PROBLEMES D'OPTIMISATION (*MATH & MANIPS*)

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Sylvie Vansimpsen, Patricia Van Geet, Isabelle Wettendorff

Résumé – L'atelier présente une séquence d'introduction à l'optimisation intégrant des manipulations de courte durée qui visent à améliorer la perception des enjeux des problèmes posés. Différents aspects de l'optimisation sont abordés progressivement : choix des variables, expression des contraintes puis recherche de la valeur optimale à l'aide de différents outils (tableaux de valeurs, graphiques, dérivées). La phase de modélisation sera mise en exergue lors de chacune des activités.

Introduction

Le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique) finalise actuellement une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par le recours à des manipulations effectuées par les élèves. Nous appelons *Math & Manips* les séquences d'apprentissage conçues, expérimentées et mises au point au cours de ce travail. Plusieurs d'entre elles ont déjà été présentées lors des précédents colloques de la CORFEM (2011 et 2012). Nous présentons ici des *Math & Manips* pour les élèves de lycée sur l'optimisation, en rendant compte des réactions d'élèves les plus significatives.

Cet atelier propose quatre problèmes d'optimisation de difficultés croissantes. Pour chacun d'eux, une manipulation de courte durée permet de mieux percevoir quels sont les enjeux d'un tel type de problème. À chaque fois, le contexte est géométrique, il s'agit de construire un solide de volume maximum, à partir d'une feuille de papier, en tenant compte de certaines contraintes. Chacun de ces problèmes a été choisi pour faire apparaître une difficulté spécifique, faire naître une réflexion, susciter une discussion. Dans une séquence sur l'optimisation, l'idéal serait de les incorporer entre d'autres exercices issus de contextes complètement différents.

Dans les trois premiers problèmes, accessibles aux élèves de toutes les sections, il s'agit de construire une boîte parallélépipédique de volume maximum à partir d'un développement particulier découpé dans une feuille de papier de format A4. Le dernier problème est plutôt destiné aux élèves des sections scientifiques. Il a pour objet la construction d'un cône de volume maximum à partir d'une feuille circulaire dont on retire un secteur.

Discuter de ces problèmes, de la spécificité de chacun d'eux, des difficultés propres à la modélisation ainsi que des facteurs qui influencent l'activité des élèves nous semble tout à fait indiqué en formation initiale.

Lors de l'atelier, vu le temps consacré aux discussions sur l'aspect modélisation du premier problème, il n'a pas été possible de présenter les quatre activités dans leur intégralité. Pour en savoir davantage, nous vous invitons à consulter le rapport de la recherche *Math & Manips*, accessible sur le site du CREM (www.crem.be) dès octobre 2013.

La boîte sans couvercle

Cette première séquence ne s'adresse pas nécessairement à des élèves qui maîtrisent l'outil dérivée mais peut servir à l'introduire et à en montrer la pertinence. Elle commence par une phase exploratoire qui permet de découvrir le contexte du problème d'optimisation visé. À partir de feuilles de papier de format A4, il est demandé de découper un carré dans chacun des coins pour construire une boîte parallélépipédique sans couvercle et d'en calculer le volume. La phase suivante permettra de découvrir comment construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Ce problème, très classique, se trouve dans de nombreux manuels, assorti d'un schéma, voire d'un dessin en perspective de la boîte et, bien souvent, la longueur du côté du carré découpé est déjà notée x sur la figure. La question est du type « Quelle est la longueur du côté du carré qu'il faut découper pour obtenir la boîte de volume maximal ? ». Ainsi formulé, le problème élude complètement la phase de modélisation, de nombreux élèves ne voient pas comment la boîte est construite, n'imaginent pas la diversité des boîtes qu'on peut obtenir et n'ont pas idée de l'allure de la fonction qui donne le volume. Pour ces élèves, la question de trouver la boîte de volume maximal est vide de sens. C'est pourquoi nous avons choisi de recourir à la manipulation car elle replace le problème dans le monde sensible et oblige à modéliser pour le résoudre.

Lors de la première phase d'exploration, les élèves remarquent facilement que la longueur du côté du carré découpé correspond à la hauteur de la boîte. Pour calculer le volume, certains procèdent d'abord à la mesure des grandeurs nécessaires, d'autres les déduisent de la longueur du côté du carré découpé.

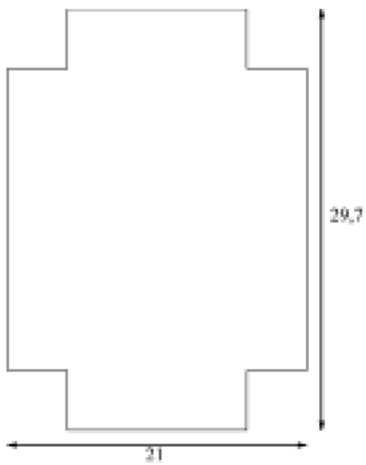

Figure 1– Schéma

Le schéma de la situation (figure 1), réalisé collectivement si nécessaire, sera utile aux élèves qui n'auraient pas remarqué que la largeur et la longueur de cette boîte valent respectivement 21 cm et 29,7 cm diminués du double de la hauteur.

Suite à la découverte de boîtes très diverses et de leurs différents volumes, une première idée est de classer les résultats obtenus dans un tableau.

La longueur du côté du carré découpé s'impose assez naturellement comme la variable, notée x, en fonction de laquelle les élèves expriment les dimensions de la boîte et son volume (figure 2).

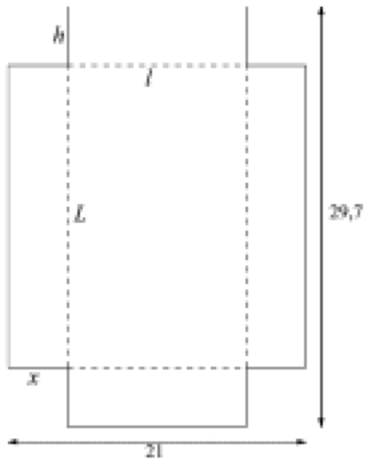

Figure 2 – Modélisation

On obtient alors les relations $h = x$, $\ell = 21 - 2x$, $L = 29{,}7 - 2x$ qui fournissent respectivement les expressions de la hauteur, de la largeur et de la longueur ; le volume V est alors donné par la formule $V = h \cdot \ell \cdot L$.

Dans les classes, certains élèves ont commencé par découper un carré de 1 cm de côté, ont noté le volume de la boîte, puis dans la même feuille ont découpé un carré de 2 cm de côté et ainsi de suite. Ils augmentent ainsi le nombre de boîtes examinées sans consommer plus de papier.

Le tableau 1 se construit en répertoriant les résultats des élèves par ordre croissant de la longueur du côté du carré découpé.

Après avoir entendu les quatre premiers résultats, une élève a pensé qu'elle s'était trompée dans le calcul du volume de la boîte qu'elle avait construite en découpant un carré de 6 cm de côté. Elle avait obtenu 955,8 cm³ et était persuadée que les mesures de volume allaient en augmentant. Dans une autre classe, une élève – également persuadée que le volume était fonction croissante de x – voulait découper un carré de 10,5 cm de côté. Il a fallu lui demander de construire la boîte pour qu'elle se rende compte de ce qui se passait.

L'impression que le volume augmente sans cesse reste souvent très prégnante, ce qui entrave généralement une vraie compréhension du principe de l'optimisation au profit de l'application de techniques calculatoires. Dès qu'on regarde ce qu'il advient lorsqu'on découpe un carré plus grand, cette impression est mise en défaut.

côté du carré en cm x	hauteur en cm $h = x$	largeur en cm $\ell = 21 - 2x$	longueur en cm $L = 29{,}7 - 2x$	volume en cm³ $V = h \cdot \ell \cdot L$
1	1	19	27,7	526,3
2	2	17	25,7	873,8
3	3	15	23,7	1066,5
4	4	13	21,7	1128,4
5	5	11	19,7	1083,5
6	6	9	17,7	955,8
7	7	7	15,7	769,3
8	8	5	13,7	548
9	9	3	11,7	315,9
10	10	1	9,7	97

Tableau 1 – Relevés des dimensions et du volume des boîtes des élèves

À la lecture du tableau, les élèves peuvent être tentés de conclure que la solution consiste à découper un carré de 4 cm de côté.

Si des élèves cherchent à regarder de plus près ce qui se passe entre $x = 3$ et $x = 5$, l'usage d'un tableur permet d'examiner sans trop de peine les valeurs du volume pour x variant entre 3 et 5 par pas de 1 mm. Là encore, c'est pour $x = 4$ cm qu'on obtient le plus grand volume.

Les élèves pourraient également se tourner vers une représentation graphique des résultats. Celle-ci permet de se rendre compte que l'optimum demandé est maximum d'une fonction $V(x) = x\,(21 - 2x)\,(29{,}7 - 2x)$ dont voici le graphique réalisé avec un logiciel de dessin après un changement d'unité sur l'axe Oy (figure 3).

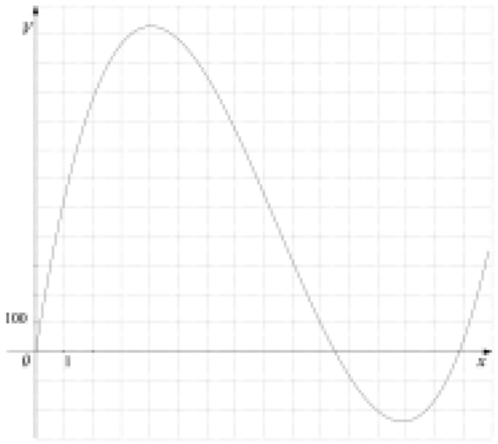

Figure 3 – Graphique de V(x)

Remarquons que ce changement d'unités masque les différences d'ordonnées près du point d'abscisse 4 et que la lecture du graphique semble encore donner raison aux élèves qui pensent que la solution consiste à découper un carré de 4 cm de côté, solution très satisfaisante en pratique. Remarquons également que, pour le problème qui nous occupe, seules les valeurs d'abscisses comprises entre 0 et 10,5 cm sont prises en compte.

Le professeur invite alors les élèves à regarder de plus près ce qui se passe en $x = 4$ grâce à un zoom sur le graphique de la fonction dans un voisinage de cette valeur (figure 4).

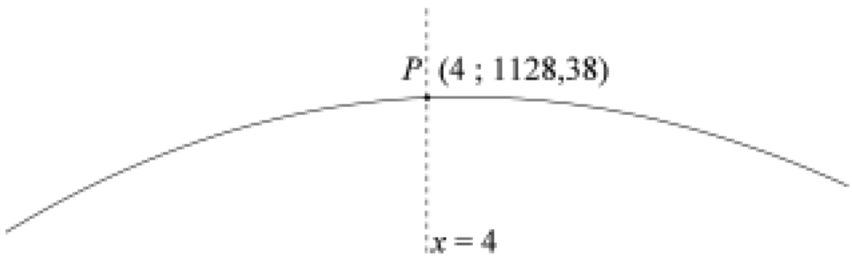

Figure 4 – Allure de V(x) au voisinage du point d'abscisse 4

Même si les différences d'ordonnées entre les points de la fonction dans un voisinage de $x = 4$ sont imperceptibles, l'examen de cette figure suggère que la valeur maximale se trouve sur l'« axe de symétrie » approximatif de cette portion de courbe, donc un peu à droite de $x = 4$.

L'enseignant propose alors de tracer en plus la tangente en P et d'afficher son équation. La tangente, en un point d'une courbe, est introduite comme la droite passant par ce point et qui, localement, épouse au mieux la courbe.

La tangente en $x = 4$ a pour équation $y = 4{,}54\,x + 1110{,}23$ (ces calculs, ainsi que les suivants, sont effectués en arrondissant à deux décimales). Le fait qu'elle est croissante indique que le volume n'a pas fini d'augmenter quand on est en $x = 4$. Les élèves comprennent rapidement que la valeur maximum sera atteinte quand la tangente sera horizontale. Cela se produit au point de coordonnées (4,04 ; 1128,49), ce qui montre que, pour des valeurs arrondies à deux décimales, c'est en découpant un carré de 4,04 cm de côté qu'on obtiendra la boîte de volume maximum.

Si on revient au graphique global (figure 5), on perçoit très nettement la variation de la pente de la tangente entre $x = 4$ et $x = 4{,}04$ alors que la différence des ordonnées de ces deux points est imperceptible.

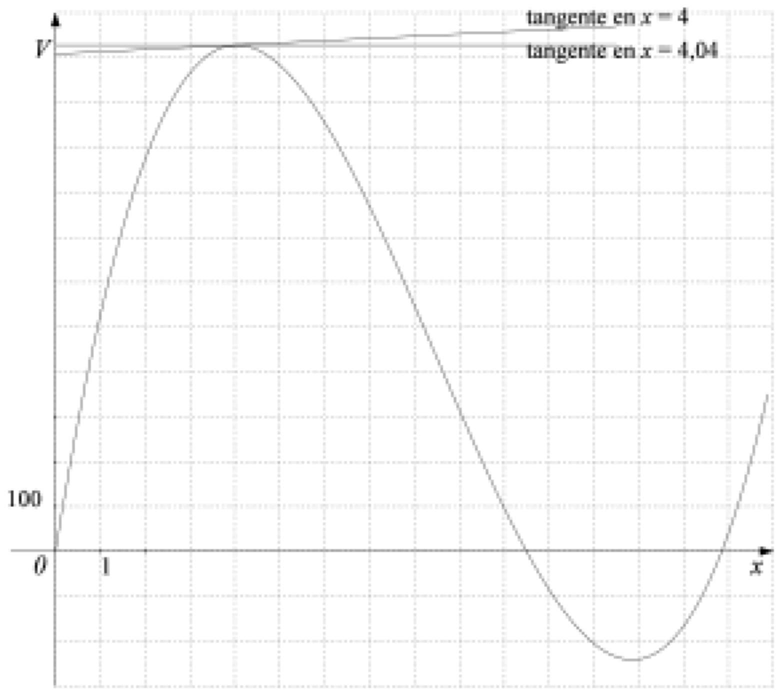

Figure 5 – Visualisation des tangentes

Les observations sur les tangentes dans ce dernier graphique donnent à l'enseignant un argument vraiment convaincant pour motiver l'intérêt d'étudier la pente de la tangente au graphique d'une fonction en chacun de ses points.

On crée ainsi à partir de cette pente un nouvel outil d'analyse de la croissance et de la décroissance d'une fonction, et donc un outil pour la recherche des extrema.

Si les élèves connaissent déjà la notion de dérivée, le passage par l'observation du graphique et de la pente de la tangente devrait faire le lien et renforcer l'idée que la dérivée en un point est la pente de la tangente à la courbe en ce point.

Le problème peut dès lors être résolu. La fonction $V(x)$ est une cubique dont l'expression analytique est $V(x) = 4\,x^3 - 101{,}4\,x^2 + 623{,}7\,x$. Sa dérivée $V'(x) = 12\,x^2 - 202{,}8\,x + 623{,}7$ s'annule en $x = 12{,}73$ et $x = 4{,}04$ (valeurs approchées à deux décimales). La valeur $x = 4{,}04$ fournit la valeur de x pour laquelle la fonction est maximum et correspond à la solution du problème tandis que la valeur $x = 12{,}73$, pour laquelle la fonction est minimum, n'a aucun sens dans le cadre du problème qui nous occupe.

Au cours de l'atelier, l'importance de l'étude de la fonction théorique par rapport au raffinement du tableau de valeurs a été soulignée à l'attention des futurs enseignants. Dans des situations « pathologiques », de grandes variations de la fonction étudiée pourraient être masquées au sein d'un tableau de valeurs particulières. Dans le même ordre d'idée, un zoom sur une partie du graphique de la fonction ne permet pas, dans certains cas de discontinuité ponctuelle de la fonction par exemple, de mieux situer un extremum s'il se trouve en dehors de la fenêtre du zoom. Notons cependant que, pour une fonction polynôme, ce genre de problème ne se produira pas.

Lors de l'atelier, il nous a également été suggéré d'examiner le cas de la « boîte du pâtissier » (Chappaz & Michon, 2003) qui nécessite le suivi d'un schéma de pliage sans découpe et la construction effective de la boîte pour en exprimer les dimensions à partir de la feuille rectangulaire dans laquelle elle est pliée. Si nous avons choisi le problème simple de la boîte sans couvercle pour introduire l'optimisation, c'est pour nous concentrer sur la nature de l'optimisation, sans éluder pour autant l'étape de modélisation.

La boîte parallélépipédique

En découpant symétriquement un rectangle de chaque côté d'une feuille carrée de 20 cm de côté, de façon à obtenir un T, comme le montre la figure 6, on peut obtenir le développement d'une boîte parallélépipédique fermée.

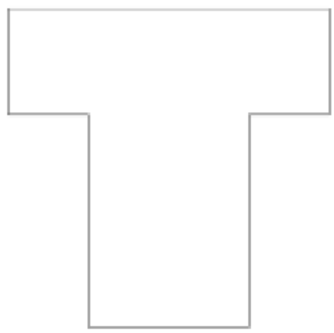

Figure 6 – Schéma du T

On demande de construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.

Cette fois, il semble qu'il y ait deux longueurs à choisir au moment du découpage, que l'on peut appeler x et y dans un premier temps.

En fonction de la facilité à voir dans l'espace, notamment de la capacité à imaginer une boîte à partir de son développement, une discussion s'engage d'emblée sur la possibilité de construire une boîte parallélépipédique fermée pour n'importe quelle valeur de x et de y, avec $0 < x < 10$ et $0 < y < 20$ si x représente la largeur du rectangle découpé sur la figure 7 et y sa longueur.

Certains ont besoin de tester un découpage « au hasard » pour se convaincre qu'il n'est pas toujours possible de refermer la boîte exactement.

Pour de nombreux élèves, la phase de modélisation est difficile, surtout l'expression des contraintes pour que la boîte soit constructible.

Lors des essais de construction, les élèves obtiennent des boîtes qui ne se referment pas exactement. Ainsi, si la longueur y du rectangle découpé est trop grande par rapport à sa largeur x, il y a un excès de papier (figure 7). Dans le cas contraire, il y a au moins une face incomplète (figures 8 et 9). Il se peut encore que la longueur y du rectangle découpé soit beaucoup trop petite par rapport à la largeur x, à tel point qu'il manque toute une face et une partie d'une autre (figures 10 et 11).


Figure 7 – Boîte avec excès de papier


Figure 8 – Développement d'une boîte avec une face incomplète

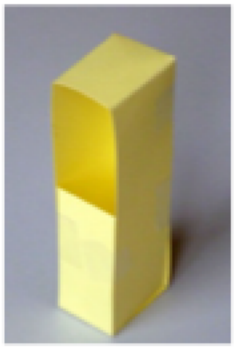
Figure 9 – Construction d'une boîte avec une face incomplète

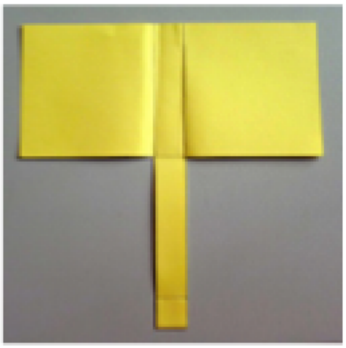
Figure 10 – Développement d'une boîte avec une face manquante et une face incomplète

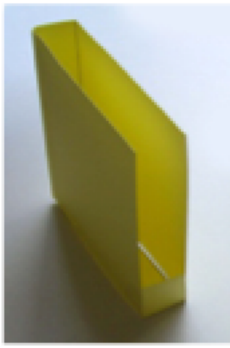
Figure 11 – Construction d'une boîte avec une face manquante et une face incomplète


Figure 12 – Visualisation des contraintes

Un cas particulier que des élèves auraient pu découvrir est celui de la boîte dont les quatre faces latérales sont identiques, ce qui conduit à une boîte avec deux faces carrées de 5 cm de côté.

Pour résoudre le problème, il est donc nécessaire de dessiner le développement d'un parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont x, l et L (figure 13).

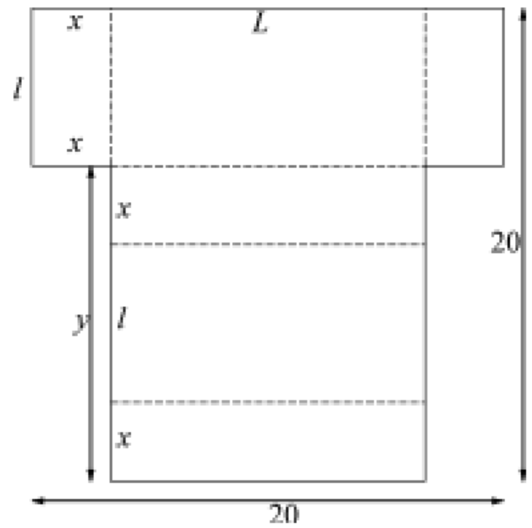

Figure 13 – Modélisation du développement en T

On voit alors clairement que

$$y = 2x + l$$

mais qu'il faut aussi exprimer que le développement est inscrit dans un carré de 20 cm de côté, ce qui donne

$$\begin{cases} 2x + 2l = 20 \\ 2x + L = 20. \end{cases}$$

En choisissant x comme variable indépendante, les dimensions de la boîte sont x pour la hauteur, $L = 20 - 2x$ et $l = 10 - x$ pour la longueur et la largeur de la base. On complète par $y = 10 + x$ pour obtenir les dimensions du rectangle à découper. La fonction volume qui vaut le produit des trois dimensions de la boîte est donnée par :

$$V(x) = x \cdot (10 - x) \cdot (20 - 2x) = 2x^3 - 40x^2 + 200x.$$

La fonction dérivée $V'(x) = 6x^2 - 80x + 200$ s'annule pour $x = 10$ ou $x = 10/3$. Il faut garder à l'esprit que, pour le problème traité, x doit être inférieur à 10 et restreindre l'étude de la fonction volume en conséquence. C'est la deuxième valeur de x qui donne la boîte de volume maximum (après vérification graphique par exemple). Le rectangle à découper est de dimensions $x = 10/3$ et $y = 40/3$. La solution $x = 10$, $y = 20$ fournit quant à elle la valeur minimum de la fonction $V(x)$, qui correspond à une boîte de volume nul puisqu'il n'y a plus de papier pour la construire.

D'autres façons de modéliser sont possibles. Par exemple, si les noms des deux variables retenues pour le problème sont souvent notées x et y, elles ne désignent pas toujours les mêmes grandeurs. Plutôt que de choisir comme variables les dimensions du rectangle découpé, certains préfèrent prendre deux dimensions de la boîte à construire.

Quel que soit le choix de la modélisation et de la variable indépendante, l'étude de la fonction volume à optimiser ne pose pas de difficulté dans ce problème. Dans le cas où différentes options ont été prises, les élèves pourront constater qu'elles mènent à la même solution optimale.

Le cube

Le but de cette activité est de réaliser, à partir d'une feuille de papier de format A4, le développement d'un cube de volume maximal. Les découpes doivent être parallèles au bord de la feuille et le développement doit être d'un seul tenant avec des faces du cube entières.

Les développements généralement proposés sont les modèles en T et en croix latine comme l'illustre la figure 14.

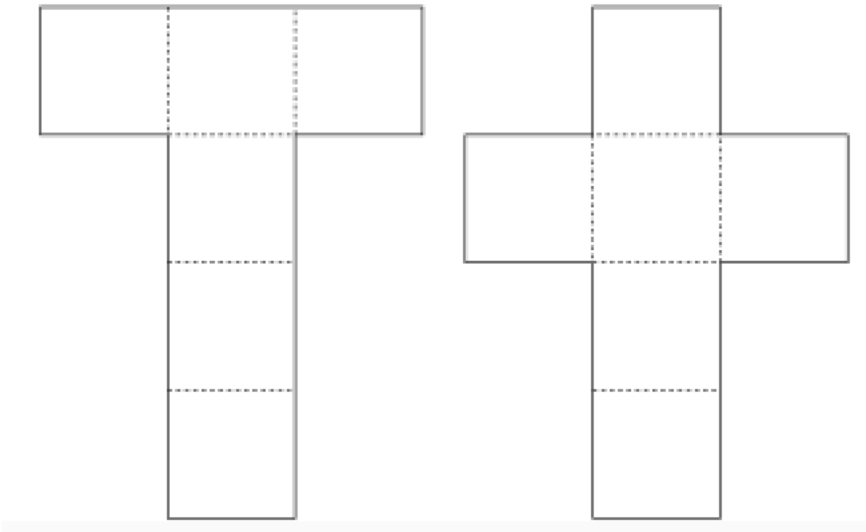

Figure 14 – Développements du cube proposés

La variable s'impose d'elle-même, c'est la longueur de l'arête du cube, on la note x. La fonction à maximiser est celle qui exprime le volume du cube : $V(x) = x^3$.

La méthode mise en place précédemment, en utilisant la dérivée, risque fort de désarçonner les élèves. En effet, $V'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$, la tangente au graphique de la fonction est donc horizontale en $x = 0$ mais il est clair que cette valeur ne fournit pas la solution au problème proposé.

Comme la fonction x^3 est toujours croissante, il s'agit ici de trouver la valeur de x maximale pour laquelle il est possible de construire un développement sur la feuille A4 tout en respectant les consignes. Il ne s'agira pas d'un point où la dérivée de la fonction s'annule, mais d'un point au « bord » de l'intervalle définissant les valeurs admissibles.

Il y a donc lieu d'exprimer les contraintes sur cette variable x. En se référant à l'un ou l'autre des développements de la figure 14, on obtient le système de contraintes suivant.

$$\begin{cases} 3x \leq 21 \\ 4x \leq 29{,}7 \end{cases}$$

qui admet pour valeur maximale de x la valeur 7 cm. Le volume maximum est ici atteint pour la valeur maximum admissible de x.

Si tous les élèves en sont convaincus (il s'agit effectivement de la solution optimale), la preuve n'en a pas encore été établie, et il n'est pas certain que des idées surgissent pour élaborer une justification complète, ni même que sa nécessité s'impose aux élèves, à ce stade.

La suite de l'activité a donc pour double objectif de faire percevoir la nécessité d'une preuve et de donner des pistes pour l'établir.

Pour cela, le même exercice est proposé à partir d'une feuille A4 coupée en deux dans le sens de la longueur (10,5 cm de large et 29,7 cm de long).

Si les élèves sont convaincus que des contraintes similaires permettent de trouver la solution, ils construiront un cube de 3,5 cm d'arête (de volume égal à 42,875 cm³) or il est possible d'en construire un de volume supérieur à partir du développement du cube de la figure 15.

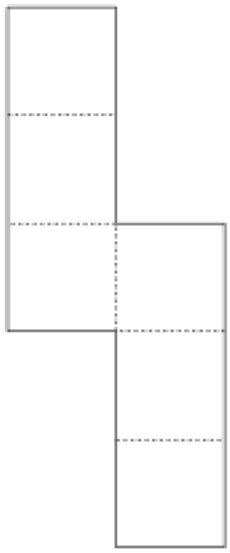

Figure 15 – Autre développement

Dans ce cas, les contraintes sont $\begin{cases} 2x \leq 10{,}5 \\ 5x \leq 29{,}7 \end{cases}$

ce qui donne une solution de 5,25 pour l'arête du cube et un volume de 144,7 cm³.

Pour vérifier qu'il n'est pas possible de trouver un cube de volume plus grand, il devient nécessaire de recenser les onze développements du cube (ce travail peut notamment être réalisé à partir d'un inventaire des différents hexaminos).

Les développements du cube peuvent être classés suivant le nombre de carrés disposés dans les deux directions. Selon les dimensions de la feuille rectangulaire, l'un ou l'autre des deux systèmes de contraintes établis précédemment permet de trouver l'arête du cube de volume maximal.

Il est alors possible d'aborder avec les élèves la généralisation du problème à une feuille rectangulaire de dimensions quelconques.

Le cône

Un intérêt majeur de ce nouveau problème réside dans la grande variété des méthodes de résolution et dans les discussions que ces différentes approches peuvent susciter.

L'activité est présentée comme suit. Après avoir distribué un disque de papier de 10 cm de rayon, on demande de construire, en découpant un secteur du disque, un cône dont le volume est le plus grand possible.

Dès le départ, on fait remarquer que, pour visualiser de manière continue les différents cônes sans découper de secteur dans le disque, on peut faire glisser l'une sur l'autre les deux parties du disque situées de part et d'autre de la fente.

La manipulation a pour but d'aider à percevoir les différentes variables qui interviennent dans ce problème ainsi que la façon dont elles interagissent. Lorsque l'angle α du secteur découpé augmente, le rayon de la base du cône diminue puisque la circonférence de la base diminue ; simultanément la hauteur du cône augmente. Au contraire, lorsque α diminue, le rayon r de la base du cône augmente et sa hauteur h diminue. Il y a donc lieu de chercher les liens qui unissent ces variables.

Le lien entre r et h apparaît sans trop de peine dès qu'on représente la situation par un schéma comme celui de la figure 16. Par contre, le lien avec α est plus difficile à percevoir.

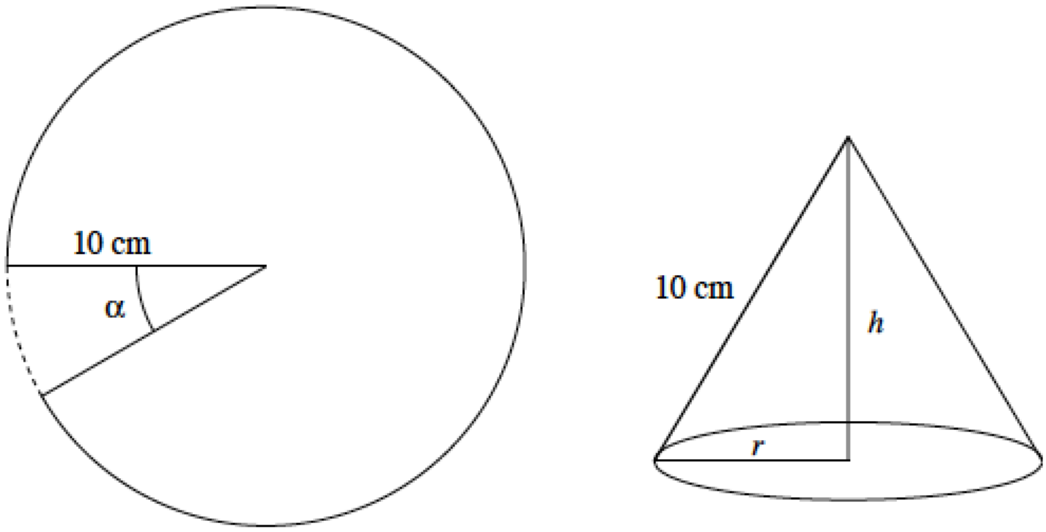

Figure 16 – Modélisation du cône

Cependant, à partir de l'expression du volume du cône $V = \pi r^2 h/3$ et de la relation $h^2 + r^2 = 10^2$, les élèves peuvent choisir l'une des deux grandeurs r ou h comme variable indépendante et en calculer la valeur, dite optimale, correspondant au cône de volume maximal. Le choix devrait se porter assez naturellement sur h, qui évite une racine carrée dans l'expression de la fonction volume.

Après avoir déterminé les solutions de l'équation $V'(h) = 0$, les élèves démontrent que la hauteur du cône optimal, notée h_{opt}, vaut $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm ≈ 5,77 cm. Ils en déduisent alors que le rayon du cône optimal est $r_{opt} = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm ≈ 8,165 cm.

Il faudra alors rappeler la consigne qui consiste à construire le cône en découpant un secteur angulaire dans la feuille de papier. Le problème du lien entre r et α qui avait éventuellement été laissé en suspens devra finalement être traité à ce moment. L'enseignant qui ne souhaite pas donner directement aux élèves la formule qu'ils attendent pourrait évoquer la définition du radian pour qu'ils se rappellent que, tout comme $2\pi R$ est la longueur de la circonférence, αR est la longueur de l'arc de cercle de rayon R et d'angle au centre α. Il pourrait également leur demander d'examiner des valeurs particulières de l'angle au centre du cercle et de la longueur de l'arc intercepté correspondant, les amenant ainsi à reconnaître que ces grandeurs sont proportionnelles. La valeur de l'angle optimal du secteur à retirer est déterminée par la relation $\alpha_{opt} = 2\pi\,(1 - \sqrt{6}/3)$ rad et vaut approximativement 1,15 rad ou 66,06°.

Dans ce problème, la façon de poser la question de départ est primordiale et influence notablement l'activité des élèves lors de la résolution. Telle qu'elle est formulée ici, la consigne ne mentionne pas explicitement l'angle du secteur angulaire à découper. Mais si on demande plutôt de déterminer l'amplitude de l'angle du secteur angulaire qu'il faut découper dans un disque de papier pour obtenir un cône de volume maximal, on attire l'attention sur la variable α de telle manière que des élèves pourraient penser qu'il est obligatoire de la choisir comme variable indépendante, ce qui les pousserait dans une direction où ils se trouveraient confrontés à des calculs fastidieux.

On peut laisser des élèves s'engager dans les différentes approches. Une comparaison des fonctions dont il convient de chercher le maximum

$$V(h) = \frac{\pi\,(100h - h^3)}{3}$$

$$V(r) = \frac{\pi\, r^2\sqrt{100 - r^2}}{3}$$

$$V(\alpha) = \frac{125\,(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{3\pi^2}$$

permettra alors de mettre en évidence qu'un choix judicieux de la variable donne lieu à des calculs plus simples où les risques d'erreurs sont moindres.

Prendre conscience qu'un même problème peut induire des démarches différentes, suivant la façon dont il est formulé, nous semble être pour de futurs enseignants une aide à la conception de séquences d'apprentissage.

Pour le développement complet de l'activité, nous vous proposons de consulter le rapport de la recherche sur le site du CREM (www.crem.be).

En guise de conclusion

Pour chacune des *Math & Manips* présentées dans cet article, nous pouvons souligner quelques caractéristiques qui font leur spécificité et qui justifient notre choix de les placer dans une séquence consacrée aux problèmes d'optimisation.

Le problème de la boîte sans couvercle, très classique, ne présente aucune difficulté, ni dans le choix de la variable, ni dans la construction de la fonction. Il offre la possibilité de l'utiliser comme introduction à la dérivée. Son objectif essentiel est d'aider l'élève à comprendre l'essence de l'optimisation et ensuite, à percevoir l'efficacité de l'outil dérivée.

Le problème de la boîte parallélépipédique (développement en T) présente une première difficulté car deux variables s'introduisent naturellement au départ, tout en étant liées par une contrainte imposée par la construction.

Quant au problème du cube, il montre que le recours à la dérivée ne fournit pas toujours la solution attendue et attire l'attention sur la nécessité d'une preuve.

L'enjeu du problème du cône est pour sa part de faire voir à quel point un choix judicieux de la variable indépendante peut simplifier les calculs.

À partir de l'examen de ces quatre *Math & Manips*, nous pouvons mettre en évidence des facteurs qui nous semblent influer particulièrement sur l'activité des élèves.

Le premier est l'importance de la formulation de la question ou de la consigne, qui peut susciter des entrées assez différentes dans un même problème, par exemple induire ou non le choix de certaines variables pour la modélisation. Dans certains cas, la phase de modélisation est complètement absente car des schémas pertinents sont fournis aux élèves avec l'énoncé. Lors de la mise en situations des élèves devant des problèmes dits complexes, faisant appel à plusieurs registres, la phase de modélisation ne pourra pas être éludée. Le contexte de l'optimisation est une opportunité à saisir pour développer chez les élèves des compétences en cette matière difficile.

Un deuxième facteur est celui de la variété et du type des problèmes abordés aux cours des différentes séquences consacrées à cette matière car ils influencent fortement l'approche que les élèves ont d'un nouveau problème à traiter. Par exemple, l'ordre dans lequel les exercices sont proposés conduit les élèves à réinvestir une méthode qui a donné de bons résultats dans un problème précédent. Cependant, les outils théoriques qu'il est possible de mettre en œuvre afin de trouver la solution au problème posé, une fois qu'il est modélisé, ne se limitent pas à la seule recherche de zéros d'une fonction dérivée. De plus, la validation du résultat obtenu, quelle que soit la méthode retenue pour l'établir, doit être effectuée rigoureusement.

Des réflexions sur ces facteurs ont été menées tout au long des activités car il nous semble important d'y réfléchir, surtout avec de futurs enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Borel É. (1904). *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Musée Pédagogique, Paris. Conférence prononcée le 3 mars.

Chappaz J., Michon F. (2003). Il était une fois. . . la boîte du pâtissier, *Grand N*, 72, 19-32.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, 60, 61-78.

Dias T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques, *Grand N*, 83, 63-84.

Guissard M.-F., Henry V., Agie S., Lambrecht P. (2010). Math & Manips, *Losanges*, 7, 39-46.

Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P., Van Geet P., Vansimpsen S. (2013). *Math & Manips* ou comment intégrer des manipulations dans les classes pour favoriser l'apprentissage des grandeurs et de la proportionnalité. *Actes des 18ème et 19ème colloques de la CORFEM : juin 2011 & juin 2012*, 109-120.

Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P., Van Geet P., Vansimpsen S. (2013). *Math & Manip* avec Apprenti Géomètre - aires et agrandissements au collège avec un logiciel de géométrie dynamique. *Actes des 17ème et 18ème colloques de la CORFEM : juin 2011 & juin 2012*, 249-263.