DU MONDE REEL AU MONDE VIRTUEL : VOYAGE ALLER ET RETOUR

Stéphane LABBE
Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble [1]

Résumé – Dans ce texte, nous présentons les principes généraux de la modélisation et leur lien avec les mathématiques. En particulier, nous étudions le parti-pris que nous pouvons tirer de ce lien pour enseigner des notions mathématiques complexes en créant des analogies et surtout un lien avec le réel afin de capter l'attention des élèves et leur donner des images propres à imprimer les concepts.

Modélisation et monde réel

Un large aperçu des objectifs

La modélisation fait partie d'une dynamique scientifique globale allant de la conception de modèles physiques à la comparaison avec des expériences, en passant par l'analyse mathématique (voir Fig. 1). Dans ce cycle, trois mondes sont en présence : le monde réel, le monde virtuel des objets mathématiques et le monde numérique des objets informatiques. Le premier, le monde réel, infiniment complexe ne peut pas être appréhendé dans son ensemble. Les scientifiques tentent d'en comprendre les rouages, mais restent bien loin de la connaissance exhaustive de ses mécanismes. Malgré tout, il ne faut pas baisser les bras. En effet, la compréhension du monde réel induit, entre autres, l'amélioration des technologies. Cette compréhension permet la construction de modèles que l'on pourra appréhender dans leur ensemble. Par exemple, quand Isaac Newton présente en 1686 la théorie de la gravitation universelle dans son ouvrage Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, son travail permet de comprendre le mouvement des planètes et d'appréhender la mécanique d'un oeil nouveau, mais est basé sur une vision simplifiée du monde. Bien entendu, il ne faut pas prendre le terme "simplifié" comme étant péjoratif, bien au contraire ; la simplification du monde afin d'en extraire un phénomène pour le comprendre est une démarche essentielle de la modélisation. Le physicien, biologiste ou encore géologue de talent trouvera des idées forces qui permettront, à partir d'un modèle compréhensible, d'expliquer des phénomènes souvent redoutablement complexes. Si l'on reprend l'idée de la mécanique étudiée par Isaac Newton, le modèle présenté est très simple au regard des objets réels, mais contient toutes les bases pour être complexifié (traitement d'objets compliqués etc.) et ainsi produire des résultats pouvant être confrontés à la réalité. Isaac Newton avait mis en place un système intelligible des phénomènes naturels, faisant de lui un modélisateur. Comme tous les modèles, la théorie qu'il a développée a ses limites de validité ; quand la vitesse des objets devient trop grande, les formules formelles développées pour la mécanique newtonienne ne peuvent plus expliquer les phénomènes observés et le relais est alors passé à la théorie de la relativité générale développée par Albert Einstein en 1915. Tous ces modèles formels disciplinaires ayant pour objectif de

[1] stephane.labbe@imag.fr

comprendre le fonctionnement du monde ont ainsi leurs limitations, leurs domaines d'application et ne peuvent être utilisés que dans un cadre bien précis qui au fur et à mesure du temps s'affinera. Il ne faut pas non plus oublier les modèles analogiques qui permettent, à partir de maquettes, de mieux comprendre un phénomène en le confinant ou en le transformant en un objet plus accessible. Pour illustrer ceci on pourra citer par exemple les expériences d'avalanches en bassins noyés réalisées au CEMAGREF[2] de Grenoble. Afin d'étudier le déferlement de la neige sur une pente et en comprendre les mécanismes de propagation, déclencher une avalanche à taille réelle ne sera pas toujours aisé, alors, pour effectuer des expériences à une échelle contrôlable, des modèles analogiques sont réalisés. Dans le cas des avalanches mises en œuvre à IRSTEA, la neige a comme pendant analogique des écoulements de particules en suspension dans un fluide. Bien entendu, ces expériences ne rendent compte que d'une petite partie du réel, mais elles permettent de se faire une première idée des modèles et d'ainsi les tester sur des phénomènes plus facilement mesurables que les phénomènes naturels visés par l'étude.

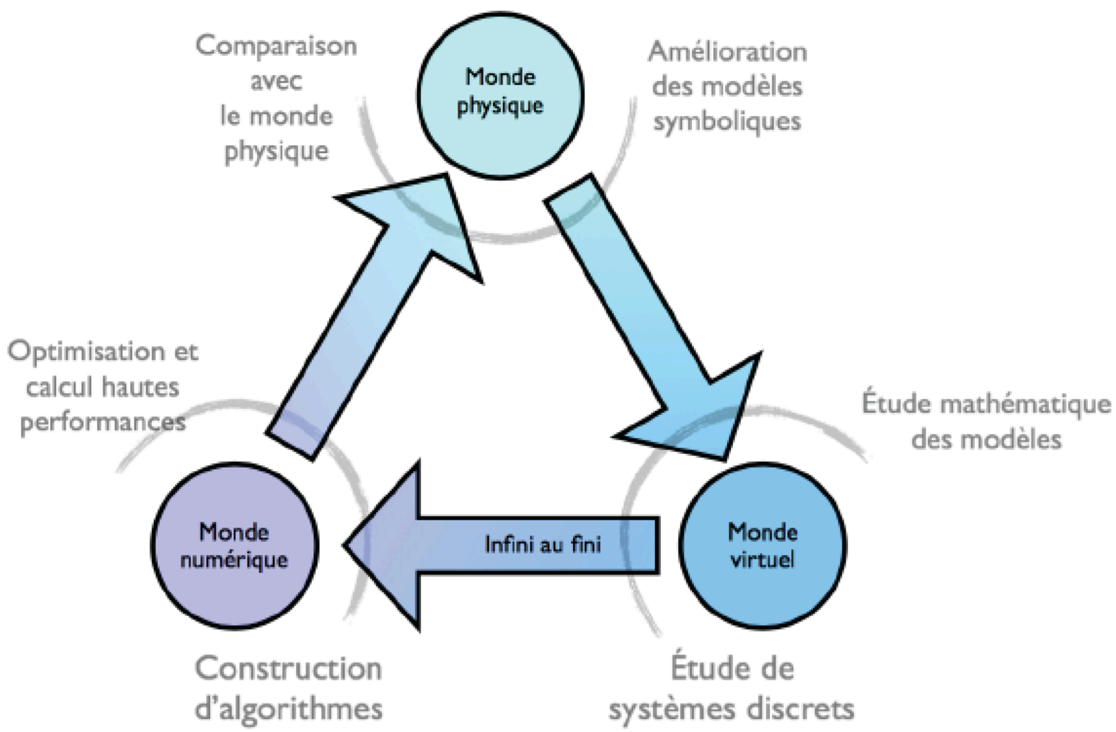

Figure 1

Des phénomènes physiques aux modèles analogiques, nous passons aux modèles formels. Ces derniers sont déjà éloignés du monde réel mais en donnent une bonne projection que l'on peut comparer au réel au moins de façon heuristique. Par contre, un problème se pose : comment analyser ces modèles, quelle signification ont-ils et les équations qui les composent désignent-elles des objets identifiables ? Pour commencer cette analyse, le premier point est de définir un monde dans lequel les modèles aient potentiellement une existence, un monde que l'on puisse décrire avec un langage précis : le monde virtuel, le monde des mathématiques. Dans ce monde virtuel, le deuxième

[2] Maintenant IRSTEA, http://www.irstea.fr/etgr

dans notre liste, nous pouvons effectuer des expérimentations totales, c'est un monde qu'a priori l'on peut totalement maîtriser. Le premier travail à effectuer est donc de déterminer si le modèle considéré désigne un ou plusieurs objets dans ce monde virtuel, si l'on peut affiner la connaissance de ces objets en, par exemple, les situant dans des ensembles mathématiques de plus en plus petits, précis et dont on a donc une connaissance de plus en plus claire. L'image que l'on pourrait donner de cette approche est la suivante : quand on cherche ses clefs le matin, on restreint le périmètre de recherche à l'appartement et non à toute la ville ! Cette étape mathématique permet de prendre possession du problème formel et ainsi d'avoir une connaissance a priori claire des comportements des objets mathématiques entrant en jeu dans ces problèmes. La modélisation mathématique proprement dite réside alors dans l'analyse du problème et l'identification des espaces contenant la solution. Les questions d'unicité et de régularité des solutions sont alors abordées, mais en général, les espaces contenant les solutions sont de dimension infinie. Le problème que l'on rencontre alors est cette dimension infinie des espaces. En effet, à terme, nous voulons pouvoir prédire des comportements, calculer des solutions de ces problèmes, mais malheureusement, la plupart du temps, il est impossible de trouver des formules explicites les décrivant. Nous allons donc confier à des ordinateurs la tâche de déterminer, grâce à des algorithmes, des approximations de ces solutions. Le problème est alors le suivant : les ordinateurs ne connaissent que la dimension finie, comment donc passer d'un problème de dimension infinie à un problème de dimension finie ? Il faudra donc, pour espérer effectuer des simulations, filtrer les espaces de travail de dimension infinie en des suites bien choisies d'espaces de dimension finie. Ce qui nous conduit au troisième monde, le monde numérique, celui que les plateformes de calcul comprennent. Une fois les problèmes réécrits en dimension finie, on peut passer à la phase algorithmique dans laquelle les principaux outils sont l'algèbre linéaire et l'arithmétique. Cette étape de mise en forme d'un problème pour le rendre traitable via des moyens informatiques est suivie de l'ultime flèche du cycle ci-dessus : la simulation. Cette phase est cruciale et demande une connaissance de l'ensemble du cycle afin d'effectuer des comparaisons pertinentes non seulement avec le modèle mathématique pour s'assurer que les solutions représentées approchent effectivement celles du problème mathématique, mais aussi avec les données expérimentales et les observations à partir desquelles a été construit le modèle formel.

Bien entendu, dans un monde idéal, tout fonctionne du premier coup, mais, comme rappelé dans ce texte, le monde étant infiniment complexe, il y a toujours un détail qui nous échappe, un point que nous avons négligé mais qui s'avère primordial, un coin enfoncé dans nos convictions. Il est rare que le cycle boucle du premier coup, il faudra dans la plupart des cas plus d'un tour avant de calibrer de façon satisfaisante les modèles. Ces allers-retours permanents entre monde réel, monde virtuel et monde numérique sont à la base du cycle de modélisation dans lequel les mathématiques interviennent.

Modélisation, simulations et comparaisons

Dans le processus de modélisation, au moins quatre étapes peuvent être mises en avant : les modèles analogiques et formels, la compréhension des erreurs, les méthodes numériques, et les comparaisons avec l'expérience. Chacun de ces points fera intervenir des compétences différentes, des outils différents. Dans les exemples d'application et de travaux donnés dans la suite de ce texte, nous pourrions citer ainsi comme outils, la notion de dérivation, de limites, d'algorithmes ou encore les notions de physique élémentaire, de magnétisme de base, d'expérience de mécanique du point. L'essentiel est ici d'appréhender l'ensemble de la chaîne de traitement des modèles à partir d'exemples faciles à mettre en œuvre.

Les modèles analogiques représentent le point de départ du processus de modélisation, les physiciens, biologistes ou autres spécialistes d'une discipline en prise directe avec l'observation et la manipulation des phénomènes que l'on peut appréhender, ont l'intuition d'une loi de fonctionnement. Cette loi, en général édictée en langage mathématique, peut être aussi représentée à travers des expériences simples qui illustrent et imitent des aspects particuliers d'un processus complexe que sont les modèles analogiques. L'analyse mathématique de ces modèles formels ou analogiques conduit à des systèmes d'équations et des définitions d'univers, en général des espaces de fonctions, dans lesquels vivent les solutions de ces systèmes, qui ont un sens mathématique, c'est-à-dire dont on peut donner un sens aux solutions (ces solutions n'étant pas nécessairement uniques). Une fois cette phase accomplie, le passage de la dimension infinie aux objets de dimension finie, indispensable pour faire assimiler le problème à un ordinateur, est effectué en utilisant des méthodes numériques adaptées qui sont des filtres. Ces filtres vont permettre de mettre en relief des informations essentielles du système pour que la simulation rende compte, de façon satisfaisante, du fonctionnement du système complet. Cette étape nécessite d'avoir une connaissance fine de la qualification des erreurs commises par la méthode numérique, son écart au modèle complet que l'on désire étudier numériquement. Enfin, la dernière étape est celle de la comparaison avec les expériences. Cette ultime étape du processus permettra de quantifier la recevabilité du modèle mathématique étudié vis-à-vis des objectifs de modélisation fixés.

Que peut-on attendre des simulations ?

On peut attendre de la simulation avant tout d'être proche des phénomènes que l'on désire modéliser, mais aussi, et c'est là l'objectif principal, d'être prédictive. En effet, les modèles du monde réel que nous utilisons ont pour objectif d'en comprendre les mécanismes pour ainsi pouvoir prédire son évolution. Par exemple, les modèles de météorologie sont employés pour prédire le temps et non uniquement pour observer le temps en cours ! Les modèles numériques peuvent être également utilisés pour prédire des caractéristiques physiques d'un phénomène en assimilant des informations, ce qui est désigné sous le vocable d'assimilation de données. Cette discipline, assez récente, se base sur des simulations qui sont enrichies par des informations pour pouvoir améliorer la qualité des prédictions ; elle est abondamment utilisée en climatologie par exemple.

Objectif des comparaisons avec les expériences

Les comparaisons avec les expériences permettent de calibrer les modèles. Par exemple, il est très complexe de choisir de façon pertinente des paramètres dans un modèle formel. Ainsi, le skieur glissant sur les pentes aura une vitesse dépendant de la nature de la neige, de sa température mais aussi de la nature de ses skis. Pour pouvoir obtenir l'acuité la plus grande dans la compréhension de son mouvement et dans sa simulation, il sera nécessaire de prendre en compte tous les paramètres de l'expérience. Malheureusement, ces paramètres sont des données qui font intervenir des phénomènes physiques à des échelles très différentes (molécules, cristal de glace) et particulièrement complexes à quantifier a priori. Le calibrage de ces paramètres peut passer par des méthodes d'évaluation des paramètres à partir de données expérimentales parfaitement calibrées comparées à des expériences numériques.

Une fois cette phase de calibrage effectuée, il est alors possible de mettre en place des expériences numériques ayant pour objectif de prédire le comportement des systèmes physiques. L'exemple le plus classique et surtout le plus simple à exposer, est celui de la trajectoire des satellites mis en orbite. Il est possible, grâce aux connaissances poussées que nous avons maintenant en mécanique, de prédire de façon très précise la trajectoire d'un satellite et ainsi optimiser sa mise en orbite pour lui assurer la plus grande pérennité possible. Ces modèles numériques sont également utilisés pour commander les satellites depuis des centres de contrôle au sol afin de les mener au-dessus de points du globe pré-déterminés pour effectuer des observations. Ces applications demandent d'avoir à disposition des modèles numériques particulièrement précis.

Quelques exemples de travaux en laboratoire

Dans ce texte, nous donnons trois exemples de modélisation étudiées et développées au sein du Laboratoire Jean Kuntzmann. Les trois ont comme dénominateur commun les équations aux dérivées partielles et la mécanique, qu'elle soit des fluides ou des solides. Les équations aux dérivées partielles constituent un outil essentiel de la modélisation des problèmes physiques. En effet, la modélisation d'un problème passe souvent, dans le cas des systèmes mécaniques, par une étude à très faible échelle des processus. Cette étude à très faible échelle se base sur la quantification des variations locales de grandeurs, telles que la vitesse, la déformation ou encore la densité, en accord avec des lois fondamentales telles que, la conservation de la masse ou de l'énergie totale. Ces petites variations locales sont traduites en terme de taux de variation pour être visibles à grande échelle. Par exemple, sur une courbe associée à une fonction f de R dans R, localement, en fonction d'une petite variation h de x, il sera possible d'estimer la variation de f : $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Cette variation dépend de la longueur d'observation h, ce qui rend le système non canonique, il est donc intéressant de faire disparaître cette longueur en passant à la limite. Pour une fonction suffisamment régulière, il est clair que la limite de la grandeur $\Delta_h f(x)$ quand h tend vers 0 sera 0, ce qui ne nous intéresse pas du tout ! Par contre, la limite du rapport $\Delta_h f(x)) / h$ quant à elle sera calculable pour une classe de fonctions f bien choisie : les fonctions dérivables. La notion de dérivée partielle est la généralisation de ce concept dans chaque direction de l'espace. Les petites variations ne sont plus alors portées par l'axe des réels mais par l'espace entier dans lequel vivent les objets étudiés. Si la fonction f est suffisamment régulière, cette variation ne dépendra pas de la direction choisie, elle sera une matrice agissant sur cette direction. Une fois que les équations sont écrites en terme de variations infinitésimales et retraduites en termes de dérivées généralisées, il est alors possible de déterminer si les solutions du problème construit sont bien posées.

Cette notion, introduite par Jacques Hadamard[3], mathématicien français, demande que :

1. la solution existe,
2. elle soit unique,
3. de faibles variations des paramètres du problème donnent de faibles variations de la solution.

[3] 1917-2008

Le premier point semble clair, si le problème n'admet aucune solution, l'intérêt de l'étudier est nul. Le second point se comprend de la façon suivante : si notre modèle est suffisamment bien construit, il n'y aura pas d'indétermination rendant difficile, voire impossible, le choix d'une solution. Souvent, dans les problèmes de modélisation, cette difficulté est rencontrée : quelle solution choisir ? Pour trancher cette question, il faut alors introduire des outils de sélection de la solution qui soient compatibles avec les principes de base de la physique. Le plus souvent, nous appliquerons les principes de la thermodynamique, ce qui nous amènera à nous poser des questions sur la notion d'entropie d'un système. Ajouter ces notions à des modèles est souvent la brique essentielle permettant de vérifier le deuxième point de la notion de problème au sens d'Hadamard. Le troisième point est bien plus délicat et souvent difficile à vérifier, mais essentiel pour la simulation. En effet, imaginons un problème dépendant de conditions initiales. Si ce problème ne bénéficie pas de la propriété de stabilité du troisième point précédent, cela signifie que la plus petite variation de l'état initial entraînera des variations considérables de la solution du problème. En particulier, estimer la solution du problème en utilisant une approximation de cette condition initiale risque de donner un résultat dont on ne peut en aucun cas assurer la pertinence. Un exemple célèbre d'un tel système est donné par le météorologue Edward Lorenz , qui fut l'un des premiers à mettre en évidence à travers un modèle mathématique des phénomènes chaotiques intervenant dans sa discipline. Le problème principal de ces systèmes est donc la fiabilité des simulations qui, trop sensibles aux conditions initiales, ne constituent pas des prédictions au sens propre du terme mais dégagent des scénarios possibles a priori totalement différents.

Le choix de la discrétisation peut être multiple, il dépend bien entendu de la nature du problème mais aussi des habitudes du mathématicien la traitant ou encore de la complexité de la méthode comparée aux moyens que l'on a à disposition. De nombreuses méthodes ont été introduites au cours des années, de plus en plus complexes au fur et à mesure que la puissance de traitement des plateformes de calcul augmentait.

La dynamique de la banquise

Ce problème[4] a pour objectif de comprendre le lien entre la disparition de la banquise et les modifications climatiques. En effet, la banquise agit comme un miroir qui renvoie vers l'atmosphère l'énergie solaire. Deux phénomènes s'affrontent donc : le réchauffement de la mer mais aussi le refroidissement de l'atmosphère quand la glace fond, ce qui induit a priori une diminution de la température au dessus du pôle et d'un autre coté, quand la glace est présente, le refroidissement de la mer et le réchauffement de l'atmosphère ! La difficulté majeure est ici de comprendre l'interaction entre les phénomènes météorologiques et l'évolution de la glace de mer. La première solution pour comprendre cette synergie serait de s'attaquer au problème global, ce qui, on s'en doute, n'est pas particulièrement viable. De plus, il existe déjà de nombreux modèles de prédiction climatique qui ont été efficacement testés, qui ont fait leurs preuves.

Alors, pour la première étape de la modélisation, celle de la construction du modèle formel, les premiers choix vont devoir être effectués :

1. on se concentre sur la glace de mer et sa dynamique, il faut pour cela comprendre l'influence des courants marins et des courants aériens au dessus de

---

[4] Travail réalisé en collaboration avec J. Weiss (LGGE / UJF) et M. Rabatel (LJK / UJF)

la banquise ;
2. la glace de mer peut être perçue comme un ensemble de plaques qui entrent en contact, s'entrechoquent, il faudra donc comprendre ce qu'est un choc ;
3. la banquise se casse mais aussi se ressoude avec le gel, comment prendre en compte cette évolution ? Comment détecter l'apparition d'une fissure ?
4. La glace gèle et dégèle en fonction de la température de la mer et de l'atmosphère : comment prendre en compte cette évolution ?

Il s'engage alors avec les glaciologues une discussion sur les paramètres importants qu'il est nécessaire de prendre en compte dans le modèle mais surtout sur l'ordre avec lequel ces paramètres seront introduits pour comprendre la dynamique. La complexification du système doit être effectuée en fonction de points de comparaison avec la réalité que nous pourrons introduire au fur et à mesure du processus de modélisation. Dans cet exemple, nous ferons nécessairement plusieurs boucles du cycle de modélisation pour affiner et complexifier le modèle en introduisant progressivement les mécanismes essentiels afin de les tester soigneusement et les valider avant d'entamer un nouveau cycle.

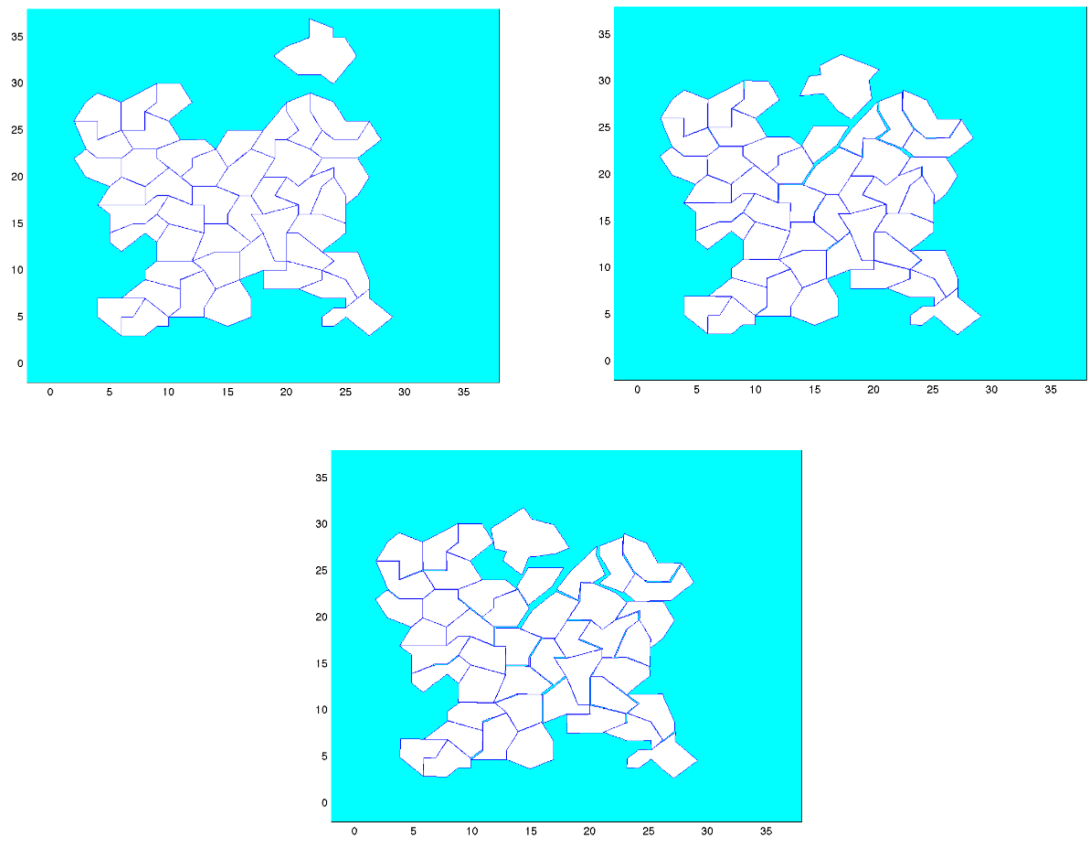

Figure 2 – Simulation d'un pack de floes, Calculs réalisés par M. Rabatel (LJK/UJF)

Dans l'étude de la glace de mer, il a été choisi de mettre en place en premier lieu les chocs entre des blocs totalement indéformables, solides. Cette première étape pourrait, aux yeux des adeptes de jeux vidéo, paraître simple et classique, mais elle ne l'est pas du tout. En effet, l'objectif ici n'est pas d'obtenir des images réalistes, mais des processus physiquement compatibles avec la réalité, sans les approximations nécessaires aux logiciels d'effets spéciaux par exemple. Les deux processus sont très différents, complexes et nécessitent beaucoup de technique, mais ont des objectifs très différents : pour les effets spéciaux, nous sommes intéressés par l'obtention d'un effet visuel réaliste, pour des systèmes excessivement complexes, des scènes de grandes dimensions, mais dont les calculs doivent tout de même être effectués rapidement, pour les simulations à des fins de prédiction, les systèmes à simuler sont bien moins inhomogènes mais le soin apporté au réalisme des processus microscopiques et leur lien avec les processus macroscopiques entraînent une grande complexité des équations et par conséquent des systèmes coûteux en temps de calcul. Dans notre cas, pour la glace de mer, un soin particulier est apporté aux contacts entre surfaces, qui doivent respecter des règles mécaniques locales particulièrement complexes, tandis que ce soin est inutile pour des objets en interactions quand l'objectif est le réalisme visuel. Deux filtres sont donc opposés : le filtre de la perception humaine qui permet au cerveau de rectifier les images ou ignorer une erreur de réalisme pour conserver l'impression globale et celui des mesures physiques qui contient énormément plus d'informations, non perceptibles par le filtre humain. Pour chacun de ces filtres, l'enjeu est différent mais tout aussi complexe à réaliser dans les deux cas. L'un demande le traitement rapide d'une multitude d'objets, l'autre demande le traitement d'une grande complexité physique.

Pour ce premier cycle de modélisation, des choix sont à effectuer : comment prendre en compte la forme des morceaux de banquise (floes), quel modèle physique appliquer aux contacts ? Pour la première question, les floes sont divisés en un nombre fini de petits triangles, méthode classique de triangulation de domaine, ensuite ils sont plongés dans un univers dans lequel le maillage ainsi créé reste fixe mais la position des floes est repérée. Pour les contacts, des lois de frottement et de contact (par exemple les lois de Coulomb) sont choisies. Le système obtenu demande donc, à chaque instant, de connaître la position de chaque floe et de déterminer s'ils entrent en contact. Ensuite, les contacts sont gérés en résolvant des systèmes de grande taille, complexes. Le nombre d'inconnues est égal à plusieurs fois le nombre de contacts…

Une fois le modèle numérique établi et codé, le troisième sommet du cycle de modélisation consiste en la comparaison avec des expériences. Dans le cas de cette étude, les calculs ont été confrontés avec des expériences en bassin effectuées sur des plaques de bois de un mètre de diamètre ! Une fois démontrée la concordance des résultats de simulation et des observations, nous pouvons entamer un nouveau cycle de modélisation qui aura pour objectif d'enrichir le modèle pour arriver, après plusieurs de ces cycles, à un modèle de floes prenant en compte les nombreux paramètres identifiés au début : fracture des floes, gel des floes et bien entendu dégel.

L'effet Leidenfrost

Dans ce deuxième exemple[5], nous nous intéressons à la modélisation de gouttes de liquide sur un support chauffé. L'expérience de référence est la suivante : chauffez un support (environ 200°), posez-y une goutte d'eau (pas trop grande), celle-ci commencera à courir dans tous les sens, pendant un temps avoisinant quelques minutes avant de disparaître. Recommencez la même expérience mais avec une température plus basse (100° par exemple), cette fois-ci la goutte disparaît presque instantanément ! Ce phénomène a potentiellement de nombreuses applications, comme par exemple le contrôle du mouvement de gouttes d'eau sur des processeurs pour analyser la composition du liquide ou encore le refroidissement de circuits.

Pour modéliser ce type de phénomènes, les points clefs à analyser sont les suivants :

---

[5] Étude réalisée en collaboration avec R. Denis, H. Kahlil et E. Maître (LJK, UJF).

1. le mouvement des fluides pour une température variable,
2. la transition de phase entre l'état gazeux et l'état liquide,
3. le suivi de la surface d'une goutte et donc la notion de surface pour cette goutte.

Le premier point est bien connu, les équations du mouvement des fluides, dont la plus connue est celle portant les noms de Navier et Stokes, sont étudiées depuis longtemps. Cette partie de la phase de modélisation ne demande donc qu'une solide recherche sur les modèles et techniques d'analyse en cours et au moins un choix : l'eau et l'air, à cette échelle et sous la gamme de contraintes que nous envisageons, sont incompressibles ; nous aurons beau appuyer dessus, un morceau homogène de fluide se déformera mais ne changera pas de volume. Cette phase est essentiellement bibliographique. Durant celle-ci, nous extrairons, en fonction du grain de réalité (ou de réalisme pour être exact) que nous voulons donner au modèle, les équations décrivant cette partie de la physique du phénomène.

Le deuxième point, que nous traitons en même temps que le troisième, est quant à lui particulièrement délicat. En effet, le changement de phase d'un liquide et surtout la localisation de sa surface libre, est une affaire complexe à analyser. Pour en venir à bout, après une longue étude des travaux existants sur le sujet, nous nous penchons sur l'analyse des échanges de matière entre les deux phases à une échelle très fine. Le problème est ici de mettre en place un modèle qui soit compatible avec les équations du mouvement des fluides que nous avons choisies précédemment. En effet, il ne faut pas oublier que nous voulons effectuer une analyse mathématique du modèle ; pour cela, les objets mathématiques doivent avoir une chance d'être mathématiquement viables.

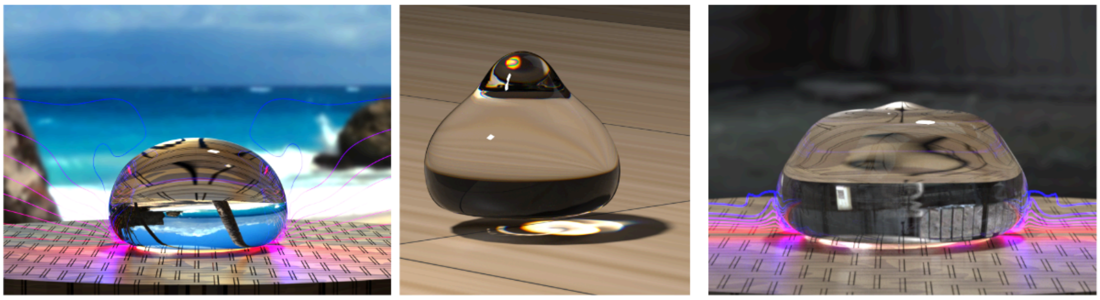

Figure 3 – Simulation de goutte avec effet photo réaliste. Calculs réalisés par D. Roland (LJK / UJF).

Dans le modèle de goutte étudié dans ce projet, le point clef qui est le changement de phase est traité grâce à l'introduction de l'enthalpie[6] locale le long de la frontière entre liquide et eau. Cette frontière a une épaisseur ; dans un modèle exhaustif, nous devrions modéliser ce fait, mais l'objectif de l'étude ne demande pas que le modèle soit aussi précis dans notre cas : nous pouvons nous « contenter » ici d'une frontière, transition brutale entre l'eau et l'air mélangée à la vapeur. En construisant ce modèle, nous conservons à l'esprit que nous devrons transformer ce problème de dimension infinie en problème de dimension finie. Le problème va donc prendre une forme mathématique propice à la discrétisation que nous avons choisie. Cette formulation, nommée « level-

[6] L'enthalpie est l'une des grandeurs intervenant dans les bilans thermodynamiques.

set », permet de suivre les iso-valeurs[7] d'une grandeur, la clef étant ici de bien choisir la fonction dont on suit les iso-valeurs ! Dans l'écriture de la formulation « level-set » du problème, la fonction dont on traque l'iso-valeur est la distance à l'interface entre le liquide et le gaz. Dans la phase de discrétisation, la méthode sera construite pour respecter au mieux les propriétés des équations mais aussi pour être, dans la mesure du possible, peu consommatrice en ressources. Dernier point sur la méthode : comme précédemment, nous tentons d'avoir un coup d'avance. L'objectif suivant sera d'effectuer des simulations suffisamment réalistes pour être comparées à des résultats expérimentaux. Deux difficultés majeures se présentent : le calcul doit être effectué pour des objets de dimension trois, ce qui sera synonyme de calculs coûteux, le second point est que la goutte a une fâcheuse tendance à ne pas rester en place. Pour remédier à ces deux problèmes en même temps, nous avons donc opté pour une hypothèse forte : le problème est axi-symétrique, il existe donc un axe autour duquel les solutions peuvent tourner sans être pour autant modifiées. Cette hypothèse, qui n'est pas physiquement déraisonnable mais tout de même pas totalement réaliste, permet non seulement de transformer un problème tri-dimensionnel en problème bi-dimensionnel, mais aussi de fixer la goutte. En effet, une fois le choix de l'hypothèse d'axi-symétrie effectué, la goutte virtuelle est fixée et ne peut plus se déplacer si elle veut respecter cette hypothèse.

Fort de ce cadre strict, nous pouvons donc construire un premier code de calcul, la question nécessaire à boucler le cycle de modélisation est alors : quelle expérience reproduire. Dans notre cas, le choix s'est porté sur le temps de vie des gouttes d'eau observé physiquement. Le dernier travail, avant un nouveau cycle de modélisation pour améliorer la portée de l'étude, est donc de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Quels enjeux dans l'enseignement des mathématiques

Comment la modélisation peut-elle être utilisée dans le cadre de l'enseignement des mathématiques ? Bien entendu, je ne peux que rendre compte de ma propre expérience et vais sûrement exposer des propositions et méthodes que déjà, beaucoup de professeurs mettent en place dans leur classe, éventuellement sous une forme différente.

L'enjeu principal est ici de motiver les élèves à s'intéresser aux mathématiques, d'éveiller leur attention. Les mathématiques désignent dans ce contexte les méthodologies d'analyse des problèmes ainsi que la recherche de solutions adéquates non dans le cadre de l'application de raisonnements pré-construits mais de réflexions originales. Ceci est, je pense, l'un des objectifs principaux des cours de mathématiques en collège et lycée. Les élèves ne vont pas apprendre des mathématiques techniques au sens propre du terme mais apprendre à raisonner et faire preuve d'intuition sur un problème. Pour cela, la première étape semble donc être bien l'éveil de l'intérêt. Je suis conscient que la méthode n'est pas toujours applicable, qu'elle dépend fortement de la classe et demande un investissement lourd, mais je l'ai vu fonctionner dans des contextes très différents, dans des établissements accueillant un pourcentage plus ou moins important d'élèves en difficulté : à chaque fois, des résultats ont été obtenus. Les expériences qui sont décrites dans la suite de ce texte ont été principalement réalisées

[7] Zones de l'espace sur lesquelles la fonction a une valeur constante prescrite. Pour une fonction suffisamment régulière et pas trop « plate », ces zones seront des surfaces.

dans le cadre de projets MATh.en.JEANS[8], qui ont lieu dans les établissements et sont encadrés par les professeurs, pour des groupes d'élèves qui ne sont pas nécessairement de la même classe. Par ailleurs, dans la mesure du possible, j'applique ce principe pendant les cours et travaux dirigés sachant que souvent, à l'Université, le public est plus réceptif qu'au lycée et collège car plus mature.

La modélisation devient alors, dans le contexte de l'apprentissage, un outil pour développer des exemples permettant d'introduire des notions complexes et surtout de les motiver auprès des élèves. Par exemple, pour les sensibiliser à l'algèbre linéaire et aux notions d'espaces vectoriels, je fixe un objectif de compréhension des principes de mouvement dans l'espace et de déplacement des objets appliqués aux jeux vidéo. Chaque rappel des épisodes précédents effectué en début de cours contient alors un aperçu du chemin déjà parcouru vers l'objectif fixé initialement.

Manipulation des objets et appropriation des concepts

Afin de fixer l'attention de l'élève mais aussi de lui donner des images sur lesquelles accrocher des concepts et ainsi mieux les visualiser, les objets ont pour objectif d'être des modèles analogiques des concepts mathématiques. Dans les trois exemples suivants, nous exposons donc des processus de modélisation nécessitant l'introduction de concepts mathématiques bien définis. Leur mise en œuvre et surtout leur construction, permettent à l'élève de s'approprier les notions mathématiques. Bien entendu, un élève ne va pas réécrire en cours ou lors d'une activité les théories mathématiques, mais guidé, il sentira la nécessité d'assimiler, de construire des outils, pour arriver à ses fins. Dans le cadre des cours à l'Université, les étudiants auxquels cette approche a été proposée ont en général semblé réceptifs et je pense qu'une réelle étude systématique, si elle n'a pas déjà été réalisée, serait intéressante.

Un point important dans l'appropriation que j'ai pu remarquer dans ma propre expérience est que les élèves sont prêts à faire des efforts conceptuels bien motivés pour comprendre un concept et ses ressorts. Le retour des groupes d'étudiants souligne qu'ils ont préféré comprendre les mécanismes de base, les briques élémentaires, plutôt que d'appliquer des formules. Même si les étudiants en questions ne sont pas du tout destinés à faire des études en mathématiques, ils sentent que l'important est ici de comprendre la démarche pour devenir agiles selon l'expression, en vogue en informatique, introduite en 2001.

Trois exemples traitables en classe

Ces trois exemples ont été traités dans le cadre de l'activité MATh.en.JEANS. Des élèves de classes différentes se réunissaient une fois par semaine en moyenne pour travailler, avec un professeur encadrant l'activité, sur un sujet présenté en début d'année. Les élèves travaillent en général en groupes de deux à quatre personnes sur un sujet qu'ils ont choisi parmi ceux exposés lors de la première séance.

Le chercheur a pour rôle de proposer les sujets et d'assurer un suivi des travaux afin de guider les groupes vers la production d'un document, d'une expérience ou autre jeu. Les rencontres avec le chercheur ont en général lieu tous les mois. À la fin de l'année, les élèves présentent leurs travaux à l'occasion d'un congrès.

[8] http://mathenjeans.fr

Cartographie

Niveau

Collège (toutes classes).

Question

Peut-on tracer une carte d'un lieu sans arpenter ce lieu ?

Plan d'expérience

- Depuis la classe, tracer le plan de la cour en regardant depuis la fenêtre,
- trouver comment construire le plan avec les outils fournis,
- comparaison avec des mesures directes, évaluation des erreurs commises.

L'objectif de ce projet est d'introduire les concepts d'angle et de proportionnalité. L'enjeu pour les élèves est de trouver une méthode pour cartographier un territoire, avec les objets qu'il contient, sans mesurer les objets directement. L'application proposée, par exemple, sera de cartographier la cour depuis une fenêtre de la classe ou encore de cartographier la classe sans bouger de sa chaise.

Les outils physiques mis à la disposition des groupes sont :

- un compas,
- un rapporteur,
- un bâton d'un mètre.

Deux outils mathématiques seront utilisés :

- le théorème de Pythagore,
- le théorème de Thalès.

Phase d'observation

Pendant cette phase, les élèves peuvent parcourir la classe pour faire des expériences de mesures d'objets à distance. L'objectif premier sera donc de tracer des triangles et d'étudier la dépendance de l'angle au sommet en fonction de sa position par rapport à la base (en considérant une base qui soit de longueur constante). Cette partie peut être affinée sur une feuille bien entendu. La première application pourra être de mesurer la largeur et la hauteur de la porte en ne s'en approchant pas de plus de deux mètres.

Les questions que les élèves se posent sont alors :

- Peut-on le faire ?
- Si oui, que faut-il mesurer (sachant qu'ils n'ont qu'un bâton de un mètre et un rapporteur).

Ensuite, quand ils trouvent une méthode, il est intéressant de les pousser vers la notion de nombre de mesures minimum pour réaliser le programme.

Construction du modèle

Dans cette phase, le deuxième sommet du cycle, les élèves vont construire leur modèle en utilisant des outils mathématiques pour le justifier. Avec l'aide du professeur, ils verront comment appliquer les théorèmes de Thales et de Pythagore pour obtenir une justification rigoureuse de leur résultat. Il faut alors passer à la phase des simulations.

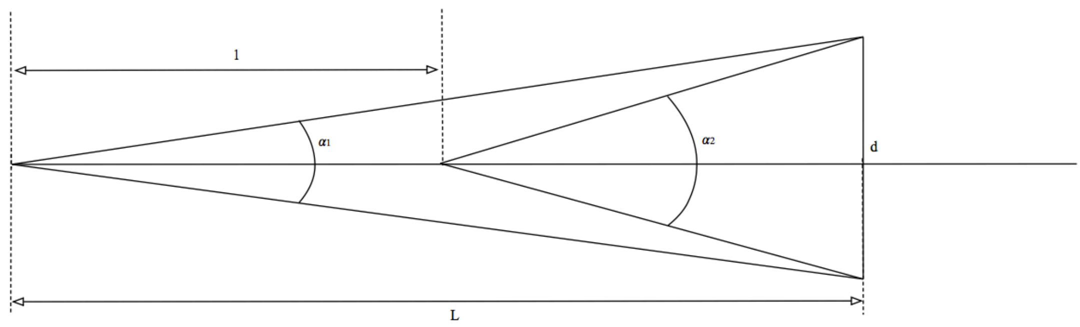

Figure 4

Dans cette phase, l'un des enjeux est de leur fournir les deux outils mathématiques quand ils deviennent indispensables. Ils tenteront de trouver les solutions par eux-mêmes dans un premier temps et sentiront ainsi le besoin d'avoir en main un outil puissant.

L'idée principale est ici de les amener à faire le dessin suivant et calculer la grandeur L en fonction des angles mesurés puis d'en déduire la longueur *d*.

Les notions d'angles pourront être introduites en étudiant la dépendance de la longueur adjacente à un angle droit dans un triangle rectangle en fonction de l'angle opposé. Soit le travail pourra alors être effectué avec des tables construites à la main dans un premier temps, soit directement avec les formules liant la longueur au sinus de l'angle.

Les élèves peuvent bien entendu explorer d'autres pistes, en particulier, si la direction du regard n'est pas perpendiculaire au segment, que faut-il faire ?

Le second point intéressant à aborder est celui des erreurs. L'objectif est de faire sentir aux élèves la différence existant entre des relevés théoriques et des relevés effectifs. En particulier, leur faire sentir qu'à partir d'une certaine taille d'objet et d'éloignement, il devient impossible de discriminer les objets. En reprenant le raisonnement précédent, il sera par exemple possible de tracer des courbes d'erreur en fonction de la distance à l'objet et de la taille de l'objet. Cette erreur sera celle commise entre les mesures au rapporteur puis les calculs et les données effectives du dessin.

Modèle numérique

Les élèves peuvent construire un petit programme, par exemple sous un tableur, pour systématiser leurs formules. La phase de tracé de la carte peut être mise en œuvre. Cette partie est une synthèse de mise en œuvre qui sera ensuite comparée avec un arpentage effectif du territoire.

Il pourra, en fonction des possibilités, être aussi intéressant d'effectuer ce travail en pleine nature pour des objets très lointains. Dans ce cas, la technique de rapprochement ne fonctionnant plus, il faudra effectuer des relevés multiples depuis des points très différents très éloignés. Cette partie comprendra alors la notion d'intersection de droite et de secteurs angulaires.

Mirages

Niveau

Collège (toutes classes).

Question

Comment expliquer le phénomène des mirages et le reproduire mathématiquement ?

Plan d'expérience

- construire un modèle numérique rendant compte du phénomène,
- effectuer des calculs sur ordinateur pour vérifier le fonctionnement du modèle,
- monter une expérience de physique à la lumière des résultats précédents.

Dans ce projet, les concepts visés sont les notions de géométrie et de trigonométrie élémentaire, les concepts de sommes et de limites de suites et les notions de taux de variation et de dérivées. Cette activité peut être divisée en deux niveaux : dans le premier les élèves peuvent s'intéresser au modèle analogique des matériaux multicouches, voire bi-couches, dans le second l'accent pourra être mis sur les notions de limites et le lien avec les dérivées via le taux de variation.

Les outils physiques à la disposition du groupe :

- de l'eau,
- du gros sel,
- éventuellement un laser (se trouve dans les salles de physique de collège),
- règle graduée.

Les outils mathématiques à la disposition du groupe :

- notion d'angle et trigonométrie,
- géométrie euclidienne,
- suites,
- taux de variation et dérivées.

Phase d'observation

La phase d'observation pour cet atelier peut être assez délicate et dans l'idéal sera effectuée avec l'enseignant de physique. La première observation à effectuer est celle d'une image de mirages pour essayer de faire comprendre aux élèves la nature du phénomène, en particulier, leur faire comprendre que le sol agit comme un miroir. La question se focalisera alors sur la notion de vision : voir un point sur un objet est équivalent à tracer un trajet lumineux entre l'œil de l'observateur et l'objet. C'est à partir de ces observations qu'il faut les amener à se rendre compte que dans le cas qui nous intéresse, les rayons ne rebondissent pas sur le sol mais sont déviés près du sol. Ainsi, dans un premier temps, ils devront se focaliser sur les raisons physiques élémentaires de la déviation d'un rayon. Des observations pourront être effectuées des phénomènes de diffraction et les lois de la réfraction de Descartes seront alors mises à leur disposition.

Deux points importants seront mis en relief pour construire la base du modèle :

- l'utilisation des lois de Descartes pour estimer la diffraction d'un rayon lumineux,
- Un comportement limite : si le rayon est trop rasant, il est réfléchi.

Ceci permettra de construire un modèle simplifié de miroir.

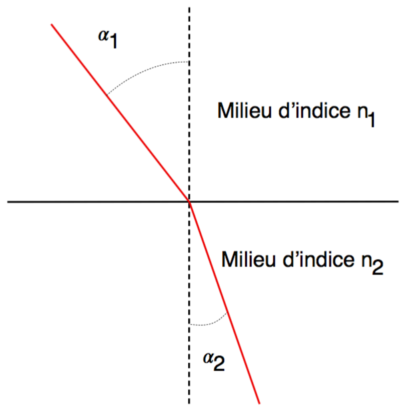

Figure 5

Forts de l'observation de l'effet du changement d'indice sur la trajectoire des rayons, il faut alors amener les élèves à faire le lien avec l'effet miroir des mirages et le fait que l'indice de réfraction de l'air sera modifié avec la température. Le sol est bouillant et réchauffe l'air au dessus de lui, mais il n'arrive pas à réchauffer toute l'atmosphère ! Un "dégradé" de température se forme donc et ainsi un dégradé d'indices de réfraction.

Pour modéliser ce phénomène, dans un premier temps, on considèrera que le domaine est stratifié, c'est-à-dire un empilement de domaines compris entre deux plans horizontaux d'indices de réfractions différents. Dans les faits, on s'intéressera d'abord à une plaque puis deux et ainsi de suite.

Par la suite, la question suivante pourra être posée :

> Un explorateur sur une lointaine planète regarde une mer de glace, sa fusée se reflète-t-elle dedans quand il se trouve au loin ?

Construction du modèle

> Le modèle sera construit sur l'hypothèse du milieu stratifié. Le premier travail est donc de déterminer le point de sortie ainsi que l'angle de sortie d'un rayon en fonction de son point d'entrée et de son angle d'entrée. Le schéma précédent (réfraction) illustre la relation : $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$,

Ensuite, le même travail est effectué sur plusieurs couches de matériaux (voir dessin suivant).

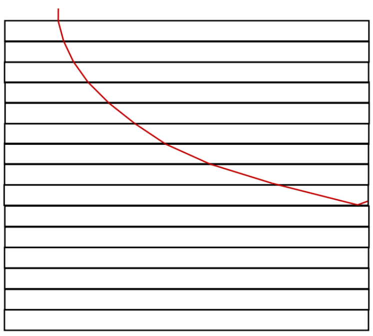

Figure 6

Pour aller plus loin, on peut écrire la suite des abscisses des points d'impact. On voit alors apparaître des taux de variations qu'il est possible de relier, quand la taille des plaque tend vers zéro et leur nombre vers l'infini, à des dérivées. On construit ainsi une équation différentielle ordinaire dont la solution donnera la forme du rayon lumineux.

Modèle numérique

Pour la partie numérique, il est possible d'effectuer les calculs facilement sous un tableur. L'objectif est ici de diminuer la taille des plaques et d'en augmenter le nombre pour voir remonter le rayon lumineux.

La partie expérimentale de cette étude est un peu plus lourde à mettre en place que celle des deux autres exemples de ce texte. Si l'on met une grosse quantité de gros sel dans de l'eau douce et que l'on pointe un laser sur le mélange formé ensuite par le sel fondu, l'indice de diffraction dépendra de la concentration de sel et entraînera une inflexion visible du rayon. Je vous avoue que la réussite de l'expérience n'est pas toujours garantie…

Boussoles

Niveau

Collège, Lycée (toutes classes). Le sujet est adaptable au programme de chaque classe.

Question

Construire et expliquer un modèle mathématique rendant compte du mouvement des boussoles.

Plan d'expérience :

- effectuer des observations sur des boussoles en jouant avec l'aide d'aimants,
- décider des phénomènes que l'on désire modéliser,
- mise en place du modèle,
- tester le modèle en comparant son comportement aux expériences de début de projet.

L'objectif de ce projet est de sensibiliser aux notions de fonctions trigonométriques, de géométrie et d'extrema de fonctions à valeurs réelles.

Les outils physiques à la disposition du groupe :

- des boussoles,
- des aimants.

Les outils mathématiques à la disposition du groupe :

- la notion d'angle et de produit scalaire,
- la notion de maximum d'une fonction.

Phase d'observation

Dans cette phase, pour cette activité qui peut être effectuée en classe en un cours (après test) pour sa version la plus rapide, il faut distribuer des boussoles aux élèves ainsi que des aimants. L'objectif est de leur faire observer quelles sont les positions de la boussole en fonction de la position de l'aimant.

Deux observations principales :

- la boussole s'aligne sur l'aimant et reste stable,
- si l'on approche l'aimant pour le faire arriver dans la direction opposée, la boussole semble rester sur place, mais le moindre choc la fait se retourner et rejoindre la position alignée, plus stable, de la ligne précédente.

Alors, afin de faire comprendre la notion de système physique, il est possible de prendre un exemple intermédiaire : celui des montagnes russes.

Un chariot sur des montagnes russes a trois types de positions :

- le chariot est en pleine pente, s'il est lâché, il dévale vers le fond de la vallée,
- le chariot est sur un sommet, il ne bouge pas, mais la moindre perturbation le fera dévaler d'un côté ou de l'autre,
- le chariot est au fond d'un creux, on aura beau le secouer, il restera au fond du creux.

Cet exemple montre que le système physique peut être hors équilibre (en mouvement potentiel), en équilibre stable (au fond du creux) ou alors en équilibre instable (sur un sommet). Pour la boussole, on observe aussi ces trois états.

Construction du modèle

L'enjeu de cette partie est de leur faire construire une fonction d'énergie, à l'image des montagnes russes, en plaçant les points d'intérêt que sont les équilibres stables et instables.

La fonction dépendra de l'angle de la boussole avec le champ extérieur (axe de l'aimant) et variera entre deux valeurs maximales. De plus, il est possible de la tracer sans lever le crayon (pas d'à-coups dans le comportement de la boussole quand on fait tourner l'aimant autour de la boussole) et le dessin se répète à chaque fois que l'on a fait un tour (remarque sur la périodicité).

Une possible complexification du modèle serait de prendre en compte deux boussoles en interaction. Dans ce cas, la difficulté résidera non seulement dans la construction des champs magnétiques émis par les boussoles mais aussi dans la mise en place de l'expérience qui nécessite de manipuler de petites boussoles fortement aimantées.

Modèle numérique

Pour cette partie, il est possible de tracer la fonction sinus pour vérifier qu'elle colle effectivement au modèle que l'on cherche à construire. Pour des élèves avancés (terminale ou licence) il serait possible de mettre en place une simulation pour les deux boussoles.