MODELISER DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES : POURQUOI ET COMMENT ?
QUELLES RELATIONS ENTRE MATHEMATIQUES ET PHYSQUE ?

Marc Rogalski
Professeur émérite à l'Université de Lille 1, collaborateur bénévole à l'université Paris 6 et chercheur associé au laboratoire LDAR

Résumé – Nous avançons des arguments (d'ordres social, historique et épistémologique) pour l'idée qu'il faut, au moins à partir du lycée, développer des activités de modélisation en classe de mathématiques. Nous donnons des exemples de telles madélisations, en particulier en physique. Nous mettons en évidence leurs difficultés et leurs avantages, en particulier pour la compréhension des modes de raisonnement de l'analyse mathématique. Enfin, nous évoquons sommairement les problèmes de formation des maîtres.

Quelques constats et principes

Les fondements des mathématiques élémentaires modélisent le réel

L'enseignement du comptage, de l'addition, du produit de nombres entiers : il s'agit clairement de modélisation d'opérations sur le réel. Il en est de même pour les fractions, les décimaux,… La géométrie enseignée au primaire modélise l'espace physique et ce qui y est invariant dans les mouvements, par des figures, matérielles au début (mesures, instruments), et par des relations entre elles. D'ailleurs, personne n'imagine d'enseigner au primaire en partant des axiomes de Peano de l'arithmétique, ni à partir des axiomes d'Euclide !

Collèges, lycées, le supérieur : les mathématiques pour elles-mêmes ? Comme le jeu d'échec ?

Le processus de mathématisation : abstraction, définitions, démonstrations, problèmes internes aux mathématiques… tout cela devient nécessaire à partir d'un certain niveau de l'étude des mathématiques. L'essence des mathématiques, ce qui les rend utilisables dans toutes les disciplines scientifiques, c'est leur caractère de grande généralité et leur absolue fiabilité, grâce à la rigueur apportée par la pratique de la démonstration.

Cela peut devenir un jeu passionnant en lui-même, les mathématiciens le savent bien.

Le jeu d'échec aussi !

Une grande complexité, des stratégies variées, des découvertes empiriques, des raisonnements rigoureux, des évolutions historiques, un vif plaisir à jouer, à résoudre des problèmes : le jeu d'échec ressemble par bien des côtés aux mathématiques !

Pourtant, aucune des sociétés développées n'impose l'enseignement obligatoire du jeu d'échec, alors qu'elles le font toutes pour les mathématiques. Il y a donc des raisons, incompatibles avec l'idée des « mathématiques seulement pour elles-mêmes », qui expliquent que leur enseignement soit obligatoire. Il s'agit, bien sûr, de leur utilité sociale et scientifique, en particulier de leurs liens avec la physique.

De plus, seule une toute petite minorité de nos élèves, et même de nos étudiants, sont destinés à se consacrer aux « mathématiques pures ». De nombreuses professions n'utilisent pas de mathématiques autres qu'élémentaires. Dans d'autres professions, elles ne serviront que d'outil technique. Seules les professions scientifiques (au sens large) exigent des mathématiques bien dominées, qui en particulier seront utiles dans des activités de modélisation.

Anticipant les arguments que nous développerons plus loin, notre thèse est ainsi *qu'il faut équilibrer dans l'enseignement, à partir du lycée, les mathématiques pour elles-mêmes et les mathématiques pour modéliser le réel* : les unes sont nécessaires à la société, les autres sont essentielles pour le fonctionnement même des mathématiques.

Que nous dit l'histoire ?

L'histoire des mathématiques est étroitement liée à celle des autres disciplines et à divers problèmes intéressant la société.

Donnons quelques exemples bien connus :

- l'invention des nombres purs et le développement du commerce chez les babyloniens (le passage de deux signes différents pour « cinq chameaux » et « cinq ânes » au nombre « pur » cinq) ;
- les besoins de l'astronomie et de l'établissement du calendrier ont motivé l'invention de la trigonométrie, et les calculs pénibles de celle-ci ont poussé à l'usage des logarithmes ;
- les covariations de grandeurs, dès l'époque d'Oresme, ont motivé l'introduction des graphes, et les fonctions, chez Leibniz et Newton, étaient systématiquement associées à des courbes parcourues en fonction du temps ;
- les problèmes d'optimisation (Fermat), puis de variation de grandeurs, ont motivé l'introduction des dérivées, associées aux vitesses, débits, etc ;
- la mécanique, mais aussi l'étude des épidémies, aboutissant à des systèmes d'équations compliquées sur des suites récurrentes, ont conduit aux équations différentielles ;
- l'étude par Euler des mouvements des fluides a fortement motivé l'introduction et le développement des fonctions de variables complexes ;
- le rôle joué par les jeux et les assurances dans le développement des probabilités est bien connu ;
- plus récemment (fin $19^{\text{ème}}$-début 20ème siècle), l'étude des équations de la physique, en particulier les équations intégrales et aux dérivées partielles, a été la motivation principale du développement de l'analyse fonctionnelle…

Il ne s'agit pas, bien souvent, d'applications de mathématiques constituées, déjà là, mais de « double émergence » (selon la formule de (Robert et Treiner 2004)). D'ailleurs, bon nombre de mathématiciens ont été aussi physiciens, astronomes, ont travaillé pour la marine, l'artillerie…

Cela n'exclut pas un fort développement des mathématiques à partir de problèmes internes (arithmétique, équations, algèbre, topologie…). C'est d'ailleurs l'interaction entre les aspects internes et externes qui semble le moteur le plus puissant dans les progrès des mathématiques.

Cet aspect s'est très accentué depuis 50 ans, les relations entre mathématiques et physique sont désormais omniprésentes. Mais aussi avec la biologie, l'informatique, l'économie…

Dans la suite, nous allons regarder de plus près la manière dont les mathématiques interviennent dans les sciences, et en particulier en physique.

Les mathématiques contribuent aux autres sciences et à la vie sociale

Il suffit d'ouvrir un manuel de physique, de chimie, de biologie, d'économie pour se rendre compte à quel point les mathématiques, à la fois, interviennent comme outil, et sont constitutives de concepts de ces disciplines (nous reviendrons sur ce point par des exemples).

Il est d'ailleurs impossible ici de ne pas relever la profonde stupidité épistémologique des nouveaux programmes de sciences des lycées ! Par exemple, le programme de physique s'y donne explicitement comme objectif d'y éliminer l'usage des mathématiques ! Le plus sûr moyen de remplacer la physique rationnelle par une vague vulgarisation…

Par ailleurs, de nombreuses activités sociales, ne se présentant pas *a priori* comme relevant d'une discipline scientifique précise, demandent néanmoins des mathématiques : pensons aux pourcentages, aux modes électoraux, aux intérêts d'emprunts, à l'usage social et politique des statistiques, aux liens entre probabilités et évaluations de risques, aux taux de croissance, d'imposition…

Sur tous ces aspects, il faut à la fois que les citoyens soient capables de mettre en œuvre certaines mathématisations, au risque de ne pas comprendre bien des aspects de leur vie politique et sociale, et d'avoir une attitude critique sur les « modèles » dont on leur assure qu'ils sont « vrais et incontournables » sans jamais leur en donner les hypothèses implicites.

Au-delà de la vie politique et sociale, la vie de tous les jours, dans ses aspects technologiques, fait appel aux mathématiques, mais implicitement. De plus en plus de mathématiques sont cachées dans la complexité des objets technologiques (images numériques, codes cryptographiques, musique…). Est-ce prudent que les citoyens ignorent complètement ces usages des mathématiques ? Que les élèves en aient une idée dans des cas où c'est possible, qu'ils puissent dominer l'usage des mathématiques dans la vie sociale, savoir comment elles interviennent dans les autres disciplines : c'est un objectif de la culture citoyenne que l'école doit donner, c'est l'un des enjeux de la vie démocratique de la société.

Mais cela doit se faire dans le respect du mode de pensée propre aux mathématiques, qu'il faut donc confronter à d'autres modes de pensée.

Interactions et modélisation

Quels apports des mathématiques aux autres sciences ?

Nous nous proposons de donner plusieurs exemples de ces apports.

Nous commençons par des exemples où les mathématiques sont constitutives des concepts de la physique.

- Le concept de proportionnalité est au cœur de la définition de bien des grandeurs physiques, il est inséparable de notions comme vitesse, débit, taux d'accroissement, pente d'une droite décrivant un phénomène physique.
- La mesure de grandeurs est constituée par et constitue la notion de nombre réel.
- Vitesse instantanée, débit non constant, équations de phénomènes évolutifs sont fondés par la notion de dérivée et par le calcul différentiel.
- Mesurer une grandeur produit, c'est la même chose que définir l'intégrale (nous y reviendrons).
- Des vecteurs mathématiques ou des forces physiques, lesquels fondent les autres ?

Mais on constate en fait de subtiles différences de points de vue, quand mathématiciens et physiciens utilisent ce qui semble être la même notion. Cela concerne la nature des raisonnements faits, les types de « preuves », l'existence des objets définis ou calculés (nous reviendrons plus loin sur cette question).

On peut alors, soit essayer de réduire ces différences quand c'est possible, soit les analyser comme représentatives des différences de paradigmes entre disciplines, et expliciter ces différences aux élèves. Nous y reviendrons.

Bien sûr, les apports des mathématiques à d'autres sciences que la physique se sont développés il y a déjà longtemps. Par exemple, c'est Daniel Bernoulli qui a le premier, en utilisant des suites récurrentes puis en les remplaçant par des équations différentielles, montré l'efficacité sociale de la vaccination pour réduire les méfaits des épidémies de variole. Plus récemment, l'économie mathématique s'est beaucoup développée, ainsi que les aspects mathématiques de la sociologie. Que l'on pense par exemple à l'indice de Gini (notant l'importance des inégalités de revenus dans une société) entièrement fondé sur une approche intégrale.

Au-delà de la contribution à des concepts d'autres disciplines, les mathématiques y servent aussi comme outils.

Des résultats (énoncés, techniques) sont utilisés comme outils dans des activités sociales, ou par d'autres disciplines, en particulier dans leurs activités de mathématisation de leurs propres modèles, à des fins de calculs, de prévisions, de simulations, de vérifications, d'adaptations, etc.

Faire cela avec les élèves, y compris avec des moyens informatiques, peut être un moyen de motiver autrement des résultats mathématiques, d'avoir sur eux un autre point de vue, et de faire sentir le potentiel universel des mathématiques dans les sciences et les activités sociales.

Apport d'autres sciences ou de problèmes de la vie courante aux mathématiques. Exemples dans la classe

(a) L'histoire du concept de fonction montre le grand rôle qu'y a joué la covariation de grandeurs (physiques, géométriques…)

Or l'introduction de la notion de fonction en 3$^{\text{ème}}$ par la notion de graphe ne va pas du tout de soi pour les élèves : pourquoi une courbe tracée dans le plan, uniquement numérique, les ferait-elle penser à la notion de fonction ? Une étude sur des élèves de 3ème et seconde a montré que cela ne passe pas du tout.

Il faut amener les élèves à penser eux-mêmes à quelque chose qui soit du type graphe pour représenter un phénomène où des grandeurs varient.

Voici deux exemples.

Exemple 1

Vous vous promenez sur les bords d'un square carré, qui a une statue en son centre (figure 1). Pouvez-vous décrire comment varie la distance entre la statue et vous lors de votre promenade sur le bord du square ? Essayez de le faire d'abord oralement, puis de transmettre un dessin pour expliquer cette variation à un camarade qui ne peut vous entendre. Que deviendrait votre dessin si la statue était à un coin du square ? (F. Hitt)

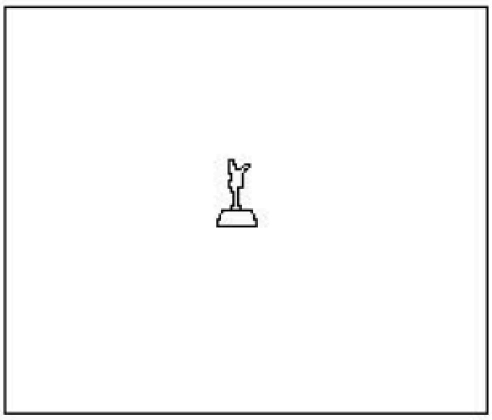

Figure 1– Vous vous promenez sur les bords d'un square carré, qui a une statue en son centre

Voici des dessins successivement proposés par les élèves, travaillant en petits groupes. On voit clairement une évolution depuis une figuration « matérielle » où les grandeurs à mesurer sont présentées dans leurs positions réelles jusqu'à un véritable graphe, avec deux étapes cruciales : étaler le bord du carré pour représenter la distance parcourue, représenter verticalement les distances à la statue.

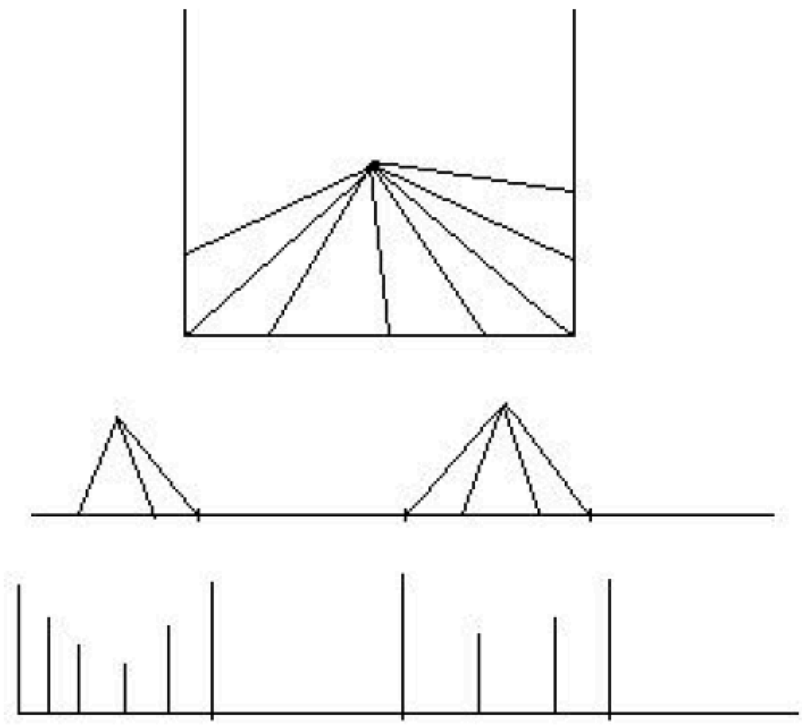

Figure 2 – Dessins proposés par les élèves

Exemple 2

Dans un récipient de forme cylindrique, un robinet débite régulièrement de l'eau (1 litre par seconde). Représentez par un dessin la variation du niveau de l'eau dans le récipient, quand le temps s'écoule à partir du moment où on ouvre le robinet.

On suppose maintenant que le récipient est formé de trois cylindres superposés (voir figure 3). Décrivez encore par un dessin la variation du niveau de l'eau.

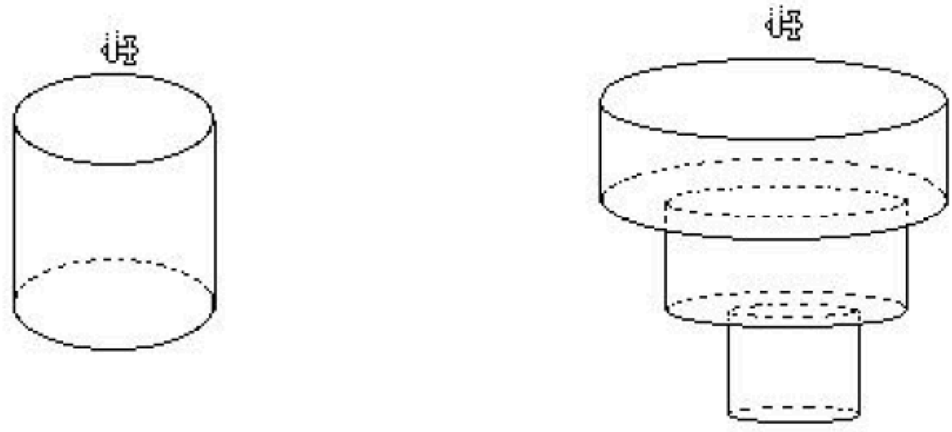

Figure 3 – Un récipient de forme cylindrique, puis un récipient formé de trois cylindres superposés

On a donc une approche d'abord qualitative. En troisième, on peut passer au modèle linéaire pour l'eau dans le cylindre, puis dans la deuxième forme de récipient. En première ou terminale, le cas d'un récipient en forme de tronc de cône la pointe en bas va fournir un graphe en racine cubique du temps, en réinvestissant la dérivée et la primitive pour calculer le volume (on y reviendra).

De façon générale, il est essentiel de lier l'étude des graphes associés aux fonctions affines $y = a\,x + b$ à la description de variations de grandeurs à accroissements proportionnels. Cela donne en particulier un point de vue plus opérationnel pour associer la pente d'une droite à une vitesse, un débit, une intensité, etc.

(b) La notion d'intégrale enseignée en terminale S ou en première année d'université est très mal comprise par les élèves ou les étudiants.

Une étude faite à Lille a montré qu'à peine 12% des étudiants en fin de L1 savaient réinvestir l'intégrale pour mesurer une grandeur produit, quand l'un des facteurs est variable (une fonction non constante). L'idée d'une *procédure intégrale* très générale (commune aux mathématiques et à la physique) :

découper, encadrer, sommer, passer à la limite

n'est absolument pas comprise, or elle est essentielle pour comprendre l'intégrale et savoir l'utiliser dans les sciences, concurremment avec une procédure dérivée-primitive dite aussi *procédure de l'accroissement différentiel*

$$F(x + h) - F(x) = f(x)\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Voici une situation (due à D. Grenier, M. Legrand, F. Richard) qui est destinée à construire à la fois les intégrales des physiciens et celles des mathématiciens (situation très robuste souvent utilisée). Pour des précisions, voir (Legrand 1990) et (Rogalski 2001).

Quelle est la force d'attraction *F* entre une barre fine de 18 kg et 6 m de long et une masse ponctuelle de 2 kg située dans le prolongement de la barre, à 3 m ? On rappelle la loi de l'attraction universelle entre deux masses ponctuelles m et m', à distance r : $F = G\, m\, m' / r^2$.

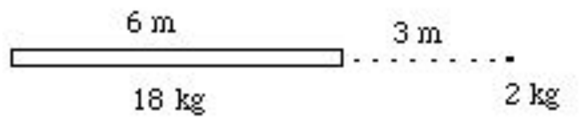

Figure 4 – Une barre fine de 18 kg et 6 m de long et une masse ponctuelle de 2 kg, située à 3 m.

Pour peu qu'on laisse travailler et interagir les étudiants, débattre du problème, on voit apparaître les étapes suivantes (avec plus ou moins d'interventions de l'enseignant selon l'organisation didactique du travail) :

- Principe du centre de gravité ⇒ $F = G$ (on concentre toute la masse au centre) ;
- Découpage de la barre en 2 et même principe, addition ⇒ $F \approx 1{,}21G$, résultat différent ;
- Découpage en 6 ⇒ $F \approx 1{,}32G$;
- Principe d'encadrement : concentrer la masse d'un segment de la barre à l'un et à l'autre de ses bouts ⇒ $4/9\, G < F < 4\, G$, puis $0{,}72\, G < F < 2{,}5\, G$, puis (pour 6 morceaux) $1{,}07\, G < F < 1{,}66\, G$…

Donc, par *découpage*, *sommation* et *encadrement*, on voit des résultats successifs, qu'on peut mener bien plus loin par un petit algorithme et un tableur.

L'idée de passage à la limite s'impose alors… c'est la *procédure intégrale*.

On peut alors décontextualiser la procédure utilisée dans le cas de la barre par la situation générale en physique, la mesure des grandeurs-produits. Dans des situations simples, des grandeurs-produits (ou quotients selon le point de vue) sont définies ainsi (voir Rogalski 2001) :

- densité constante × volume = masse ;
- hauteur constante × longueur de la base = aire ;
- hauteur constante × aire de la base = volume ;
- vitesse constante × temps = distance parcourue ;
- force constante × déplacement (colinéaire) = travail ;
- pression constante × surface = force ;
- (distance constante à un axe)^2× masse ponctuelle = moment d'inertie ;
- (inverse de la distance constante)^2 × produit des masses ponctuelles = attraction.

Généralisons maintenant ces situations. Les deuxièmes facteurs sont associés à des domaines » Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, supposés maintenant être des fonctions f non constantes : densité en un point d'un volume Ω, hauteur au-dessus d'un point de la base Ω, pression en un point d'une surface Ω, distance d'un point de Ω à l'axe, etc.

De plus on peut définir la mesure $m(A)$ d'une partie A de Ω, ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω.

A quelles conditions peut-on mesurer, ou même définir, une grandeur $I(\Omega, f, m)$ ou $\int_\Omega f dm$ attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω, la fonction f définie sur ce domaine et la mesure m ?

On est amené à dégager les trois principes suivants, dont les sens sont clairs dès qu'on pense aux problèmes physiques associés :

(1) Si $f = C$ (constante), $I(\Omega, f, m) = C \times m(\Omega)$.

(2) L'additivité par rapport au domaine (la relation de Chasles).

(3) La croissance : si $f \leq g$, $I(\Omega, f, m) \leq I(\Omega, g, m)$.

Pour mesurer une grandeur de la forme $I(\Omega, f, m)$vérifiant ces trois principes, on fait comme avec la barre : on découpe Ω en morceaux Ω_i , on encadre f sur chaque morceau entre m_i et M_i , puis par sommation on encadre la mesure cherchée par des sommes inférieures et supérieures $\sum m_i\, m(\Omega_i)$ et $\sum M_i\, m(\Omega_i)$, et enfin on essaye de passer à la limite.

On aboutit ainsi à une notion physique d'intégrale, utilisable pour mesurer des grandeurs, et qui va pouvoir servir de support de sens pour définir l'intégrale en mathématiques.

On a en fait intégré les « fonctions en escalier » $\sum \lambda_i 1_{\Omega_i}$ par $\sum \lambda_i m(\Omega_i)$. Et pour d'autres fonctions f ?

Il reste à définir la mesure $A \to m(A)$ de parties de Ω, puis à définir en quel sens on passe à la limite.

Deux choix sont naturels pour la première question :

(a1) Ω est un intervalle, les Ω_i aussi, et leur mesure est leur longueur (cas de la barre).

(a2) Les Ω_i sont les éléments d'une tribu, leur mesure est la mesure de Lebesgue.

Deux choix aussi s'imposent comme simples pour la deuxième question :

(b1) on approche f uniformément par des fonctions en escalier ;

(b2) l'approximation se fait au moyen de l'intégrale : on dit que l'intégrale d'une certaine fonction en escalier est petite.

Si on recoupe, cela donne *quatre théories mathématiques différentes de l'intégrale*.
Seules les combinaisons (a1b1) [intégrale des fonctions réglées] et (a1b2) [intégrale de Darboux-Riemann] sont raisonnables en L1-L2 (les deux autres combinaisons donnent l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées et l'intégrale de Lebesgue générale).

Reste à voir comment cela se raccroche à l'intégrale de terminale S [aire sous la courbe].

Voici deux autres situations de modélisation aptes à faire ce lien.

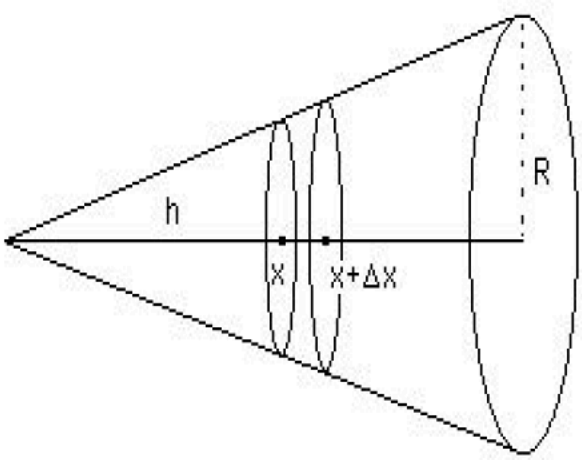

Figure 5 – Volume d'un tronc de cône de révolution

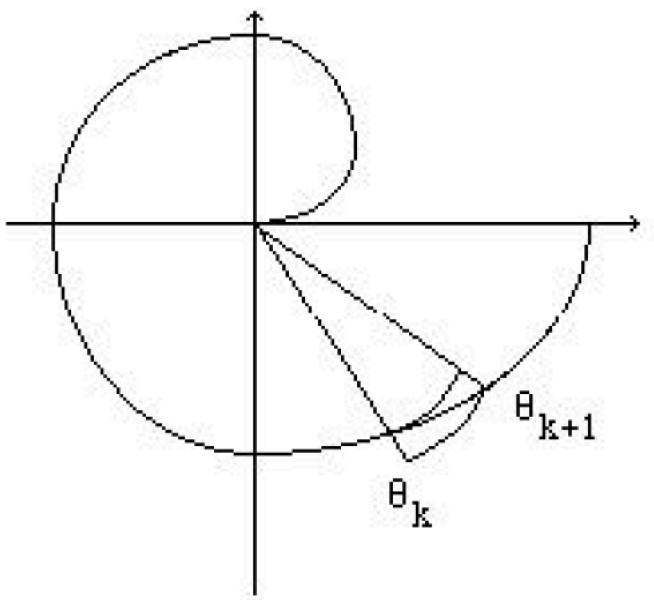

Figure 6 – Aire de la spirale d'Archimède $\rho = C\ \theta$ en coordonnées polaires

Dans les deux cas la procédure intégrale fait intervenir les sommes $\sum_{1\le i\le n} k^2$ et cela amène à l'aire sous le graphe de la fonction $x \to x^2$.

De même, si on note $V(x)$ le volume du tronc de cône entre les abscisses 0 et x, l'encadrement montre que $V(x+\Delta x) - V(x) = \mu x^2 \Delta x + o(\Delta x)$, et le calcul de V se ramène à une *recherche de primitive*. Ceci marche aussi pour la spirale.

Cette méthode de *l'accroissement différentiel* peut se faire dans de nombreuses situations, voici par exemple, résumée par un dessin, celle du calcul de la force exercée sur un barrage vertical plan par l'eau qu'il retient, dans (Rogalski 2001).

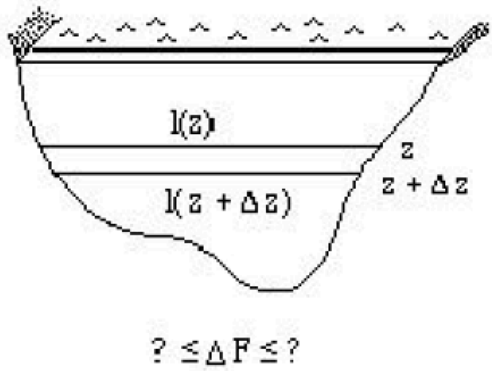

Figure 7 – Calcul de la force exercée sur un barrage vertical plan par l'eau qu'il retient

En tout cas, ce type de modélisation introduit à une double émergence de l'intégrale, à la fois en physique et en mathématiques.

Ainsi, dès qu'on pratique une modélisation à un certain niveau, on est loin des diagrammes circulaires qu'on présente souvent dans les textes décrivant ce type d'actions, avec des modélisations séparées dans les deux disciplines et des allers-retours entre les deux (voir par exemple (Kuzniak et Vivier 2011)).

En fait, les scientifiques font déjà des mathématiques dans leurs modélisations intradisciplinaires, et la mathématisation utilise à plein des concepts de la discipline d'où provient le problème à modéliser, surtout quand il s'agit de physique.

De plus, l'étude du côté mathématique peut éclairer les lois physiques cherchées, de façon constitutive, pas seulement pour calculer. Nous y reviendrons.

Quelques difficultés de la modélisation de phénomènes physiques : exemples, modélisation et modes de pensée

(a) D'abord, la physique est difficile

Il s'y présente beaucoup d'obstacles épistémologiques dus au fait que la pensée quotidienne se forge au contact d'un monde réel simplifié par rapport à la physique, mais est souvent quand même efficace [force et mouvement, par exemple…]. Les didacticiens de la physique ont particulièrement étudié ce phénomène et ses implications didactiques. Les dessins qui suivent (figure 8) illustrent ces difficultés par quelques situations.

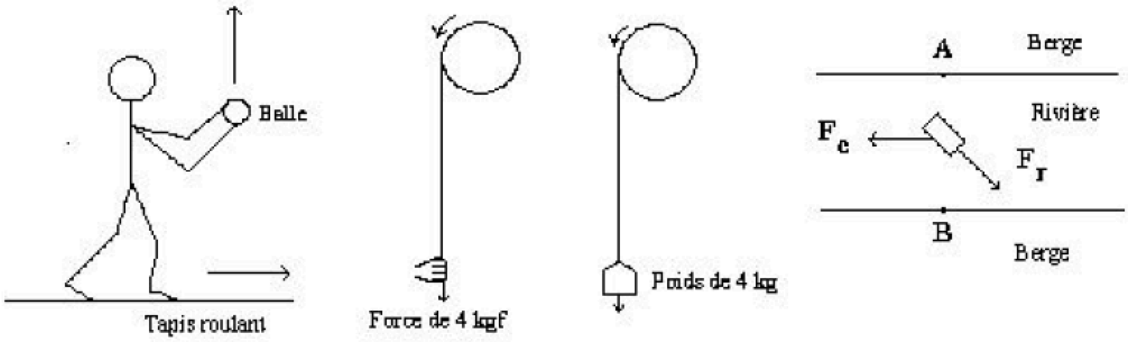

Figure 8

La première figure illustre la difficulté du concept d'inertie : nombreuses sont les personnes qui pensent que la balle jetée en l'air retombe derrière le lanceur (même si on est sur la lune !).

La deuxième figure, accompagnée de la question « si on débloque les deux poulies au même instant, quelle est celle qui tourne le plus vite au bout de quelques secondes ? », illustre les difficultés de la mécanique (la réponse « même vitesse » est fréquente).

La troisième figure est tirée d'un manuel de mathématiques dont les auteurs ont voulu appliquer les recommandations des programmes de 2002 de « faire de l'interdisciplinaire », à l'occasion de la somme de vecteurs (question : « dans quel sens ramer pour que, malgré le courant, on aille de A en B ? ») ; malheureusement ils ont confondu composition des vitesses et addition des forces, en oubliant de plus la résistance de l'eau (sinon le mouvement est uniformément accéléré !).

Un autre exemple classique est, ayant dessiné la trajectoire parabolique d'une pierre jetée en l'air, de demander de dessiner en divers points de la parabole la force s'exerçant sur la pierre. Des réponses fréquentes la représentent colinéaire à la vitesse !

(b) Puis il y a parfois dans les manuels de physique des modélisations parachutées… et contradictoires.

Par exemple, on trouve dans un même manuel, à deux pages de distance, d'une part une modélisation de la chute des corps dans l'air avec une *résistance proportionnelle à la vitesse* : $R = kV$, et d'autre part une modélisation de la course d'un bateau sur son erre avec une *résistance proportionnelle au carré de la vitesse* : $R = k\,V^2$. Et dans ce dernier cas le bateau va à l'infini ! On ne trouve dans ce manuel aucune discussion sur les hypothèses de validité de ces deux modélisations, contradictoires et, pour la dernière, contraire à la réalité (un bateau sur son erre finit par s'arrêter).

Et si on essayait le rasoir d'Ockham ? Courbe concave (freinage) à asymptote horizontale (le bateau s'arrête), passant par (0,0). La plus simple est : $y = a\,t\,/\,(t + b)$. Après des calculs simples du niveau terminale, ceci donne $R = k\,V^{3/2}$! Donc une loi physique inconnue peut être fournie par la modélisation mathématique.

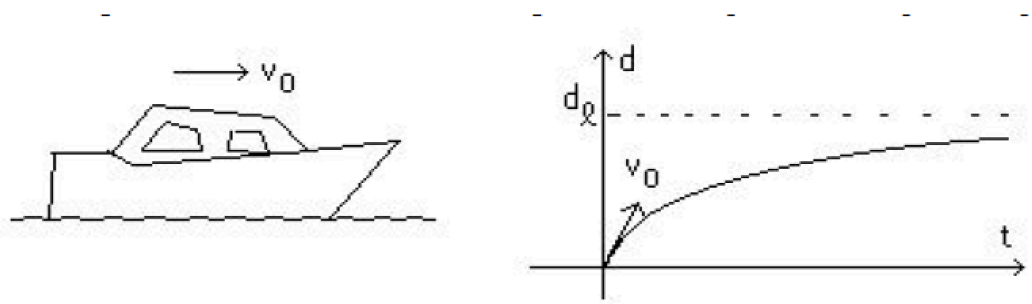

Figure 9

En fait, le problème est plus complexe, les hypothèses sur la nature de la résistance sont différentes en vitesse faible ou forte (et c'est parce que V^2 est très petit quand V est petit que le bateau ne s'arrête pas). Mais, surtout, *modéliser sans discuter ces hypothèses est absurde*.

(c) Voici un autre exemple où les mathématiques semblent faire découvrir un phénomène imprévu : le pendule en rotation

En écrivant l'équation de l'équilibre, et en remarquant que x doit être inférieur à sa longueur l, on voit que le pendule ne s'écarte que si la vitesse de rotation ω est supérieure à un seuil de valeur $\omega_0 = (g / l)^{1/2}$. D'où une courbe décrivant la variation de x en fonction de ω.

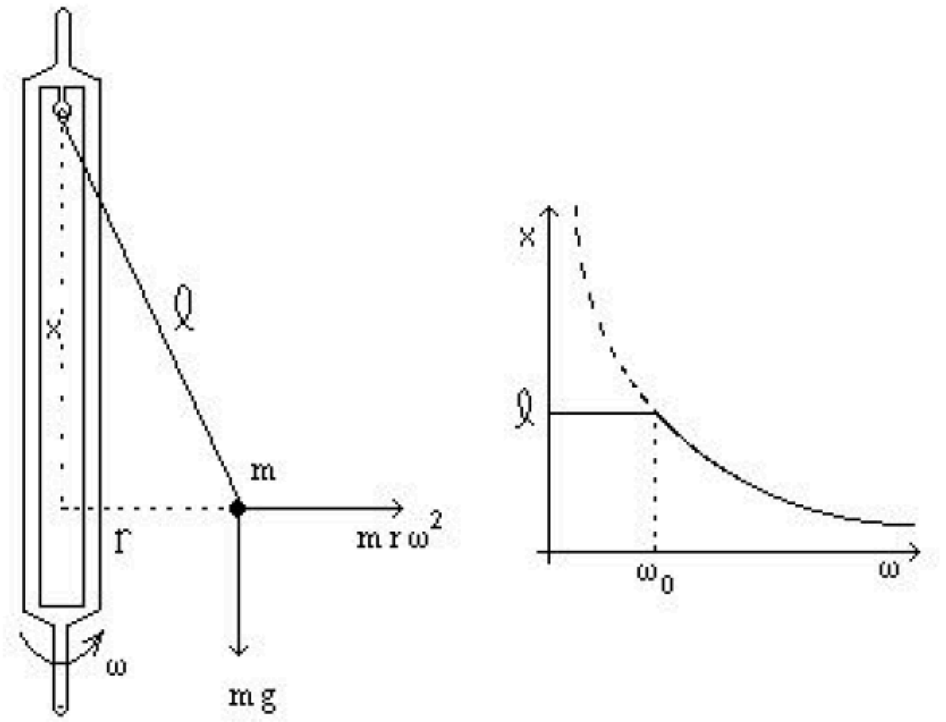

Figure 10 – Le pendule en rotation

Mais il s'agit d'une « vue de l'esprit mathématique », coupée de la réalité ! D'abord, si la situation de départ était bien symétrique, l'immobilité serait théoriquement possible, quelle que soit la vitesse de rotation, et seule l'instabilité de cette position d'équilibre peut expliquer que le pendule s'écarte d'un certain côté, par un infime décentrage. Mais il y a plus : si effectivement on suppose un décentrage du point d'attache de $\varepsilon > 0$ par rapport à l'axe de rotation, le calcul montre que l'effet « seuil » de la modélisation précédente est inexistant : quel que soit ω aussi petit qu'on veut, le pendule s'écarte de la position verticale !

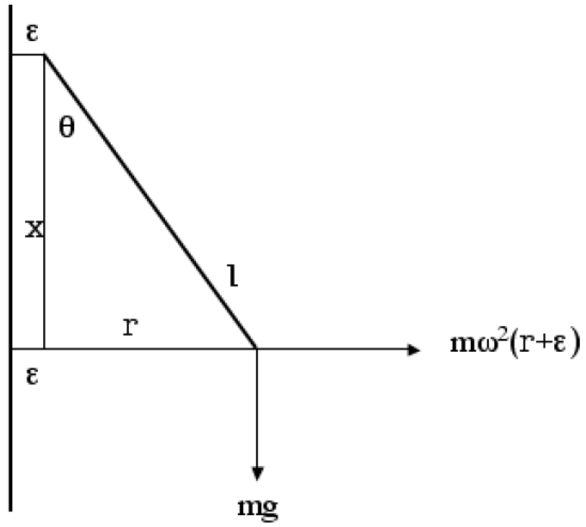

Figure 11

On obtient, en prenant comme variable l'angle θ du pendule avec la verticale, la relation $\omega^2 = g \tan\theta / (\varepsilon + l \sin\theta)$.

Pour $\omega = \omega_0$, on trouve $\theta = 7{,}3$ degrés environ (en prenant, pour la longueur du pendule $l = 1$m, pour le décentrage $\varepsilon = 1$mm, et pour l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m/s^2), ce qui n'est pas négligeable : il n'y a pas de seuil !

(d) Et si les mathématiques donnent apparemment une absurdité ?

Si un vase se vide par un petit trou… La vitesse de sortie est $v = (2\,g\,h)^{1/2}$ (énergies cinétique et potentielle), d'où l'équation différentielle $h' = -\,k\,h^{1/2}$, qui peut se résoudre en terminale par une primitive de $h'/2h^{1/2}$. On trouve une parabole, et le vase se remplit tout seul après s'être vidé !!

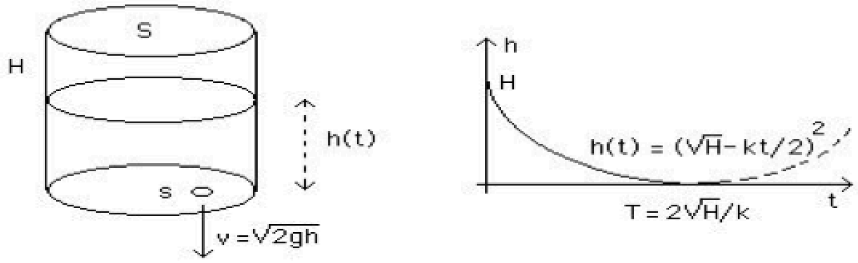

Figure 12 – Si un vase se vide par un petit trou…

Il est donc *indispensable de réfléchir à la concordance des solutions mathématiques et des solutions physiques*, ce qui ne va pas toujours de soi, et qui demande parfois certains raffinements mathématiques, ici : pour $h = 0$, l'équation différentielle n'est plus localement lipschitzienne, et la demi-parabole décroissante continuée par 0 est une solution mathématique, et c'est la solution physique. Cela demande d'avoir en tête la condition de Cauchy-Lipschitz sur l'unicité des solutions des équations différentielles…

(e) Mathématiques et physiques : deux modes de pensée parfois différents

Voici un exercice proposé parfois par des étudiants préparant le CAPES : « retrouver l'aire du disque en intégrant l'aire d'une mince couronne ».

Mais… quand on écrit $\Delta S \approx 2\,\pi\, r\, \Delta r$, que signifie ce signe d'approximation ? Quelle est l'erreur ? Pour conclure que $dS / dr = 2\,\pi\, r$, que doit-on supposer sur l'approximation ? Que l'erreur soit négligeable devant Δr (erreur relative et non seulement absolue).

Les physiciens vérifient rarement ce point, ils font confiance à leur intuition et leur expérience.

Du point de vue mathématique, cela signifie qu'on fait une hypothèse, qu'on en déduit un résultat ($\pi\, r^2$) et qu'il conforte l'hypothèse faite : $\pi\,(r + \Delta r)^2 - \pi\, r^2 = 2\,\pi\, r\, \Delta r + \pi\,(\Delta r)^2$, ce dernier terme est bien $o(\Delta r)$.

Un tel raisonnement est irrecevable pour les mathématiques ! Mais il est très courant et très efficace en physique, dans la procédure de l'accroissement différentiel : si une grandeur y dépend d'une autre x, on essaye d'évaluer Δy quand x varie de Δx. Les physiciens trouvent $\Delta y \approx f(x,y)\, \Delta x$ et en déduisent l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ [si f ne dépend que de x, ils trouvent $y' = f(x)$ et intègrent].

Les mathématiciens veulent démontrer, eux, que l'on a $\Delta y = f(x,y)\, \Delta x + o(\Delta x)$, ou directement que $\Delta y / \Delta x$ a une limite $f(x,y)$ quand $\Delta x \to 0$.

Dans le cas du disque, c'est difficile : cela utilise des majorations et minorations, et la limite en 0 de $\sin x / x$.

Le concept mathématique en jeu ici est celui d'approximation affine locale, ou de dérivée : $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\, \Delta x + r(x, \Delta x)$ où le reste r est négligeable devant Δx : $r = o(\Delta x)$.

Cela signifie que c'est l'erreur relative (de méthode) commise en supposant *f* affine (et non seulement l'erreur absolue) qui tend vers 0 avec Δx.

Voici un problème qu'on peut donner pour convaincre les élèves : calculer *sin*(46°) « à la main ». Un amphi unanime peut affirmer que dire que $sinx \approx x$ au voisinage de 0 signifie que $sinx = x + \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$ quand $x \to 0$. Convaincre les élèves que ce n'est pas cela la bonne formulation n'est pas simple, mais on y arrive en leur soumettant diverses valeurs à discuter pour ε : $3x$, $x^{1/2}$, $x / 7$, x^2…etc.

Reste qu'il est inutile de chercher des exemples réels où les modes de raisonnement de la physique utilisant des hypothèses *a priori* non prouvées donneraient des résultats catastrophiques : il semble bien que ces raisonnements sont trop efficaces au niveau de la physique élémentaire (macroscopique et continue) pour être mis en défaut expérimentalement. C'est donc seulement leur confrontation avec les canons des mathématiques qu'il faut discuter avec les élèves ou les étudiants.

(f) Pourquoi, comment donc modéliser en classe ?

Plusieurs points semblent se dégager au vu des exemples étudiés, et de nombreux autres.

(1) Mettre le plus possible en évidence les hypothèses physiques (ou d'autres disciplines) faites dans la modélisation, et avoir une attitude critique devant des modèles parachutés sans explicitation des hypothèses faites ni des domaines de validité.

(2) Introduire à une co-construction de concepts dans quelques cas. Nous avons vu l'exemple de l'intégrale, il y en a d'autres, par exemple pour introduire la fonction exponentielle en terminale S, on peut étudier le problème suivant de « dilution du sel » :

« Un récipient contient 100 litres d'eau dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Un robinet débite dans le récipient 10 litres d'eau pure à la minute, tandis qu'une vidange du mélange de 10 litres par minute à lieu. Au bout d'une heure, combien de sel reste-t-il dans le récipient ? ». (figure 13)

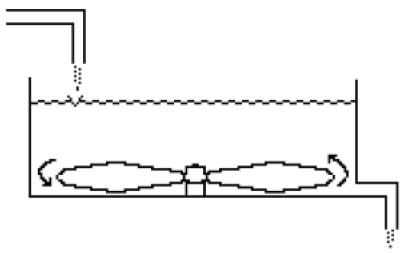

Figure 13

Pour des détails, voir (Magnin et Rogalski 2011).

(3) Expliciter auprès des élèves ou des étudiants les différences de paradigmes entre mathématiques et physique.

(4) Exploiter ces différences pour mettre en valeur les concepts mathématiques utiles et les procédures mathématiques permettant de prouver (quand c'est possible) des arguments implicites de la physique (valorisant ainsi des activités essentielles de

l'analyse mathématique : encadrements, continuité, raisonnement à ε près, dérivée, concept de négligeabilité, intégrale…). Voir à ce propos (Rogalski 2006).

(5) Analyser et expliquer des phénomènes de la réalité sociale, pour développer l'aptitude des élèves à utiliser leur sens critique et leurs capacités à voir quand une utilisation des mathématiques est nécessaire pour aider à la décision dans certaines questions. Par exemple, les questions de risque sont difficiles, souvent le bon sens n'y suffit pas. Un exemple intéressant est la question de savoir si, lors de la crise de la vache folle, il fallait ou pas tester l'ensemble du cheptel bovin et abattre tous les animaux détectés atteints (questions de fiabilité des tests, de l'importance ou non du « massacre » que cela aurait engendré, etc… toutes questions ne pouvant se régler que par un calcul des probabilités un peu subtil mais faisable en terminale).

(6) *Ne pas « apprendre à modéliser » en soi*. C'est là une question importante. Autant il nous semble qu'il faut absolument développer des activités de modélisation en classe de mathématiques (à la fois pour leur objectif social et pour mieux comprendre certaines parties des mathématiques), autant le but (et le temps et les moyens ne le permettraient d'ailleurs pas) ne peut être de transformer nos élèves en « petits modélisateurs », dominant les techniques et les méthodes générales de modélisation. Cela sera nécessaire dans certaines études menant à certaines professions scientifiques, mais ce serait prématuré et impossible avant le niveau universitaire.

Modélisation et formation des maîtres

Sur ce point, pourtant essentiel, nous serons assez bref, en énumérant seulement quelques points.

(1) Le principal problème est l'*inculture physique des étudiants de mathématiques arrivant en M1*. Il semble nécessaire de leur apporter des compléments portant sur quelques concepts physiques essentiels, en particulier en mécanique. Notons que le problème semble aussi grave pour les enseignants de physique, au point de mettre en cause l'injonction d'enseigner la physique par des activités dites « d'enquête ».

(2) Le deuxième problème est *l'inadéquation des nouveaux programmes du lycée, en mathématiques et surtout en physique, à l'établissement de liens didactiques entre les deux disciplines*. Alors que les programmes de 2002 insistaient sur la coordination des concepts des deux disciplines, en particulier au moyen des modes de description de phénomènes évolutifs (Radioactivité 2002), les nouveaux programmes de physique se révèlent être qualitatifs, relevant de la vulgarisation, et les programmes de mathématiques se voient amputés des parties qui anciennement permettaient d'étudier des problèmes physiques : équations différentielles, techniques élémentaires de calcul intégral, certaines fonctions élémentaires, transformations de base utiles à l'étude des mouvements en physique (telle que la rotation).

(3) Supposant ces problèmes réglés un jour (!), on peut imaginer de *faire traiter* par les enseignants en formation de *nombreuses activités de modélisation*, sous la forme de travail en petits groupes ou de séminaire (voir par exemple ce qui est organisé dans le cadre du « master pro » de l'université Paris 7, destiné aux formateurs ; voir aussi, (Artigue 1989) et (Greco 1989)). Ce type d'activité est, bien sûr, à coordonner avec le premier point, et avec l'approfondissement des méthodes de l'analyse mathématique.

PETITE BIBLIOGRAPHIE

Artigue M., 1989, *Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, vol 2, 173-190.

CNP, 2002, *Radioactivité*, Accompagnement des programmes, physique, mathématiques, sciences de la vie et de la Terre (terminale S).

Greco,1989, *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport du GRECO du CNRS : "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques", groupe mathématiques et physique-enseignement supérieur ; document IREM Paris 7 et LDPES.

Kuzniak A. et Vivier L., coord., 2011, La modélisation dans l'enseignement des mathématiques - Mise en perspective critique. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz (recherche), n° 3.

Legrand M., 1990, *Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale*, dans "Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année", brochure de la Com¬mission Inter-IREM Université, Irem de Paris - Diderot.

Robert C. et Treiner J., *Une double émergence*, bulletin de l'APMEP n° 453, octobre 2004.

Magnin N. et Rogalski M., 2011, *Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S, mise en œuvre dans la classe*, bulletin de l'APMEP n°492 , p. 17-29.

Rogalski M. et *al*., 2001, Carrefours entre analyse algèbre géométrie, Ellipses.

Rogalski M. 2006, *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères IREM n° 64.