décomposer les nombres suivants en hectomètres, décamètres et mètres : 735^{m}; 640^{m}; 804^{m}; 535^{m}.

246. Effectuer en prenant le mètre pour unité :

1° $3^{hm}+4^{hm}$	3° $7^{hm}+50^{m}$	5° $45^{dam}+325^{m}$
2° $5^{hm}+20^{dam}$	4° $8^{hm}+5^{m}$	6° $3^{hm}2^{dam}+3^{hm}2^{m}$.

247. Effectuer en prenant le décamètre pour unité :
$5^{hm}+4^{hm}$; $3^{hm}+40^{dam}$; $4^{hm}+400^{m}$; $300^{m}+120^{m}$.

248. Effectuer en prenant l'hectomètre pour unité :
$300^{m}+500^{m}$; $40^{dam}+50^{dam}$; $20^{dam}+500^{m}$; $300^{m}+6^{hm}$.

249. Effectuer en prenant pour unité celle du plus grand nombre:

1° $9^{hm}-30^{dam}$	3° $70^{dam}-4^{hm}$	5° $875^{m}-5^{hm}$
2° $8^{hm}-300^{m}$	4° $70^{dam}-300^{m}$	6° $720^{m}-40^{dam}$.

250. Une haie mesure 3^{hm} de longueur. On l'a taillée sur une longueur de 20^{dam}. Quelle longueur, en mètres, reste-t-il à tailler ?

251. Combien faut-il de décamètres de fil de fer pour établir 3 rangées de fil le long d'un champ de 3^{hm} de longueur ?

LE SOMMELIER.

21e LEÇON

L'HECTOLITRE

95. Un sommelier soutire dans des *litres* le vin contenu dans un fût complètement plein. Si, avec ce vin, il peut remplir 100^l, ce fût contient un **hectolitre**.

Si le sommelier soutirait ce vin avec des seaux de 10^l, il en aurait rempli dix seaux.

hl	dal	l
cent.	diz.	u.
.	.	.

Les points indiquent qu'il faut un chiffre pour représenter chacune des unités de capacité.

96. L'hectolitre (hl) vaut 100 litres ou 10 décalitres.

97. Dans l'écriture d'un nombre exprimant des capacités, si le litre est pris pour unité, les hectolitres s'écrivent au rang des centaines.

EXEMPLES :
$3^{hl}\ 7^{dal}\ 5^l$ s'écrit 375^l.
$3^{hl}\ 7^{dal}$ » 370^l.
$3^{hl}\ 5^l$ » 305^l.

Le nombre 428^l représente $4^{hl}\ 2^{dal}\ 8^l$.

98. Dans la pratique, on utilise aussi des mesures de 100^l (fig. 42) et de 50^l.

FIG. 42.

EXERCICES ORAUX ET CALCUL MENTAL

1. *Le litre étant pris pour unité, à quel rang s'écrivent les décalitres? les hectolitres?*

2. *Dans le nombre 435^l, que représente le 4? le 3? le 5?*

3. *Combien y a-t-il de litres dans 3^{hl}? dans 5^{dal}? dans 3^{hl} et 5^{dal}?*

4. *Combien y a-t-il de décalitres dans 4^{hl}? dans 90^l?*

5. *Combien y a-t-il d'hectolitres dans 700^l? dans 80^{dal}?*

EXERCICES ÉCRITS ET PROBLÈMES

1re année. — 252. Convertir en litres :

8^{hl}	4^{dal}	$5^{hl}\ 4^{dal}$	$7^{hl}\ 5^l$.
3^{hl}	7^{dal}	$8^{hl}\ 3^{dal}$	$8^{hl}\ 8^l$.

253. Convertir en décalitres : 7^{hl}; 80^l; $6^{hl}5^{dal}$.

254. Convertir en hectolitres : 600^l; 400^l; 60^{dal}; 40^{dal}.

255. Avec le vin d'un tonneau plein, on a pu remplir deux fûts, l'un de 2^{hl}, l'autre de 2^{dal}. Calculer, en litres, la contenance du tonneau.

256. Un bassin contient 3^{hl} d'eau. On en retire la contenance de 20 arrosoirs d'un décalitre. Combien reste-t-il de litres d'eau dans ce bassin ?

257. Quelle est, en litres, la contenance d'une bonbonne d'huile, sachant qu'avec son contenu on a pu remplir 6 bidons d'un décalitre et 3 fioles de 2^l ?

2e année. — 258. Décomposer les nombres suivants en hectolitres, décalitres et litres : 648^l; 580^l; 208^l.

259. Convertir en litres et effectuer :

1° $4^{hl} + 5^{hl}$	3° $5^{hl} + 30^{dal}$	5° $30^{dal} + 4^{hl}$
2° $9^{hl} - 3^{hl}$	4° $8^{hl} - 50^{dal}$	6° $70^{dal} - 3^{hl}$.

260. Convertir en décalitres et effectuer :

1° $5^{hl} + 3^{hl}$	3° $4^{hl} + 300^l$	5° $600^l + 300^l$
2° $8^{hl} - 3^{hl}$	4° $700^l - 3^{hl}$	6° $900^l - 300^l$.

261. Convertir en hectolitres et effectuer :

$500^l + 400^l$; $900^l - 400^l$; $60^{dal} + 30^{dal}$; $90^{dal} - 30^{dal}$.

262. Avec le vin contenu dans un fût plein, on a rempli un hectolitre, un demi-hectolitre, un double décalitre, un décalitre et un demi-décalitre. Quelle est, en litres, la contenance du fût ?

263. Un tonneau contient 178^l de vin. On en retire d'abord 5^{dal}, puis 25^l. Combien reste-t-il de litres de vin dans ce tonneau ?

264. Un réservoir contient 12^{hl} d'eau. On en a retiré le tiers. Combien reste-t-il de litres d'eau dans ce réservoir ?

265. Un débitant reçoit 3 fûts de bière de 5^{dal} chacun et 5 fûts de 3^{dal}. Combien a-t-il, en tout, d'hectolitres de bière ?