ÉLABORATION D'UNE FORMATION A LA LOGIQUE POUR LES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES.

Christophe HACHE, Zoé MESNIL

Nous voudrions dans cet atelier présenter un stage de formation continue intitulé « Initiation à la logique » et proposé par l'IREM de Paris depuis 2010 dans les trois académies d'Île de France. Il s'agit notamment d'expliquer certains de nos choix relatifs aux contenus de ce stage. Comme nous le verrons dans la première partie de cet exposé, nous nous inscrivons dans le thème 1 du colloque de la CORFEM 2012 autour des « Nouveaux savoirs et nouveaux dispositifs dans l'enseignement secondaire », non pas parce que la logique fait son apparition dans l'enseignement des mathématiques au lycée, mais plutôt parce qu'un accent particulier est mis dessus dans les derniers programmes. Ceux-ci fixent en effet des objectifs en matière de « notations et raisonnement mathématiques », tentant peut-être de répondre ainsi au constat récurrent de difficultés des élèves dans leur manière de s'exprimer et de raisonner.

Ces objectifs concernent des notions relevant de la logique, le statut de ces notions est flou, dans les programmes, mais aussi dans la pratique des mathématiciens, comme nous le verrons. Il n'y a effectivement pas de contenu de référence en ce qui concerne la logique, pas de consensus ni sur les connaissances dans ce domaine qui sont nécessaires pour faire des mathématiques ni sur la manière de les transmettre aux élèves et étudiants.

La logique étudie deux composantes de l'activité mathématique : le langage et le raisonnement. Dans la formation que nous proposons, nous insistons davantage sur les liens entre logique et langage, qui sont plus rarement évoqués que ceux entre logique et raisonnement. Nous proposons ainsi aux professeurs de perfectionner leurs connaissances en logique, à partir d'une approche naïve du langage mathématique qui leur est familier. Sans entrer dans une présentation formelle de la logique mathématique, nous lui empruntons certains de ses objets d'étude dont nous donnons quelques propriétés et dont nous nous servons pour mettre à jour certains implicites et certaines ambiguïtés du langage mathématique. Ces apports théoriques visent surtout à permettre aux professeurs d'exercer une certaine vigilance sur la façon dont « on parle les mathématiques » (dont ils parlent des mathématiques, dont ils parlent en cours de mathématiques, dont parlent les élèves etc.) et de repérer ainsi ce qui peut être particulièrement complexe pour les élèves. Nous proposons ici, en deuxième partie, quelques exemples des points abordés pendant le stage et les choix qui les motivent.

Le stage comporte aussi une partie plus pratique. Nous mettons à l'épreuve ces connaissances théoriques pour analyser comment les manuels parlent de logique, ceci à partir d'extraits choisis de « cours » et d'exercices proposés. Des enseignants du secondaire du groupe « Logique » de l'IREM de Paris viennent exposer des exercices ou des séquences qu'ils ont proposés dans leurs classes. Enfin, lors de la troisième journée de stage, ce sont les stagiaires qui proposent un retour sur des activités qu'ils ont mises en place dans leurs classes.

La logique dans les lycées : un nouveau (?) savoir (?)

« Notations et raisonnement mathématiques » dans les nouveaux programmes de mathématiques pour le lycée.

La nouveauté de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée peut se discuter. En effet, une opinion courante est de considérer que l'on fait forcément de la logique quand on fait des mathématiques, et qu'il n'est pas besoin d'attendre que les programmes parlent de logique pour savoir qu'il y a certaines notions de logique dont il est bon de parler aux élèves. Il n'empêche que le programme de 2009 pour la classe de Seconde a amené certains changements. Regardons ces programmes plus attentivement : on trouve tout d'abord dans les commentaires au début du programme (Mathématiques, Classe de Seconde, 2009) un paragraphe « Raisonnement et langage mathématiques » dont voici un extrait :

> *Le développement de l'argumentation et* ***l'entraînement à la logique*** *font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.* Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme […] Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ.

Le gras est celui du texte du programme. Nous avons mis en italique ce qui était déjà présent dans le programme de 2001 (si ce n'est qu'il n'était pas question de « logique mathématique » mais de « logique formelle »... sans qu'il soit possible de savoir la nuance que souhaitaient apporter là les auteurs des programmes). Ceci marque ainsi un retour discret de la logique dans les programmes de mathématiques du lycée, nouvel épisode d'une histoire mouvementée (Mesnil, 2012).

C'est en 1960 que les programmes de mathématiques mentionnent explicitement pour la première fois des notions de logique avec l'apparition des symboles d'implication, d'équivalence et des quantificateurs. La logique est bien sûr très présente dans le programme pour la classe de Seconde de 1969 (réforme dite « des maths modernes »), elle est associée à la théorie des ensembles pour constituer la base du langage mathématique. Cette réforme ayant subi les échecs et critiques que l'ont connaît (mathématiques trop abstraites et élitistes, pas adaptées aux besoins scientifiques), le programme de 1981 (dit « de la contre-réforme ») adopte une attitude « inverse » en ce qui concerne la logique : elle est exclue, jetée avec l'eau du bain formaliste (on trouve dans ce programme les indications suivantes : « il convient de souligner les formes diverses de raisonnement mathématique mises en jeu dans les situations étudiées ; mais on évitera tout exposé de logique mathématique. »). L'exclusion persiste dans le programme de 1990, jusqu'au timide retour déjà évoqué dans le programme de 2001. Soulignons également une présence plus marquée de la logique dans le programme de Première pour la section littéraire en 2004.

Le programme de 2009 comporte cependant encore une nouveauté par rapport à celui de 2001, c'est la présence d'un tableau fixant, pour tout le lycée, des objectifs en terme de « notations et raisonnement mathématiques » :

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Tableau 1 – Extrait du programme 2009 pour le lycée

La publication du programme s'accompagne de celle d'un document « ressources pour la classe de Seconde » (document ressource, 2009), intitulé « Notations et raisonnement mathématiques ». Quelques exemples d'activités y sont donnés et commentés, mais on n'y trouve aucune connaissance théorique sur les objets évoqués par le programme[1].

Exemples d'effets de ces nouveaux programmes.

Nous donnerons deux exemples d'effet direct de ces programmes. Dans la plupart des manuels de mathématiques de Seconde publiés pour la rentrée 2010, on peut trouver des pages où sont évoquées les notions dont il est question dans le tableau ci-dessus. Ces pages n'existaient pas dans les versions précédentes des manuels. On trouve aussi dans chaque manuel un certain nombre d'exercices avec un logo « logique » (notamment beaucoup d'exercices « vrai ou faux »). On trouve donc bien, de fait, du nouveau à enseigner dans les manuels, même si cela ne change pas forcément la pratique de certains professeurs.

Zoé Mesnil a interrogé en 2011, à travers un questionnaire en ligne, des enseignants de mathématiques de Seconde. 41 réponses ont été obtenues, d'une part de professeurs inscrits à la formation « initiation à la logique », d'autre part de professeurs qui ont bien voulu donner leur avis sur l'enseignement de la logique au lycée. La question « Travaillez-vous sur des notions de logique avec vos élèves de Seconde ? » a été posée en différenciant deux époques, avant 2009 et depuis 2009. Sur 41 professeurs ayant répondu, 21 déclarent qu'ils travaillaient sur des notions de logique avant 2009, contre 16 qui déclarent qu'ils ne le faisaient pas (3 professeurs n'étaient pas encore en poste),

1 On peut trouver analyse de ce document dans (Groupe Logique et Raisonnement de l'IREM de Grenoble, 2011).

alors que 38 déclarent travailler sur des notions de logique depuis 2009, contre 3 qui déclarent ne pas le faire. Les professeurs qui ont répondu au questionnaire sont sans doute particulièrement soucieux de ces questions de logique, mais il semble tout de même que les injonctions du programme aient eu un effet, reste à savoir ce que signifie pour les professeurs « travailler sur des notions de logique ».

En effet, nous avons montré que la présence de notions de logique dans les nouveaux programmes présentait un certain caractère de nouveauté, mais s'agit-il d'enseigner un nouveau savoir ? A quel contenu exact correspondent ces objectifs ? Qu'est-ce qu'il s'agit d'enseigner ? Le professeur qui a la charge d'atteindre les objectifs donnés doit répondre à ces questions difficiles, il devrait pouvoir éventuellement être aidé en consultant le programme et d'éventuelles ressources qui l'accompagneraient, ou qui lui seraient suggérées. Nous sommes dubitatifs sur cette possibilité concernant la logique.

Pour illustrer ce point, nous proposons une comparaison avec une autre nouveauté de ce programme : la notion d'*échantillon*, que le programme précédent ne faisait qu'évoquer. Cette notion est définie explicitement dans le programme, ainsi que dans le document ressources « Probabilités et statistiques », où il est précisé que « cette notion d'échantillon fournit un cadre théorique pour démontrer les résultats énoncés ci-dessous sur la fluctuation d'échantillonnage ». Par ailleurs, quiconque voudra en savoir plus sur l'échantillonnage pourra toujours aller ouvrir un livre de statistiques, et il est à noter que les statistiques, très présentes dans les nouveaux programmes, avaient fait auparavant leur entrée dans le programme de la formation initiale des enseignants.

La notion de *proposition conditionnelle* est aussi une notion nouvelle dans le programme (voir ci-dessus : « les élèves sont entrainés (...) à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles »). Cette notion n'est définie ni dans le programme, ni dans le document ressources « notations et raisonnement mathématiques ». Cela ne choquera pas ceux qui pensent que les connaissances en logique relèvent d'un savoir spontané, et que faire des mathématiques suffit pour savoir par exemple ce qu'est une proposition conditionnelle. Tout dépend bien sûr de ce qu'on entend par « savoir ». Beaucoup de théorèmes mathématiques se présentent sous la forme d'une implication universellement quantifiée (nous préférons cette expression à celle de proposition conditionnelle dont nous ne savons pas exactement ce qu'elle recouvre), et on peut effectivement considérer que toute personne ayant une bonne habitude des mathématiques a compris comment utiliser ou démontrer un théorème se présentant sous cette forme. Mais nous pensons que ces connaissances issues de la pratique, comportant de nombreux implicites sur lesquels nous reviendrons, ne sont pas suffisantes pour un professeur qui veut transmettre cette notion à ses élèves. Celui-ci a besoin également d'adopter une attitude réflexive par rapport à ce type d'objet. C'est une des motivations essentielles de la création de la formation que nous décrivons ici.

Concernant l'implication, des recherches (Deloustal-Jorrand, 2001 ; Rogalski et Rogalski, 2004) sur les conceptions d'étudiants en formation de professeur de mathématiques montrent une méconnaissance de cet objet. Nos questions aux stagiaires suivant la formation confirment ce constat : la forme disjonctive (NON(*A*) OU *B*) de l'implication (*AB)*, le fait que la négation d'une implication ne se présente pas « naturellement » sous la forme d'une implication, les « règles de distribution » des quantificateurs sur les connecteurs ET et OU, sont des propriétés ignorées d'une partie d'entre eux. Dans le questionnaire aux enseignants de Seconde déjà évoqué ci-dessus, il a été demandé aux professeurs si « pour construire un enseignement [leur] permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme, [leurs] connaissances en matière de logique mathématique [leur paraissaient] suffisantes ». 30 d'entre eux répondent « oui » (sachant que la plupart disent avoir eu une initiation à la logique dans leurs études supérieures), 11 répondent « non ». Ici encore l'échantillon des professeurs qui ont répondu n'est pas représentatif de l'ensemble des professeurs de mathématiques mais ces résultats laissent à penser qu'un nombre non négligeable de professeurs ressentent un manque de formation en matière de logique.

Cette comparaison entre deux points du programme souligne ce que nous constatons par ailleurs : la logique mathématique est une discipline des mathématique reconnue comme telle et fournissant des résultats importants à d'autres branches des mathématiques mais ça n'est cependant pas vers elle que l'on se tourne spontanément pour étudier la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique (ce qui ne serait peut-être effectivement pas directement efficace pour ce qui concerne les objectifs des nouveaux programmes), et elle n'est actuellement pas au programme de la formation initiale des professeurs (il existe localement de petites initiations à la logique, soit en classe préparatoire, soit en début de cursus universitaire, mais sans que les connaissances visées soient orientées vers l'enseignement). Nous sommes donc convaincus que les nouveaux programmes introduisent une nouveauté concernant la logique. Et comme nous l'avons mentionné, ceci se fait sans qu'il y ait de consensus sur un contenu de référence qui constituerait les bases de logique à connaître pour faire des mathématiques, ni sur la façon de parler de ce contenu.

De la nécessité d'une formation

Logique, vous avez dit logique ?

Le terme « logique » n'est pas un terme proprement mathématique. On parle généralement de logique là où il y a raisonnement (« un cheval, des chevaux, un canal, des canaux, un maréchal, des maréchaux, un festival, des festivaux, logique non ?! ») et là où il y a des règles, explicites ou non, dictant une façon de faire (« La logique du vivant » de François Jacob... ou « Pour en finir avec le darwinisme : une nouvelle logique du vivant » de Rosine Chandebois). On parle parfois de *logique naturelle* pour désigner « toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante » (Deloustal-Jorrand, 2004). Cette logique naturelle est présente dans l'activité des élèves (on devrait plutôt dire ces logiques naturelles, puisque chaque élève peut user de la sienne qui ne sera pas forcément celle de son voisin). Dans le programme de 2009, l'élève doit être amené à « détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». On trouve dans la suite du texte du programme, comme exemple de ces différences entre logique mathématique et logique du langage courant qu'il est important de distinguer, celle entre implication mathématique et causalité. Vaste programme qui demande un peu plus d'explications : les deux notions d'implication mathématique et de causalité étant chacune complexes, elles méritent peut-être d'être étudiées pour elles-mêmes avant d'être comparées l'une à l'autre !

Les manuels sonnent l'alerte

Lors de la mise en place des programmes, il a été très intéressant d'analyser la façon dont les manuels se sont emparés de ces objectifs. Nous précisons ici quelques exemples tirés des analyses effectuées par le groupe « Logique » de l'IREM de Paris (Groupe logique, 2011).

Peu de manuels se sont aventurés à parler de la distinction évoquée entre implication mathématique et causalité. Le document ressources « Notations et raisonnement mathématiques » (document ressource, 2009) n'en dit pas plus sur cette distinction. Nous ne saurions dire ce que les rédacteurs du programme avaient en tête en écrivant cette phrase, ce qui nous paraît essentiel c'est de ne pas confondre « si *A* alors *B* » et « *A* donc *B* », nous y reviendrons. Par contre, à propos de « détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant », tous les manuels signalent la distinction entre le « ou » du langage courant qui est la plupart du temps exclusif (l'exemple « fromage ou dessert » est dans plusieurs manuels), contrairement à son usage en mathématiques où il est inclusif. Nous allons creuser cet exemple.

Les comportements des connecteurs logiques ET et OU par rapport aux valeurs de vérité sont liés à la signification usuelle du « et » et du « ou » dans le langage courant. Il a fallu faire un choix entre « ou » exclusif et « ou » inclusif, les deux étant présents dans le langage courant. Le connecteur logique OU correspond au « ou » inclusif, ce qui n’est peut-être pas l’interprétation spontanée de certains élèves. Les connecteurs ET et OU présentent ainsi une certaine « dualité » qui peut être expliquée aux élèves. Mais tous les « et » et les « ou » employés pour parler d'objets mathématiques ne sont pas des connecteurs logiques au sens mathématique du terme, c'est-à-dire des opérateurs sur les propositions, qui permettent, à partir de deux propositions P et Q, de former leur conjonction (P ET Q) ou leur disjonction (P OU Q). Certains ne sont, même « en mathématiques », que des conjonctions de coordination. Par exemple, si « les ensembles A et B sont non vides » est bien un raccourci de la conjonction des deux propositions « A est un ensemble non vide » et « B est un ensemble non vide », la situation est toute différente pour « les ensembles A et B sont disjoints » qui n'est pas une conjonction de deux propositions (on évoque là la propriété d'un couple de deux ensemble, le « et » a le même rôle que dans « Pierre et Paul sont frères »).

La plupart des manuels parlent du « et » et du « ou », mais de façons parfois assez différentes. Un premier exemple de traitement :

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :
– « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
– « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :
– « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
– « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».

Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)

« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)

La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Figure 1 – Un extrait du manuel Indice

Ce manuel propose une approche « naturelle » du langage mathématique : celui-ci n'est rien d'autre que le langage courant utilisé « en mathématiques » (c'est-à-dire vraisemblablement quand on parle d'objets mathématiques, quand on est en cours de mathématiques). On peut noter que la notion de proposition est absente de cet extrait de manuel (même implicitement). Il est question de phrases.

Soulignons plusieurs implicites dans les exemples proposés. C'est à la charge de l'élève par exemple de voir les deux propositions « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » dans la proposition raccourcie « 6 est un nombre pair et un multiple de 3 ». Ça n'est peut-être pas très compliqué mais pourquoi ne pas signaler ce point ? Par ailleurs, la proposition « 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs ou des multiples de 3 » peut être entendue de plusieurs façons.

D'une part comme :

(0 est un nombre pair OU 0 est un multiple de 3)
ET (2 est un nombre pair OU 2 est un multiple de 3)
ET (3 est un nombre pair OU 3 est un multiple de 3)
ET (6 est un nombre pair OU 6 est un multiple de 3)

ou d'autre part comme :

(0 est un nombre pair ET 2 est un nombre pair ET 3 est un nombre pair ET 6 est un nombre pair)
OU
(0 est un multiple de 3 ET 2 est un multiple de 3 ET 3 est un multiple de 3 ET 6 est un multiple de 3)

La présence des virgules amène une ambiguïté car les deux interprétations possibles ne sont pas équivalentes, il est facile de s'en apercevoir : la première proposition est vraie, la deuxième proposition est fausse. La phrase aurait bien sûr pu être prononcée par un mathématicien, le manuel n'est pas en cause sur ce point, nous cherchons à souligner les implicites sous-jacents à de tels raccourcis de formulation.

Remarquons au passage que de telles propositions sont longues à écrire, d'où le recours à des formes raccourcies si l'on choisit de s'exprimer dans des formulations du langage courant, ou à de la symbolisation si l'on choisit de s'exprimer dans un langage mathématique plus formalisé (ici on pourrait par exemple appeler $P(n)$ le prédicat « n est un nombre pair » et $Q(n)$ le prédicat « n est un multiple de 3 », et l'on verrait plus clairement les ressemblances et différences entre les structures des deux propositions).

D'autres manuels ont une approche plus « propositionnelle » des connecteurs ET et OU. Ceux-ci sont effectivement définis comme des opérateurs sur les propositions (aspect syntaxique) dont on donne le comportement par rapport aux valeurs de vérité (aspect sémantique). Par exemple :

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Figure 2 – Un extrait du manuel Symbole

Ici, des objets sont définis, du vocabulaire est introduit, qui peut servir. Les définitions du manuel correspondent bien aux définitions savantes. La manière de définir les propositions est peu précise : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » n'est pas la conjonction d'« être rectangle » et « isocèle », mais de « le triangle ABC est rectangle » et « le triangle ABC est isocèle », moyennant encore une fois un raccourci de formulation (non explicité). Par ailleurs, un exercice dans lequel il serait question d'un triangle « rectangle ou isocèle » semble improbable, et même si effectivement l'élève pourrait alors devoir distinguer deux cas, est-il alors bien clair pour lui que les situations « rectangle » et « isocèle » ne sont pas forcément disjointes, contrairement à ce qui se passe la plupart du temps (mais qui n'est pas une obligation) quand on fait un raisonnement par disjonction des cas ?

La notion de proposition est absente de la plupart des pages des manuels qui parlent de notions de logique. Et elle est souvent absente du discours des professeurs, ceux que nous voyons au stage considèrent généralement que c'est une notion trop abstraite. Pourtant nous défendons l'idée que les propositions sont un élément essentiel dans l'acquisition du langage mathématique, et que cette notion peut être introduite comme « phrase mathématique pouvant être vraie ou fausse », pourquoi pas dès le collège, en association avec la notion de variable. C'est par contre sans doute plus difficile pour des élèves de considérer les propositions comme des objets et de considérer qu'il est possible de faire des « opérations » sur ces propositions. Mais ce n'est peut-être pas beaucoup plus difficile que de voir les fonctions comme des objets pouvant avoir la propriété d'être croissante ou non, pouvant être additionnées. Les deux extraits cités malmènent, selon nous, cette notion de proposition et donc, par là même, la notion de connecteur logique. Le problème est que les élèves ont des tâches à faire avec ces seules explications !

Regardons par exemple l'exercice suivant :

Pour s'entraîner

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs ... inférieurs à 10.
b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 ... inférieurs à 10.
c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 ... par 2.
d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 ... de 5.

Figure 3 – Un extrait du manuel Indice

Outre les soucis déjà signalés liés à l'interprétation des virgules, et en passant sur le fait qu'il n'est pas précisé que les phrases doivent être complétées de manière à être vraies, il faut tout de même signaler une stratégie efficace pour cet exercice qui est de compléter toutes les phrases avec des « OU » puisque quand (A ET B) est vraie, (A OU B) l'est aussi. Cette stratégie a peu de chance d'émerger dans une classe de Seconde, car nous sommes habitués à répondre en nous conformant inconsciemment au principe du maximum d'information qui œuvre dans la vie courante : si l'on peut donner une réponse contenant plus d'informations qu'une autre réponse, même si les deux sont justes, c'est celle-là que l'on donne. Or le raisonnement logique ignore ce principe : deux réponses justes sont également acceptables, il n'y a pas des propositions « plus vraies » que les autres. Un tel exercice peut être l'occasion de discuter de tout ça avec les élèves, mais est-ce bien clair que les deux connecteurs sont parfois acceptables ? Le livre du professeur donne une correction : à la question c. la réponse est « c. et »…

Dans les manuels, les exemples sont nombreux qui montrent qu'il n'est pas si simple de parler de logique. Leur lecture a renforcé notre motivation pour proposer une formation qui donnerait aux enseignants des outils pour dire et écrire des choses plus cohérentes et explicites sur les points évoqués... et pour qu'ils soient en mesure de prendre du recul sur leur travail et sur les propositions des manuels.

Description de la formation « initiation à la logique »

Le stage de formation continue est proposé par l'IREM de Paris aux trois académies de Paris, Créteil et Versailles. Il se déroule sur 3 journées de 6h, deux journées consécutives en janvier et une journée en mars.

Un apport théorique basé sur l'étude du langage mathématique familier aux professeurs de mathématiques

La logique dont nous parlons dans ce stage pourrait s'appeler la logique des mathématiques, et être définie comme l'art d'organiser son discours dans cette discipline. Organiser son discours, cela recouvre :

- des questions de forme : quel langage utilisons-nous ? Quelle est sa syntaxe ? Quel est son alphabet ?
- des questions de sens « local » : qui est cet objet ? Que signifie cet énoncé ?
- des questions de sens « global » : cet énoncé est-il vrai ou faux ? Quels liens avec d'autres énoncés ? Ce raisonnement est-il valide ?

C'est à un discours produit et non à un discours intériorisé que nous nous intéressons. Il ne s'agit pas de chercher une psycho-logique du mathématicien, du professeur ou de l'élève de la classe de mathématiques, mais bien de se pencher sur le langage utilisé pour parler les mathématiques. Nous nous appuyons, pour décrire cette logique des mathématiques, sur le point de vue qu'en propose la logique mathématique. La logique mathématique peut-être vue comme l'aboutissement d'une étude de la logique mise en acte dans l'activité mathématique. Daniel Lacombe (Lacombe, 2007) la décrit comme une modélisation de la « métamathématique » :

> La logique mathématique c'est une branche des mathématiques, une branche des mathématiques appliquées, mais appliquées à quoi ? Appliquées aux mathématiques. Ce qui donne à la logique mathématique dès le début cet aspect circulaire, de serpent se mordant la queue, qui en fait, fait son charme. Mais ceci étant dit, ça n'est pas si paradoxal que ça, il suffit de considérer quelque chose qui est tout à fait connu maintenant, c'est la notion de modèle mathématique. (…) Les objets qui constituent le modèle mathématique ne sont pas du tout ceux qui constituent le domaine qu'on veut modéliser (…) [Pour la logique mathématique] le domaine extra mathématique qu'il s'agit de modéliser c'est ce qu'on appelle quelquefois la métamathématique, il vaudrait mieux dire la métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques mais de ce qu'on fait lorsqu'on traite des objets mathématiques, ce qui n'est pas du tout la même chose.

Mais le but du stage n'est pas de faire un cours de logique mathématique, et nous partons plutôt d'une approche naïve du langage mathématique. Approche naïve dans la mesure où elle s'appuie sur certaines notions prises au sens intuitif (notamment les notions de propositions, de démonstration, de vérité, que l'on suppose suffisamment familières aux professeurs de mathématiques pour pouvoir bâtir la formalisation de la logique des mathématiques envisagée sans définition formelle). Ce langage est au centre de l'activité mathématique, décrite ainsi par René Cori dans la formation (stage « Initiation à la logique », IREM de Paris, 2012) :

> Que fait un mathématicien ? Il observe des objets, que nous appellerons objets mathématiques. Ces objets peuvent être de natures très diverses : des nombres, des objets géométriques, des fonctions, des espaces probabilisés… Donc on regarde ces objets et on essaie de savoir comment ils vivent, comment ils sont organisés, qu'est-ce qui leur arrive, c'est-à-dire en découvrir les propriétés. On essaie de récolter des informations sur des objets qui forment un univers que l'on peut appeler l'univers mathématique. Ces objets mathématiques, si on veut décrire leurs propriétés, pouvoir en parler, il faut les nommer, leur donner des noms. Les mathématiciens sont très inventifs, ils disposent de tas de noms pour nommer les objets.

Le langage utilisé par le mathématicien est plus ou moins formalisé selon le contexte de son discours : cours, idées jetées sur un brouillon, discussion devant un tableau avec des collègues spécialistes, séminaire, rédaction d'un article. Les propositions mathématiques peuvent en effet être formalisées dans un langage qui comprend les connecteurs classiques NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À, les quantificateurs et des prédicats, ainsi que leurs règles syntaxiques d'utilisation, et leur sémantique, c'est-à-dire leurs comportement par rapport aux valeurs de vérité. Mais les mathématiciens s'expriment régulièrement de manière plus relâchée, par exemple, « k peut être aussi grand que l’on veut, u_n finira toujours par être plus petit que 10^{-k} que n sera assez grand ». L’expression d’une telle phrase dans le langage formalisé, notamment l’explicitation des quantifications, est une difficulté pour les élèves et les étudiants de début d’université. Les mathématiciens ont ainsi différentes manières de dire la même chose, de parler du même objet, construisant dans la dialectique entre ces différentes formulations ce que J. Selden et A. Selden appellent « statement images » (J. Selden et A. Selden, 1995, p. 133) :

> These are meant to include all of the alternative statements, examples, nonexamples, visualizations, properties, concepts, consequences, etc., that are associated with a statement. ([proposition de traduction] Ceci inclut tous les énoncés alternatifs, les exemples, contre-exemples, les représentations, les propriétés, les concepts, les inférences, associés à un énoncé donné.).

Ce travail de reformulation est souvent absent de la classe de mathématiques, il pourrait pourtant être extrêmement riche. Même si les élèves réclament souvent des formulations standardisées, elles gomment souvent le sens de ce qui est ainsi énoncé et peuvent empêcher le développement d'une certaine habilité dans le maniement des concepts et de leurs relations. Par exemple, à force de finir les résolutions d’inéquations $f(x) > 0$ par la rituelle conclusion $S = I$, nombre d’élèves oublient que cette conclusion signifie « pour tout x, $f(x) > 0$ si et seulement si x appartient à I ». Et que « x appartient à I » peut s’écrire en utilisant des inégalités.

Cependant, avec l'utilisation nécessaire d'un langage qui n'est jamais totalement formalisé, et qui se mélange donc à la langue naturelle en lui empruntant certains mots ou tournures de phrases, le langage mathématique comporte inévitablement des ambiguïtés. Notre intention est d'attirer l'attention des professeurs, de façon à ce qu'ils aient conscience des implicites de leur discours, des difficultés potentiellement engendrées... et ainsi, du fait que le langage mathématique peut, en lui même, être un obstacle à la compréhension des connaissances qu'il véhicule. Ces ambiguïtés peuvent éclairer certaines incompréhensions ou mauvaises compréhensions des élèves. L'implication « n premier n impair » sera déclarée fausse par une écrasante majorité de mathématiciens, alors que « n est premier ET n est impair » sera déclarée « vraie ou fausse selon la valeur de n » ; ces deux phrases sont pourtant identiques du point de vue de leur structure logique.

Une notion essentielle : les variables et leurs statuts

Une des caractéristiques essentielle du langage mathématique nous semble être l'utilisation de variables. Ceci suffit à nous inciter à accorder à cette notion une place importante dans le stage, choix qui se trouve conforté par le fait que la notion de variable est totalement absente des parties concernant la logique dans les programmes et dans des manuels .

Une variable est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais qui sert à marquer dans une proposition les places auxquelles on peut mettre des noms d'objets particuliers pris dans un certain domaine (on dira alors que la variable est astreinte à ce domaine). Dans la langue naturelle aussi certains mots peuvent représenter différents objets, ainsi « je » est celui qui parle. Précisons alors encore : dans le langage mathématique, les variables sont amenées à être quantifiées (plus généralement mutifiées, nous verrons cela plus loin) : on précise si l'on parle d'une propriété qui sera vraie pour tous les objets du domaine (quantification universelle) ou pour au moins l'un d'entre eux (quantification existentielle). Là encore, la quantification est présente dans la langue naturelle, et nous pourrions dire à celui qui insiste pour nous convaincre de quelque chose : « quel que soit ton argument, je le réfuterai », mais la syntaxe de cette phrase est bien différente de celle que nous utiliserions en en modélisant le sens en utilisant une variable X astreinte à l'ensemble « tes arguments »[2]. Nous dirions alors : « quel que soit X, je réfuterai X », ce qui correspond à peu près à « quel que soit ton argument, je réfuterai ton argument », cette reprise du syntagme « ton argument » n'étant pratiquement jamais utilisée dans la langue naturelle, sauf à chercher un effet de style. La variable n'est pas juste un concept particulier des mathématiques, difficile à conceptualiser, c'est aussi un élément central du langage mathématique auquel sont rattachées des règles syntaxiques rarement explicitées.

Les variables peuvent être libres (on parle aussi de variable parlantes) ou muettes (liées). Cette distinction entre variables muettes et variables parlantes nous paraît importante car elle permet de mettre des mots sur certains troubles que peuvent ressentir les élèves. Les variables muettes sont physiquement présentes dans des expressions mathématiques, noms ou propositions, qui ne parlent pourtant pas d'elles, à la différence de ce qui se passe la plupart du temps pour les variables parlantes (même si le sens de certaines expressions comportant des variables parlantes n'est pas toujours dépendant de ces variables, par exemple le nom $sin^2x + cos^2x$ ne dépend pas de qui est le réel x). « [Un signe mutificateur], comme son nom (pas très beau, certes !) l'indique, a pour fonction de rendre muette une variable. En fait, chaque fois qu'on est en présence d'une variable muette, il y a nécessairement un mutificateur » (Cori, 2011). Exemples de mutificateur : les quantificateurs, l'assemblage des symboles $\int\ldots\ d\ldots$ La mutification est une opération syntaxique. Dans une expression mathématique on peut repérer le statut d'une variable à la seule présence d'un mutificateur, même si on ne comprend pas ce que signifie cette expression. Le problème est que ce mutificateur est parfois caché (implicite). Par exemple, quand le professeur écrit au tableau « $(x + 1)^2 = x^2 + 2\,x + 1$ », l'élève doit souvent comprendre que cette proposition est une « identité », elle ne parle pas de x (quantifié implicitement universellement, muette), mais quand le professeur écrit « $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ », c'est généralement qu'il s'agit de résoudre l'équation, l'élève doit comprendre que cette proposition parle de x et que sa valeur de vérité dépend de la valeur attribuée à la variable x. Autre exemple : écrire « $f(x) = 2\,x + 1$ » sert souvent à définir la fonction f, et cette proposition est alors lue comme une expression qui ne parle pas de la variable x. Il n'y a pourtant ici aucun mutificateur pour cette variable et cette proposition parle donc de deux objets, f et x, et signifie « l'image de x par la fonction f est égale à $2\,x + 1$ », proposition qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs de la fonction f et de la variable x. Ces notions de variables libres et liées nous paraissent donc importantes au moins pour le professeur qui se doit d'être attentif aux ambiguïtés de ce qu'il écrit, mais aussi pour les élèves qui gagneraient à se poser la question « de qui parle cette expression ? ». Ainsi, un exercice classique en 1[ère]S sur les polynômes du second degré avec paramètres consiste à « déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ a deux solutions ». Cette tâche peut être modifiée de la façon suivante, pour mettre l'accent sur le travail de reformulation (dont nous avons dit qu'il était important dans la conceptualisation des objets mathématiques) : « peut-on donner une expression synonyme de *l'équation* $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ *a deux solutions* qui

2 Il faudrait aussi modéliser « tu » et « je », mais le propos ici n'est pas de faire de la modélisation de phrases du langage naturel, jeu souvent proposé pour développer la logique chez les élèves... mais rapidement très complexe.

n'utilise pas d'autres variables que m ? ». On pourra faire remarquer avant que l'expression « l'équation [d'inconnue x] $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ a deux solutions » est une expression qui parle de m (et pas de x), qu'elle va être vraie pour certaines valeurs de m et fausse pour d'autres. Ici une expression synonyme est « $4 – 4\,m > 0$ » ou encore « $m < 1$ ». Certaines erreurs peuvent ainsi être corrigées à partir de cette idée de regarder de qui parlent les expressions. Ainsi, à un élève, plus avancé dans ses études de mathématiques, qui voudrait monter par récurrence la propriété suivante : « (U_n) tend vers 1 », on peut faire remarquer que cette expression ne parle pas de n, et même lui indiquer la mutification si l'on a pris soin d'écrire $(U_n)_{n\in IN}$.

Connecteurs et quantificateurs

Après avoir ainsi parlé du statut des variables dans les expressions mathématiques, nous revenons à d'autres éléments des propositions : connecteurs logiques et quantificateurs. Concernant les connecteurs, l'accent est mis sur la différence entre l'aspect syntaxique (les connecteurs sont des opérateurs sur les propositions, c'est-à-dire qu'ils permettent, à partir d'une ou deux propositions, d'en « construire » une nouvelle) et l'aspect sémantique (leur comportement par rapport aux valeurs de vérité).

Nous donnons les définitions de propositions équivalentes, de tautologies. Nous listons quelques équivalences logiques importantes[3], en montrant comment elles peuvent être utilisées pour « transformer » les énoncés. Par exemple, on trouve dans le manuel *Hyperbole* l'exercice suivant :

Compléter la phrase :
Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$ alors …
Pour obtenir :
a) une proposition vraie
b) une proposition fausse

Figure 4 – Un extrait du manuel Hyperbole

En utilisant l'équivalence entre (AB) et (NON(A) OU B), on peut donner une proposition équivalente à la proposition à compléter : « il existe au moins un réel x tel que ($x^2 \neq 36$ OU… ». Et voir ainsi plus facilement qu'il est impossible de la compléter de manière à ce qu'elle soit fausse puisque l'on pourra toujours trouver un réel x tel que $x^2 \neq 36$! Le livre du professeur donne néanmoins une réponse pour cet exercice : $0 \leq x \leq 6$ pour la question a), $0 \leq x \leq 3$ pour la question b)…

Moins connue, l'équivalence entre [A(B OU C)] et [(A ET NON(B))C] permet de voir que les deux théorèmes suivants ne sont qu'une « reformulation » l'un de l'autre (a et b sont des variables astreintes à IR) :

$\forall a\ \forall b\ [a + b + ab = –1 \Rightarrow (a = –1 \text{ OU } b = –1)]$
et $\forall a\ \forall b\ [(a + b + ab = –1 \text{ ET } a \neq 1) \Rightarrow b = –1]$

3 On peut retrouver ces définitions et cette liste dans (Cori, 2011).

Nous donnons également quelques propriétés des quantificateurs : négation d'un énoncé quantifié, possibilité ou non de distribution sur les connecteurs ET et OU, expression d'autres quantifications usuelles en mathématiques, telles que « au plus un », « exactement un », « au plus deux » à l'aide des quantificateurs universel et existentiel.

Ce travail sur les propositions est mis en relation avec d'éventuelles erreurs ou difficultés des élèves. Ainsi, on voit fréquemment des élèves proposer « aucun x ne vérifie la propriété P » comme négation de « tous les x vérifient la propriété P ». Or, « aucun x ne vérifie la propriété P » se traduit par « $\forall x$ NONP(x) » qui n'est pas la négation de « $\forall x$ P(x) » (la négation de « $\forall x$ P(x) » est « $\exists x$ NONP(x) ». Par contre, on peut considérer que les deux propositions « aucun x ne vérifie la propriété P » et « tous les x vérifient la propriété P » sont contraires, dans le sens courant du mot contraire, « qui présente l'opposition la plus extrême, la plus radicale » (dictionnaire CNRS « Le Trésor de la Langue Française Informatisé »). On voit là l'importance de ne pas confondre les deux termes « contraire » et « négation », la confusion est faite d'autant plus facilement que la négation en Seconde est souvent abordée dans le chapitre sur les probabilités, avec la définition d'événements contraires.

Autre exemple d'une possible utilisation de la formalisation des énoncés, qui permet d'en exhiber la structure logique : les élèves disposent souvent de techniques isolées pour montrer qu'une proposition est vraie ou fausse selon sa structure. Ainsi, pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, on donnera un contre-exemple, et pour montrer qu'une proposition existentielle est vraie, on donnera un exemple. Le lien entre ces deux techniques, via la notion de négation, est rarement fait dans les manuels. Et souvent, si les élèves savent à peu près montrer qu'une proposition universelle est vraie en utilisant un raisonnement sur un élément « quelconque », ils ont plus de difficultés à montrer qu'une proposition existentielle est fausse, et ne font pas le lien avec le fait de montrer que sa négation, qui est une proposition universelle, est vraie.

Une place particulière pour l'implication

S'il y a à dire sur tous les connecteurs, l'implication est celui qui nous occupe le plus pendant le stage. La table de vérité de ce connecteur, par exemple, laisse toujours quelques personnes sceptiques. Elle est bien utile pour justifier l'équivalence entre (A B) et (NON(A) OU B), ou le fait que la négation de (A B) est (A ET NON(B)). Cette dernière propriété est loin d'être naturelle, et quand on interroge des élèves ou des professeurs sur la négation de (A B), beaucoup de réponses proposées se présentent sous la forme d'une implication (on retrouve toutes les combinatoires possibles avec l'implication et la négation !). Il ne faut pas se méprendre en lisant dans le tableau des objectifs du programme « distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, sa réciproque, sa contraposée, et sa négation » : la négation y est mise au même niveau que la proposition conditionnelle, sa réciproque et sa contraposée qui sont toutes les trois des implications… mais elle n'en est pas une !

Une fois défini le connecteur implication, la tautologie suivante laisse les stagiaires perplexes (même après la nuit de réflexion que nous leur laissons) : [(A B) OU (B A)]. Nous l'illustrons par l'exemple :

(f croissante f continue) OU (f continue f croissante)

Le malaise est dû à la pratique implicite en mathématiques de lire les implications comme universellement quantifiées, même quand le quantificateur universel n'est pas apparent.

La proposition ci-dessus est donc lue :

$[\forall f\,(f \text{ croissante } \;\; f \text{ continue})]$ OU $[\forall f\,(f \text{ continue } \;\; f \text{ croissante})]$

qui est bien sûr fausse, à la différence de la proposition :

$\forall f\,[(f \text{ croissante } \;\; f \text{ continue})]$ OU $(f \text{ continue } \;\; f \text{ croissante})]$

Certaines études ont déjà montré des difficultés des élèves avec cette quantification universelle implicite (Durand-Guerrier, 1999). Certains mathématiciens refusent de considérer cela comme une difficulté, arguant du fait que c'est une façon de faire en mathématiques et qu'il n'y a qu'à apprendre que c'est comme ça qu'on fait. Nous pensons au contraire que l'explicitation de la quantification est essentielle, et nous allons voir à travers plusieurs exemples que son omission peut mener à bien des malentendus. Tout d'abord, faisons remarquer que la non prise en compte de ces implicites peut être une difficulté pour écrire certaines négations. On trouve parfois, par exemple, la propriété, pour une fonction *f,* d'être continue en *a* donnée sans quantification sur la variable *x* :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta\ (\,|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

ce qui rend difficile d'écrire sa négation puisqu'il faut penser à faire réapparaître explicitement la quantification sur *x*.

Les choses sont ensuite à affiner, on ne peut pas se contenter de dire que les implications vont être systématiquement lues comme universellement quantifiées, il faut de plus préciser où placer la quantification. Prenons à nouveau un exemple, celui de la proposition (1) (dans laquelle les variables sont astreintes à *IR*) :

$\exists\, h > 0\ (\,|x| < h \Rightarrow x = 0)$ (1)

Une lecture courante place implicitement la quantification universelle sur la variable *x* juste avant l'implication, c'est-à-dire ici juste avant la parenthèse. On obtient alors la proposition (2) :

$\exists\, h > 0\ \ \forall x\ \ (\,|x| < h \Rightarrow x = 0$ (2)

qui est fausse (elle signifie qu'il existe un plus petit réel strictement positif).

On peut aussi transformer la proposition (1) avant de rétablir la quantification universelle, on obtient la proposition (1') équivalente[4] :

$(\forall\, h > 0\ \ |x| < h) \Rightarrow x = 0$ (1')

Rétablissons ensuite la quantification universelle sur la variable *x* juste avant l'implication, c'est-à-dire au début de la proposition (1'), on obtient la proposition (3) :

$\forall x\ [(\forall\, h > 0\ \ |x| < h) \Rightarrow x = 0]$ (3)

qui n'est pas équivalente à la proposition (2), et qui est vraie. Elle est équivalente à la proposition (3') :

$\forall x\ \exists\, h > 0\ (\,|x| < h \Rightarrow x = 0)$ (3')

qui est celle que l'on aurait obtenue en plaçant la quantification universelle au début de la proposition (1), ce que pourrait faire un « néophyte » peu au courant des pratiques implicites de quantification universelle des implications.

---

4 Les propriétés de « distribution » des quantificateurs par rapport aux connecteurs sont évoquées précédemment dans le stage, pour plus de détails voir (Cori, 2011).

Le langage en mathématiques est ainsi plus ambigu qu'on ne le croit. Et cette ambiguïté peut légitimement être un obstacle à la compréhension (ou à l'expression) des élèves. Il est préférable que les professeurs en soient conscients.

Prenons un autre exemple de règle implicite de lecture non formulée, qui concerne la notion de réciproque. La plupart des mathématiciens (et la plupart des professeurs de mathématiques) pense pouvoir définir la réciproque de manière claire et univoque : la réciproque de (A B) est (B A) (ou la réciproque de « si A alors B » est « si B alors A »), et donc implicitement la réciproque de $\forall x\ (A(x) \Rightarrow B(x))$ est $\forall x\ (B(x) \Rightarrow A(x))$. Ceci ne pose généralement pas de problèmes, moyennant quelques réajustements parfois : la réciproque de « si un quadrilatère a trois angles droits alors c'est un rectangle » n'est pas tout à fait « si c'est un rectangle alors un quadrilatère a trois angles droits », phrase grammaticalement correcte mais à l'effet de style un peu trop recherché. Regardons alors la proposition suivante (la variable k est astreinte à IR, la variable f à l'ensemble des fonctions de IR dans IR) :

Si f est croissante alors $|k|f$ est croissante

Replaçons maintenant les quantifications universelles, il y a deux possibilités :

- proposition 1 : $\forall f$, $\forall k$ (si f est croissante alors $|k|f$ est croissante),
- proposition 2 : $\forall f$ [si f est croissante alors ($\forall k$ $|k|f$ est croissante)]

Ici les deux propositions sont équivalentes, on peut donc a priori utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces formulations. Or, examinons maintenant les réciproques :

- réciproque proposition 1 : $\forall f$, $\forall k$ (si $|k|f$ est croissante alors f est croissante),
- réciproque proposition 2 : $\forall f$ [si ($\forall k$ $|k|f$ est croissante) alors f est croissante]

Les deux réciproques obtenues ne sont pas équivalentes (la première est fausse, la deuxième est vraie). On ne peut donc pas prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux formulations précédentes (pourtant équivalentes !) pour répondre à la question « la réciproque de la propriété “si f est croissante alors $|k|f$ est croissante” est-elle vraie ou fausse ? ». Ce qu'est la réciproque d'une proposition n'est donc pas toujours aussi clair qu'on pourrait le croire.

Le tour des difficultés liées à l'implication n'est pas fini (et nous ne prétendons pas en donner une liste exhaustive). Une autre difficulté concerne la contraposition. Là encore, la contraposée est pour les mathématiciens une notion donnant l'impression d'être bien définie : la contraposée de la proposition « si A alors B » est la proposition « si NON(B) alors NON(A) », qui lui est équivalente. Mais une fois encore, la plupart du temps il s'agit d'écrire la contraposée d'implications universellement quantifiées, et les élèves ne savent pas toujours quoi faire de cette quantification, certains donnant comme contraposée de « pour tout x, si $P(x)$ alors $Q(x)$ » la proposition « il existe x tel que, si NON$Q(x)$ alors NON$P(x)$ », appliquant ainsi une négation à la quantification. Par ailleurs, il y a des phrases de la forme « si … alors … » qui ne sont pas « contraposables » (ce ne sont pas des implications, grammaticalement, « si … » y est une proposition conditionnelle, « alors » un adverbe). On trouve parfois énoncée comme suit une propriété bien connue de la fonction logarithme :

si x et y sont des réels positifs, alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Quelle serait la contraposée de cette proposition? On accepterait difficilement comme réponse la proposition :

si $\ln(xy)$ $\ln x + \ln y$ alors x et y ne sont pas des réels positifs même si celle-ci est syntaxiquement correcte.

Pourquoi écrire cette propriété sous forme d'implication ? Pour ne pas écrire de quantification universelle ? Pourtant la formulation « pour tous réels x, y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ », que l'on trouve heureusement le plus souvent, est nettement préférable à celle sous forme d'implication qui n'en est pas vraiment une. En effet, on utilise parfois une quantification universelle relativisée, c'est-à-dire une proposition de la forme ($\forall x$ tel que $P(x)$, $Q(x)$) comme raccourci de la proposition $\forall x\ (P(x)\quad Q(x))$.

On utilise l'une ou l'autre de ces formulations équivalentes quand les propositions $P(x)$ et $Q(x)$ sont définies pour une variable astreinte à un même ensemble E. Elles signifient que la proposition $Q(x)$ est vraie pour tous les éléments de E vérifiant la proposition $P(x)$. L'usage est d'utiliser cette « relativisation » quand les éléments vérifiant $P(x)$ ne sont pas la totalité des éléments de E. Certains manuels parlent de cette autre manière de formuler une implication. La formulation sous forme d'une quantification universelle relativisée a l'avantage de se présenter sous une forme apparemment plus simple, et peut-être plus opératoire. La formulation sous forme d'implication universellement quantifiée a l'avantage de proposer une structure permettant de former facilement, moyennant les ambiguïtés déjà évoquées, la réciproque ou la contraposée. Mais elle a un défaut déjà évoqué : la quantification universelle n'est pas explicite.

Dans l'exemple ci-dessus, nous ne sommes pas dans cette situation, la proposition « $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ » ($Q(x)$) n'a de sens que si les variables sont astreintes à IR_+. Il ne s'agit donc pas de relativiser une propriété à certains éléments d'un ensemble, mais de quantifier universellement sur les éléments pour lesquels la propriété a un sens. L'usage d'une implication est donc inapproprié.

Dans un exercice où l'élève doit faire une démonstration par contraposée, l'implication à démontrer est généralement explicitement écrite. Dans d'autres cas, là où dans les années 60 on pouvait rencontrer comme exercice « montrer que pour tout x réel positif, si $P(x)$ alors $Q(x)$ », on est progressivement passé à « soit x un réel positif tel que $P(x)$. Montrer $Q(x)$ », masquant ainsi l'implication et surtout la quantification universelle qui lui est associée, et aujourd'hui le plus courant est de trouver « x est un réel positif tel que $P(x)$. Montrer que $Q(x)$ » (par exemple dans un exercice de géométrie, « place un point M sur le segment $[AB]$ et montre que M vérifie $Q(M)$ »). Dans cette manière de formuler les exercices, les élèves peuvent perdre complètement l'idée qu'ils ont montré un résultat général puisque ces formulations donnent l'impression de raisonner sur un élément particulier. Nous incitons les professeurs suivant le stage à terminer chaque démonstration par un récapitulatif de ce qui a été établi, sans omettre les quantifications. Nous pensons que cette pratique peut aider les élèves à faire un lien entre structure logique d'une proposition et structure de sa démonstration.

Ce que nous venons de souligner concernant l'implication relève plutôt d'un manque de précision que de l'erreur. Là où le mathématicien pouvait penser user d'une logique s'acquérant naturellement et s'exprimant à travers un langage clair, nous avons vu qu'il y avait des implicites et des ambiguïtés. Les professeurs qui suivent le stage sont généralement sensibles à ces remarques sur le langage mathématique qui est en grande partie le leur en classe, adapté au niveau de chaque classe. Mais cela les laisse parfois démunis. Ainsi, un professeur nous a demandé comment rédiger les résolutions d'équations quand elles comportent des quotients dont le dénominateur n'est pas partout défini, par exemple $(x + 2) / (x - 3) = 0$. Une pratique courante est de raisonner par équivalence :

$(x + 2) / (x - 3) = 0 \quad (x\ 3 \text{ et } x + 2 = 0)$

Cette équivalence est implicitement universellement quantifiée sur tous les réels. Ce qui pose problème, car l'expression de gauche n'est définie que pour les réels différents de 3, contrairement à la partie de droite. Il est donc plus correct de regarder d'abord sur quel domaine l'équation a un sens, puis de raisonner éventuellement par équivalence quantifiée universellement sur le domaine de définition de l'équation. Ici, on aurait donc :

Pour tout x 3, $((x + 2) / (x - 3) = 0 \quad x + 2 = 0)$

On trouve aussi dans certains manuels de Seconde, à propos de l'implication, des discours montrant non seulement une connaissance floue de cet objet mais une connaissance erronée. Une erreur que l'on retrouve plusieurs fois concerne le fameux cas problématique des implications à prémisse fausse. Dans le manuel *Pixel* par exemple, on demande la valeur de vérité de la proposition « $f(x) = 1$ si $x = -3$ et $x = 4$ » (dans l'exercice proposé, 4 et –3 sont effectivement solutions de $f(x) = 1$). Le manuel corrige en disant que cette proposition est fausse car « x ne peut pas être égal simultanément à –3 et à 4 »... or, c'est précisément pour cela qu'elle est vraie ! Réécrivons cette proposition sous la forme « pour tout réel x, si ($x = -3$ et $x = 4$) alors $f(x) = 1$ », la prémisse de cette implication est fausse quelle que soit la valeur attribuée à la variable x, donc l'implication est tout le temps vraie ! Encore une fois, cet exemple montre qu'il faut faire attention à certaines propositions qui ont une structure complexe, nécessitant un minimum de familiarité avec les propriétés des connecteurs pour pouvoir établir si elles sont vraies ou fausses. Et montre également que la seule pratique des mathématiques ne garantit pas toujours l'acquisition de ces connaissances.

Les démonstrations

Nous avons jusqu'ici regardé et analysé des expressions mathématiques, c'est-à-dire des noms d'objets et des affirmations de faits concernant ces objets. Les démonstrations qui établissent ces faits sont également modélisées par la logique mathématique, une branche de celle-ci s'appelle la théorie de la démonstration et s'occupe notamment d'étudier les systèmes de déduction (un système de déduction comporte un langage permettant de former des propositions et des règles de déduction permettant d'élaborer des démonstrations formelles). Le langage des prédicats, que nous avons utilisé pour exhiber les structures logiques des propositions, est familier aux mathématiciens. Par contre, il n'existe pas de système de déduction dont l'ensemble des règles leur soient familières, ils ne se préoccupent pas de formaliser leurs raisonnements.

Sans rentrer dans l'exposé d'un système formel de règles de déduction, nous évoquons pendant le stage quelques types de raisonnements, comme cela est demandé par le programme (cf p.3). La règle du *modus ponens* correspond à la démonstration « directe » utilisant une implication : « de A et de (SI A ALORS B), je déduis B ». C'est cette inférence qui est sous-jacente quand nous disons « A donc B ». Il est essentiel de ne pas confondre cette phrase avec la proposition (SI A ALORS B) ! D'ailleurs « A donc B » n'est pas une proposition. D'un point de vue plus pratique, quand on dit « A donc B », on dit que A est vrai, que (SI A ALORS B) est vrai, et on déduit que B est vrai. Dire que (SI A ALORS B) est vrai ne dit rien sur la valeur de vérité de A, ni sur celle de

B, mais juste quelque chose d'un lien entre ces deux valeurs. Certains manuels font cette confusion dans la partie présentant l'implication, et parfois pour illustrer leur propos, ils utilisent des exemples de la vie courante. Nous pouvons citer l'exemple extrait du manuel *Indice* qui donne l'un après l'autre, comme s'ils étaient synonymes, les deux énoncés suivants : « j'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas au lycée » et « si j'ai 40° de fièvre je ne vais pas au lycée ». Ces phrases ne sont évidemment pas synonymes : il suffit par exemple de penser à des contextes dans lesquels elles peuvent être prononcées. La première ne peut être prononcée qu'un jour où le locuteur a effectivement 40° de fièvre, ce n'est pas le cas pour la deuxième qui peut être prononcée en n'importe quelles circonstances, notamment sans avoir 40° de fièvre. Il est aussi courant de voir des étudiants pourtant assez avancés dans leur études de mathématiques penser que quand (SI *A* ALORS *B*) est vraie, forcément *A* est vraie. Nous proposons en formation un exercice issu d'un manuel de DEUG (cité dans Durand-Guerrier et al., 2000) :

On considère trois nombres réels x, y et z.
1. Écrire un énoncé synonyme de

« l'un des trois nombres x, y et z est nul et les deux autres sont de signes contraires »

en utilisant exclusivement les lettres x, y et z, le symbole 0, le signe $=$, le signe $<$, les connecteurs propositionnels « non », « et », « ou », $\Longrightarrow$ et les parenthèses. Peut-on obtenir un énoncé synonyme plus court en s'autorisant un symbole supplémentaire ?

2. On suppose que l'énoncé de la question 1 est vrai, ainsi que les trois énoncés suivants :

(1) $\quad y = 0 \Longrightarrow x > 0$

(2) $\quad y > 0 \Longrightarrow x < 0$

(3) $\quad x \neq 0 \Longrightarrow z > 0$

Comparer les nombres x, y et z.

Figure 5 – Un exercice issu d'un manuel de DEUG

Nous proposons régulièrement cet exercice à des étudiants de première année à l'Université. Ils sont nombreux à adopter la stratégie suivante : ils supposent vraie la prémisse de la première implication, et voient que cela amène une contradiction (avec la troisième implication, on aurait $x > 0$ et $z > 0$), alors ils recommencent avec la deuxième puis avec la troisième implication. Comme ils arrivent trois fois à une contradiction, ils concluent qu'il n'est pas possible que les trois implications soient vraies, oubliant la possibilité d'avoir les trois prémisses fausses (ce qui donne la solution $y < 0$, $x = 0$ et $z > 0$ qui convient). On peut adapter cet exercice à un public plus jeune :

On dispose de trois formes en bois : un disque, un carré et un triangle.
On sait que l'une de ces formes est rouge, une autre bleue et une autre jaune.
Voici trois affirmations vraies qui concernent ces pièces :
Si le carré est bleu alors le disque est jaune.
Si le carré est jaune alors le disque est rouge.
Si le disque n'est pas bleu alors le triangle est jaune.
Quelle est la couleur de chaque pièce ?

Figure 6 – Une adaptation de l'exercice de la figure 5

La confusion entre « si ... alors ... » et « ... donc ... » se trouve renforcée par l'utilisation du symbole d'implication $\Rightarrow$ pour signaler et enchaîner les pas de déduction dans une démonstration. Cette notation permet d'éviter la répétition du mot « donc » qui peut produire un style d'écriture assez lourd, mais rappelons que ces deux expressions ne se situent pas au même niveau de langage : « si A alors B » est une proposition, elle énonce un fait concernant des objets mathématiques, susceptible d'être vrai ou faux. « A donc B » n'est pas une proposition, c'est une phrase qui résume un raisonnement mettant en lien des faits mathématiques, raisonnement susceptible d'être valide ou non. La valeur de vérité de la proposition « si A alors B » est entièrement déterminée par les valeurs de vérité des propositions A et B, notamment, cette proposition est vraie quand les propositions A et B sont vraies. Quand on affirme « A donc B », on est dans un contexte permettant d'affirmer que A est vraie, on affirme connaître une justification du fait que B est vraie qui utilise le fait que A est vraie (le plus souvent cette justification est la vérité de « si A alors B »), on affirme enfin la vérité de B (et, implicitement, le fait que cette dernière affirmation est une conséquence des deux précédentes). Il est ainsi tout-à-fait possible que A soit vraie, que B soit vraie, mais qu'il ne soit pas pertinent de dire « A donc B ». La formulation « A donc B » est un raccourci qui masque ce qui justement garantit la validité de cette inférence.

Le programme évoque entre autres le raisonnement par contraposée et le raisonnement par l'absurde. Il n'est pas toujours facile de distinguer ces deux types de raisonnement, et dans certains manuels on peut trouver le même exercice comme exemple de l'un ou de l'autre :

Démonstration par la contraposée

Énoncé : Démontrer que si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair.
Solution
La contraposée de la proposition à démontrer est : « si un entier naturel n est impair, alors n^2 est impair ».
On suppose que n est impair, c'est-à-dire $n = 2k + 1$ avec k entier naturel.
Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et donc n^2 est impair.
La contraposée est donc vraie ; par conséquent, la proposition « si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair » est vraie.

Figure 7 – Un extrait du manuel Hyperbole

8.2 Démonstration par l'absurde

« Absurde » signifie « contraire à la raison, au bon sens ».

Exemple. Démontrer que pour tout entier n, la proposition (P) : « n^2 est un entier pair » implique la proposition (Q) : « n est un entier pair ».
Démontrons par l'absurde cette implication. Supposons donc qu'il existe un entier n tel que n^2 soit pair et n soit non pair, c'est-à-dire tel que n soit impair. Alors, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. D'où $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi, $n^2 = 2k + 1$, avec $k = 2p^2 + 2p$, entier.
Donc n^2 est impair, ce qui contredit « n^2 est pair ».
Donc : Si « n^2 est pair » implique « n est pair ».

Figure 8 – Un extrait du manuel Transmath

A la base du raisonnement par l'absurde, il y a l'hypothèse que quelque chose est faux, c'est-à-dire que sa négation est vraie. Ce qu'il y a à démontrer ne se présente pas forcément sous la forme d'une implication, contrairement aux cas où l'on va utiliser un raisonnement par contraposée. Dans ces deux types de raisonnement, il faut formuler des négations, ce qui n'est pas une tâche facile pour des élèves de Seconde.

Pour prouver une implication (SI A ALORS B), il est fréquent de supposer A, puis éventuellement de supposer NON(B) pour voir si on aboutit à une contradiction (d'où l'appellation peut-être un peu rapide de raisonnement par l'absurde). Cela revient en fait à supposer (A ET NON(B)) qui est la négation de (SI A ALORS B), ce que ne mentionne pas le manuel *Transmath*, pas plus qu'il n'explique pourquoi « [on suppose] qu'il existe un entier n tel que … ». Parfois, pour aboutir à cette contradiction, on utilise explicitement l'hypothèse A, on a alors effectivement un raisonnement par l'absurde, mais d'autres fois, on arrive en fait à montrer NON(A) à partir de NON(B) sans utiliser l'hypothèse A. NON(A) est effectivement en contradiction avec l'hypothèse A, mais le raisonnement peut alors être rédigé comme un raisonnement par contraposée. Cette distinction n'est sans doute pas importante pour les élèves, l'objectif est qu'ils arrivent à démarrer un raisonnement en supposant que ce qu'ils ont à montrer est faux. Les professeurs, par contre, peuvent se demander face à un raisonnement qu'ils qualifieraient de raisonnement par l'absurde s'ils ne peuvent pas en fait le rédiger comme un raisonnement par contraposée.

Mise en jeu de ces connaissances

Le travail sur les propositions et le raisonnement occupe une bonne moitié du stage. Cette proportion était supérieure dans les premières éditions du stage, et certains stagiaires avaient dans leurs commentaires regretté que le stage soit trop théorique et pas assez axé sur ce qu'il est possible de faire en classe. Nous n'avions alors pas vraiment de matière pour proposer un contenu plus pratique. La création en juin 2010, à la suite du premier stage, d'un groupe IREM « Logique » dans lequel collaborent des enseignants du supérieur et des enseignants de lycée et de collège a permis de développer cet aspect.

Nous proposons ainsi plusieurs entrées plus proches du terrain pendant le stage. Pour répondre à la perplexité souvent exprimée en début de stage par les stagiaires devant les pages et les exercices « logique » proposés dans leurs manuels, nous organisons un travail en groupe sur des extraits de manuels. Cela permet de voir comment les connaissances théoriques proposées permettent un regard critique et alimentent une prise de recul. Les extraits présentés pendant le stage ont été étudiés au sein du groupe

« Logique » de l'IREM (Groupe logique, 2011), les exercices commentés pendant le stage sont disponibles sur le site du groupe, (Groupe logique 2012). Ces activités proposées dans les manuels, où l'on retrouve toutes les ambiguïtés et les implicites déjà évoqués, peuvent être utilisées en classe pour mettre à jour et discuter collectivement ces ambiguïtés et implicites.

Au delà de la critique des manuels, il est intéressant de proposer une alternative. Par ailleurs, livrer des séquences prêtes à l'emploi ne nous paraît pas la meilleure formation à délivrer, chaque professeur étant le plus à même, une fois formé et averti, de construire ce qui sera un bon support de travail dans sa classe. Des enseignants du secondaire (deux en lycée, un en collège) du groupe « Logique » sont venus présenter des activités proposées dans leurs classes. Ils parlent bien mieux que nous ne saurions le faire des contraintes qui façonnent leur préparation, du déroulement de l'activité, du bilan des apprentissages des élèves, du réinvestissement de ces activités, des remaniements envisagés suite à leur mise en place. Nous incitons les professeurs suivant le stage à mettre en place eux aussi des séquences dans leurs classes permettant de parler de certaines notions de logique, et nous les invitons à nous en faire le récit lors de la dernière journée de stage.

Conclusion

Les objectifs des programmes du lycée concernant « notations et raisonnement mathématiques » sont donnés pour les trois années du lycée, même si certaines notions sont spécifiques à la classe de Première (notion d'équivalence) ou de Terminale (raisonnement par récurrence). Cela rend plus difficile l'organisation d'un enseignement progressif et abouti sur ces notions échelonné sur les trois années du lycée. Par ailleurs, la présence au stage de professeurs de collège (environ un quart des stagiaires) montre qu'il y a également une demande de leur part, et il serait sans doute intéressant d'expliciter les notions de logique déjà présentes, et comment se fait la transition collège-lycée sur ces questions.

Nous espérons avoir montré à travers cet exposé qu'il est nécessaire de proposer aux professeurs de mathématiques des éléments de réflexion par rapport aux notions de logique qu'ils ont à enseigner. Nombre de professeurs sont effectivement désireux d'approfondir leurs connaissances dans ce domaine, même si la logique ne vient pas toujours en priorité dans leur demande de formation sur les nouveautés des programmes. Lors du bilan du stage, plusieurs professeurs notent comme une de leurs motivations pour s'y inscrire le manque de formation en logique dans leur formation initiale. L'organisation du contenu du stage, basée sur une approche naïve du langage mathématique, permet de transmettre des connaissances en logique mathématique sans l'étudier de manière formelle. Nous espérons ainsi d'abord que ces connaissances en logique aideront les professeurs à réfléchir à leurs pratiques de rédaction et d'expression. Ensuite qu'ils pourront s'appuyer sur une compréhension claire des notions en jeu dans les nouveaux programmes, associée à une connaissance des obstacles et erreurs récurrentes des élèves pour construire un enseignement de ces notions pour leurs élèves. Bien que le travail sur le langage soit apprécié par les stagiaires, nous sentons comme une résistance à faire entrer dans les pratiques des activités portant spécifiquement dessus, notamment des exercices de reformulation. Les différents exemples donnés dans ce texte et lors du stage montrent suffisamment la complexité du langage mathématique. Il nous semble donc nécessaire d'une part que les professeurs soient vigilants dans leur discours, d'autre part que des tâches soient proposées aux élèves, consacrées spécifiquement à la manière de dire en mathématiques, et pas seulement à la manière de faire.

BIBLIOGRAPHIE

Cori, R. (2011) Notes du cours Langage Mathématique. En ligne

http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/document/document.php?cidReset=true&cidReq=LM1

Deloustal-Jorrand, V. (2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x*, *55*, 35-70.

Deloustal-Jorrand, V. (2004) L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble I.

Durand-Guerrier, V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x 50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M-C., Reynaud-Fleurly, J. (2000) *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*. IREM de Lyon.

Groupe Logique et raisonnement de l'IREM de Grenoble (2011) SiRC et Logique 2010-2011. En ligne : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/Logique/

Groupe Logique de l'IREM de Paris. (2011) Réflexions sur les propositions des manuels, et sur les notions de logique au programme du lycée. En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/reflexions_sur_les_propositions_des_manuels_et_sur_les_notions_de_logique_a/

Groupe Logique de l'IREM de Paris. (2012) Les documents du stage "initiation à la logique". En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_documents_du_stage_initiation_a_la_logique/

Lacombe, D. (2007) Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler. Conférence au séminaire de l'IREM de Paris 7. En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/tout_ce_que_vous_avez_toujours_voulu_savoir_sur_la_logique/

Mesnil, Z. (à paraître) La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France. Actes du colloque EMF 2012.

Rogalski, J., Rogalski, M. (2004) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *9*,175-203.

Selden, A., Selden, J. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics 29*, 123-151.

Programmes et documents ressource :

Mathématiques, Classe de Seconde, B.O n°30 du 23 juillet 2009,

Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques, juillet 2009.

Manuels :

Mathématiques 2nd, collection Hyperbole, NATHAN, 2010.

Maths 2nd, collection Indice, BORDAS, 2009.

Maths 2nd , collection Pixel, BORDAS, 2010

Symbole maths 2nd, BELIN, 2010.