CREER DES RESSOURCES POUR LA FORMATION INITIALE PROFESSIONNELLE DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES A PARTIR DE SUJETS D'ORAL DU CAPES

Brigitte Benzekry, Marc Guignard, Marie-Christine Lévi et Laurent Vivier,
IREM de Paris 7

Résumé – Des énoncés d'exercices mathématiques que l'on trouve dans les sujets de l'oral sur « dossier » du CAPES ont été proposés à des élèves. Des vidéos de classes et des productions écrites ont été recueillies. L'objet de cet atelier est d'élaborer des scénarios de formation initiale ayant une dimension professionnelle.

I Introduction

Le groupe *CORFEM-IDF* de l'IREM de Paris 7 a travaillé cette année sur la production de ressources pour la formation initiale des enseignants de mathématiques du second degré, et notamment dans le contexte nouveau de la *masterisation*. C'est ce travail fructueux, intéressant et novateur que nous désirons partager avec la communauté des formateurs d'enseignants de mathématiques.

Dans les masters *enseignement*, il semble que la formation professionnelle et la préparation au CAPES soient deux composantes déconnectées. Or, l'oral 2 sur dossier du CAPES de Mathématiques a des objectifs de type professionnels en proposant un exercice de niveau secondaire (et éventuellement BTS), des productions d'élèves (réelles ou fictives) et des questions qui peuvent permettre de faire un demi-pas dans la classe. Il nous semble que l'on peut produire des ressources intéressantes pour la formation initiale professionnelle en s'appuyant sur les exercices posés à l'oral 2. Il nous est ainsi apparu que l'épreuve d'oral 2 du CAPES pouvait être l'occasion de travailler avec les étudiants au-delà de la simple préparation au concours, un certain nombre de dimensions professionnelles et didactiques.

La plupart des sujets d'oral 2 comporte des extraits de productions d'élèves. Malgré les termes employés on peut se demander de quels élèves il s'agit. En effet, ces productions sont souvent élaborées avec des erreurs sophistiquées, difficiles à déceler et à analyser. Ces productions sont-elles de *vraies* productions d'élèves ? Avec un peu d'expérience de terrain, on peut en effet douter que ces écrits soient représentatifs de l'enseignement secondaire. D'autre part, côté formation, il nous est apparu rapidement que répondre aux questions du jury sans avoir vu les élèves travailler était difficile pour un étudiant qui, lui, n'a pas ou peu d'expérience. Nous pensons ainsi que ces sujets d'oral 2 participent à une certaine représentation lors de l'entrée dans le métier de ce que peuvent faire les élèves en classe. Or, comme nous le verrons, ce qui se passe en classe peut être bien différent de ce que l'on pourrait inférer de ces seuls[26] sujets d'oral 2.

[26] Bien entendu, et heureusement, cela n'est qu'une partie de ce qui participe à cette représentation du métier d'enseignant.

L'idée de notre groupe IREM est de proposer ces exercices de l'oral 2 dans des classes, de filmer la séance et de relever les productions des élèves (des vraies !). Puis, avec ce matériel, d'élaborer de courts scénarios de formation qui puissent s'insérer facilement en formation initiale, pour participer à la fois à la préparation à l'oral et à la formation professionnelle, tout en travaillant la distance existante entre l'oral 2 et une vraie situation de classe. Notre objectif de renforcer les liens entre la préparation au CAPES et la formation professionnelle semble être tout à fait en phase avec les toutes nouvelles dispositions institutionnelles concernant la formation des enseignants, nous y reviendrons en conclusion.

Un de nos premiers travaux fut de nous constituer une « banque » de sujets d'oral 2 extraits des annales du CAPES[27]. Un tri des sujets a été effectué pour extraire les exercices, proposés à l'oral 2, qui pourraient faire l'objet d'un travail effectif en classe en prenant en compte une contrainte essentielle : ils doivent pouvoir s'insérer dans les progressions des enseignants. Néanmoins, le fait de devoir choisir un exercice dans une liste restreinte s'est avéré contraignant pour les collègues (notamment pour leurs progressions) . Nous avons donc donné un peu de souplesse dans le choix de l'exercice, l'important étant d'avoir au final un exercice avec les productions écrites des élèves et la vidéo et que ce soit, si possible, un exercice qui puisse faire l'objet d'un oral 2 du CAPES.

C'est ainsi que notre premier travail s'est focalisé sur la correction d'une évaluation de statistique, qui n'est pas extraite d'un sujet du CAPES, avec les copies de cinq élèves. Malheureusement un élève a arrêté la vidéo et nous ne disposons que de quelques minutes, non exploitables. Cela a permis de mettre en place un dossier de type 2 pour la formation à l'oral avec la certitude que ce soit de véritables copies d'élèves. Par la suite nous avons obtenu le matériel recherché concernant deux exercices posés au CAPES 2012 (niveaux 3^{e} et 2nde). Après un exposé rapide de notre travail sur l'exercice du *camion*, l'atelier se propose d'étudier principalement l'exercice *pyramide* proposé au 3^{e} concours 2012 dans le thème *grandeurs et mesures*.

L'atelier proposé au XX^{ème} colloque CORFEM reprend à peu près les éléments de ce texte dans l'ordre. Une introduction reprenant cette présente introduction et nos travaux sur l'énoncé du *camion*, puis un travail sur l'exercice de la pyramide. Celui-ci se décompose en 4 quatre phases : (1) un travail sur l'énoncé dont nous donnons ici une analyse ; (2) un travail sur une sélection de productions d'élèves ; (3) un travail sur la vidéo, une douzaine de minutes sont visionnées ; (4) un exposé de deux utilisations de ce matériel en formation initiale.

II L'exercice du camion (CAPES 2012)

> Sur l'autoroute, une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où elle décide de s'arrêter sur une aire de repos. Le conducteur prend une pause de 10 minutes puis repart et règle son régulateur de vitesse sur 110 km/h. Le camion, quant à lui, roule à une vitesse constante de 90 km/h tout au long de son trajet. Au bout de combien de temps (et de combien de kilomètres) la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

Disons-le tout de suite, cet exercice nous a donné du fil à retordre ! L'analyse n'est en effet pas aisée, les approches sont multiples, les méthodes de résolution variées. Il s'agit

[27] Voir les rapports du jury du CAPES de mathématiques : http://capes-math.org/index.php?id=archives. Les exercices du camion et de la pyramide ci-dessous sont extraits du CAPES 2012 (3^{e} concours pour la pyramide).

pourtant d'un exercice classique que l'on pourrait placer dans un imaginaire de l'enseignement des mathématiques. On le retrouve par exemple dans un manuel de 1923 et on reconnaît une forte proximité avec la situation d'un des paradoxes de Zénon d'Élée.

Concernant les vidéos, nous en avons deux : une séance de travail en groupe et une séance de bilan dans la même classe de seconde[28] . Les vidéos sont de faible qualité, notamment la qualité du son, mais exploitables et surtout au plus près des groupes : enregistrée avec le téléphone portable de l'enseignant, on suit le professeur dans ses *tours des groupes*. Nous disposons en outre des productions de la plupart des groupes que l'on peut alors croiser avec la vidéo.

Ce matériel est intéressant à plus d'un titre. On peut voir la difficulté des élèves à trouver une procédure de résolution[29] et à la mener jusqu'au bout ainsi que le rôle de l'enseignant pour les aider dans leurs travaux. Vu la difficulté de l'exercice, l'enseignant doit s'adapter et comprendre rapidement, *sur le champ*, l'approche pas toujours explicite proposée par chaque groupe visité. Dans le bilan il est exposé une procédure correcte algébriquement mais dont la justification n'est pas correcte ce qui, bien qu'il en soit gêné, échappe à l'enseignant. Il faut dire que c'est précisément ce point qui est particulièrement troublant et qui nous a demandé du temps pour sa compréhension.

Ainsi on remarque que si l'on donne cet énoncé aux élèves avec une liberté de procédure, la gestion par l'enseignant n'est pas simple. Dans cette perspective, il paraît nécessaire de faire une analyse fine et complète de cet exercice et des différentes possibilités – toujours importante, cette analyse *a priori* apparaît critique dans cette situation. Mais cela doit-il être du ressort de l'enseignant ? Et surtout, a-t-il le temps matériel de produire une telle analyse ?

Nous en sommes donc venus à nous interroger pour savoir s'il était pertinent de présenter, dans le cadre de la préparation à l'*oral 2*, à des étudiants-professeurs qui auront en charge une classe l'année suivante un exercice qui paraît simple, avec trois productions d'élèves qui semblent renforcer cette impression ? En effet, si l'on pense que, malgré sa bonne expérience, l'enseignant de la vidéo a eu des difficultés de gestion de sa classe du point de vue du contenu, que dire d'un enseignant novice ? Il nous semble dès lors très important de proposer ce type de situation en formation initiale mais surtout afin d'avertir les futurs professeurs de la différence entre l'*oral 2* du concours et ce qui se passe dans la réalité de la classe. On remarque en particulier que la gestion de l'enseignant est invisible dans le sujet de CAPES. Or, c'est une des difficultés que nous avons pointée.

Malgré cela, ce matériel semble peu aisé à utiliser. Bien entendu, la qualité de la vidéo est un problème mais surtout il est nécessaire de visionner presqu'une heure de vidéo (une sélection de plusieurs groupes et une partie du bilan) pour que cela soit exploitable pleinement. Or, dans les formations initiales actuelles, nous ne disposons malheureusement pas d'une telle latitude temporelle. Ce matériel riche fait l'objet d'un

---

[28] Ainsi qu'une en troisième que nous n'avons pas encore exploitée.

[29] Hormis une procédure rapidement trouvée par un groupe qui consiste à dire qu'au bout de 1h la voiture à parcouru 110 km et le camion 90 km, soit 20 km de différence alors que la voiture doit combler 90 km/h × 10 min = 15 km. Et comme 15 km = 3/4 × 20 km, alors, par une proportionnalité implicite, il faut que la voiture roule pendant 3/4 × 1h, soit 45 min.

travail dans un article en préparation où l'on présente, notamment, l'analyse de l'énoncé.

III L'exercice de la pyramide (CAPES 2012, 3ème concours)

La pyramide du Louvre schématisée ci-dessous (figure 1) est une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté.
1) Calculer le volume de cette pyramide.
2) Calculer la superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide (on convient que les faces sont totalement recouvertes de verre).

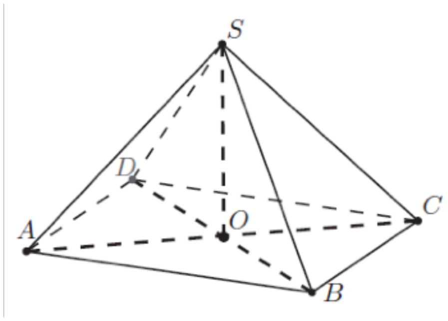


Figure 1

Si cet énoncé semble moins emblématique de l'enseignement des mathématiques que l'exercice du *camion*, il n'en reste pas moins que l'on en trouve de nombreuses variantes (voir par exemple le sujet du BNC 2000 en annexe 3).

III-1) Analyse de l'énoncé

Dans la question 1, il semble que seule l'application de la formule du volume soit requise. Bien entendu, on peut s'attendre à des erreurs sur cette formule comme l'oubli du 1/3, une confusion avec la formule de l'aire du triangle avec un facteur 1/2.

On remarque aussi une polysémie des termes *base* et *hauteur*. On peut ainsi s'attendre à des confusions liées aux grandeurs sur le sens du terme *base*, la *base* est ici une aire, contrairement à la base intervenant dans la formule de l'aire d'un triangle. Le terme *hauteur* peut aussi mener à des confusions dans l'exercice puisque le même terme désigne la hauteur de la pyramide, pour l'aire dans la question 1, et la hauteur d'un triangle, pour l'aire d'une face en question 2.

Dans la question 2, plusieurs procédures sont possibles. Parmi les correctes, on peut mentionner les deux suivantes :

- P1 : calcul de SA (ou de la longueur d'une autre arête) par le théorème de Pythagore dans le triangle SAO qui est tracé. Cela nécessite donc également de calculer la demi-diagonale AO du carré de base par le théorème de Pythagore (à moins de connaître le résultat). Le triangle SAB est isocèle car la pyramide est régulière et on peut alors calculer la hauteur SH issue de S par le théorème de Pythagore. On en déduit l'aire de SAB en utilisant la formule de l'aire d'un triangle puis, par une multiplication par 4, on obtient le résultat.
- P2 : calcul de SH par le théorème de Pythagore dans le triangle SOH où H peut être le milieu de n'importe quel côté du carré de base. Cela nécessite de calculer

OH, mais on peut penser que les connaissances sur le carré permettent de l'obtenir sans difficulté. Le calcul de l'aire de *SAB* puis l'aire totale cherchée s'obtient comme dans P1 puisque que *H* est aussi le pied de la hauteur issue de *S* d'une face qui est un triangle isocèle.

A ce niveau d'enseignement, la classe de troisième, il n'est pas attendu de justification de l'utilisation du théorème de Pythagore car cela demande des connaissances qui relèvent de la classe de seconde.

Dans ces deux procédures (avec possiblement un choix de procédure), on reconnaît des étapes, des intermédiaires (dont le calcul de l'aire d'une face), un choix de la face où l'on travaille et la reconnaissance d'une modalité d'application du théorème de Pythagore. Il s'agit d'une connaissance de la classe de quatrième, retravaillée en troisième et cette reconnaissance est attendue de la part des élèves, sans intervention de l'enseignant. Néanmoins, le choix du triangle et surtout le passage 3D → 2D est une adaptation qu'il ne s'agit pas de minorer.

Ces deux procédures sont guidées par un même objectif qui consiste à calculer l'aire d'une face pour en déduire l'aire totale par multiplication par 4. Cette aire nécessite de calculer la hauteur. On peut remarquer que chacune de ces procédures utilise deux connaissances différentes sur les pyramides régulières, mais de manière légèrement différente, et sous deux formes différentes. Dans P1, on utilise d'abord la perpendicularité de (*SO*) avec le plan contenant de base pour le calcul de *SA* puis, dans un deuxième temps, le fait que le triangle est isocèle, donc uniquement en 2D, pour le calcul de la hauteur *SH*. Dans P2, on désire calculer la hauteur *SH* directement avec une présence des deux connaissances dans un même pas de la procédure : H est le milieu de [*AB*] car le triangle est isocèle et *SOH* est rectangle car (*SO*) est perpendiculaire au plan de base.

On pourrait penser que P1 sera majoritaire car le triangle *SAO* est déjà tracé ce qui n'est pas le cas de *SOH*. Cependant, cela est à modérer car, sans mésestimer la difficulté cognitive de considérer une sur-figure (un triangle non tracé ici), la procédure P1 nécessite plusieurs pas (calcul de *OA*, calcul de *SA*, calcul de *SH*) avant de pouvoir calculer l'aire s'une face alors que P2 ne nécessite qu'un pas (calcul de *SH*) avant le calcul d'aire. Bien entendu, le pas de P2 pour le calcul de *SH* fait intervenir deux connaissances sur les pyramides régulières alors que dans P1 les connaissances sont en quelque sorte découplées.

Ainsi il est difficile de se prononcer *a priori* sur la fréquence de ces deux procédures. Il est à noter que la procédure 1 est celle que l'on trouve dans le dossier du CAPES. On peut alors se poser le statut de cette production présentée : est-elle représentative de ce que peut faire un élève de troisième ? Même si l'on s'attend à ce que les candidats produisent la procédure P2, cette présentation ne met-elle pas en avant la procédure P1 ?

Enfin, on peut penser à beaucoup de procédures erronées comme, par exemple, celle consistant à considérer que les faces sont des triangles équilatéraux (problème de connaissance sur les pyramides régulières).

III-2) Les productions écrites des élèves

Parmi les productions écrites des 18 élèves, 16 sont, de manière très surprenante, très homogènes. En particulier il semble que tous les élèves réussissent la question 1 et la procédure 1 n'est utilisée que par un seul élève (E1, il ne finit pas ses calculs) alors que la procédure 2 est développée avec succès pour 16 élèves (hormis E1 et E15). Il n'y a qu'un seul élève qui utilise une procédure erronée (E15).

On note quatre dessins de patron (E2, E7, E8 et E11) et une vue de dessus (E14). On relève également de nombreuses figures extraites dénotant un passage 3D → 2D : 7 triangles *SOH*, 6 triangles *SAB* et un triangle *SOA*.

Comme on pouvait s'y attendre, on note effectivement très peu de tentatives de justification (une tentative pour un triangle rectangle et 3 pour le calcul de *OH*).

Du côté de l'application du théorème de Pythagore, E1 l'utilise parfaitement avec uniquement des calculs formels de racines carrées, correctes et sans valeur approchée, et E15 ne répond pas à la question 2. On relève une fois de plus une grande homogénéité des valeurs approchées pour *SH* sur les 16 copies restantes avec notamment 10 fois la valeur approchée 27,3. Pour ces questions sur les racines carrées et les valeurs approchées, voir l'annexe 4.

Toutefois, à côté de cette homogénéité, on remarque que E11 et E18 donne $SH \approx 27{,}3$ mais sans aucun calcul relatif au théorème de Pythagore et E17 produit les calculs après avoir écrit cette valeur approchée. Cela laisse perplexe et il semble que les seules productions écrites ne puissent suffire pour avoir une idée de l'activité des élèves. L'analyse des productions écrites montre ainsi leur insuffisance pour comprendre ce qui s'est joué en classe et le recours à la vidéo se justifie naturellement afin d'avoir un complément d'information nécessaire.

III-3) La vidéo

Cette vidéo de cours a été filmée au mois de Mars 2013 dans un établissement *ECLAIR* de la banlieue nord de Paris. Le collègue filmé y est enseignant depuis de nombreuses années. Il a accepté d'être filmé avec une classe de troisième de 18 élèves dont il nous dit qu'elle est particulièrement intéressée par les problèmes de recherche et d'un niveau correct pour ce type d'établissement. Il a décidé de consacrer une séance d'une heure à la mise en recherche de la classe sur la situation de la *pyramide* et ce en dehors de toute volonté d'inscription dans sa progression. La géométrie dans l'espace et la géométrie plane pour ce qui concerne le triangle ont déjà été abordées depuis longtemps. Il n'y a pas d'enjeu de synthèse pour institutionnaliser des résultats dans le cours et ce travail ne débouche sur aucune évaluation. Il s'agit donc en quelque sorte d'une séance hors du temps didactique avec tous les avantages et inconvénients que cela peut comporter.

Avant de tirer des conclusions de la vidéo, nous donnons ci-dessous une chronologie.

0' – Installation : distribution du premier sujet, travail anonyme, pas un contrôle ni une évaluation. 1'42 lecture de l'énoncé par des élèves ; 2'15 : question sur la différence entre superficie et aire ; question sur les faces latérales avec un élève qui donne SBC comme exemple.

2'51 – recherche individuelle : pas de livre (pour les formules), faire des erreurs n'est pas grave (on cherche des « erreurs authentiques ») ; 4'12 on a le droit à la calculatrice ; l'enseignant passe voir les élèves.

12'58 – reprise, bilan par l'enseignant : le volume de la pyramide et ce qui pose problème dans la 2ème question.

15'03 – l'enseignant parle d'erreur sur le volume, notamment en insistant sur *l'aire* de la base, sur la différence avec l'aire d'un triangle.

15’43 – l’enseignant demande l’unité et écrit m^3.

16’05 – la *deuxième question*

16’05 – l’enseignant demande : « Qu’est-ce qu’on vous demande ? » : recouvrir les 4 triangles qui forment la pyramide ; l’enseignant trace un triangle (la face *SAB*) au tableau.

17’07 – l’enseignant demande quels sont les besoins : aire d’un triangle (rappel de la formule par un élève), base 35 m et hauteur 21 m.

18’21 – A partir d’une « bonne remarque » d’un élève, l’enseignant demande « pourquoi *SO* n’est pas la hauteur d’un triangle ? » […] « si je mettais un point *H*, sur [*BC*] ou sur [*AB*] ? », *H* est au milieu car le triangle est isocèle ; *H* est placé par l’enseignant au milieu de [*AB*] sur le triangle extrait *SAB* et sur la pyramide.

19’12 – l’enseignant signale qu’« on ne sait pas si 35-35-35, mais isocèle car pyramide régulière, ça peut-être équilatéral ».

20’07 – l’enseignant déclare « j’en dis pas plus […] voir d’autres mesures que vous allez pouvoir utiliser » et trace [*SH*]sur le tableau, sur la pyramide vidéo-projetée.

20’38 – nouvelle recherche individuelle de la question 2 : l’enseignant donne beaucoup d’indices pendant ce moment.

21’56 – un élève, en parlant fort, déclare « on fait Pythagore ».

22’06 – l’ enseignant prononce « *SOA* » et demande « que doit-on calculer ? ». L’enseignant parle d’un triangle pour avoir *SH*, un élève répond *OSH*.

25’24 – un élève à l’enseignant : « *AO* c’est la moitié de… » avec quelques discussions sur la diagonale du carré.

26’28 – l’enseignant demande « avez-vous identifié dans quel triangle on va travailler ? » et il trace *SHO* sur la pyramide.

26’39 – l’enseignant demande à propos de *SHO* « qu’est-ce qu’on connaît dedans ? » élève répond « rectangle » et il extrait le triangle *OSH* et demande « pourquoi ? ». Un élève répond « hauteur de la pyramide », et l’enseignant répond « très bien, ça vient perpendiculairement » et il trace *HSO* en codant l’angle droit.

27’57 – un élève affirme que (*OH*) et (*CB*) parallèles, l’enseignant répond « oui, quelle propriété ? » un élève répond « Thalès »… l’enseignant parle de la droite des milieux.

29’02 – l’enseignant demande la « mesure de *HO* ? », *HR* = *BC* = *AD* et explication par l’enseignant de *OH* qui est la moitié de *BC*.

30’25 – l’enseignant complète *SOH* avec les mesures 21 m, 17,5 m et ? et parle de « droite des milieux ».

31’12 – l’enseignant écrit les calculs menant à *OH* = *BC* : 2 = 35 : 2 = 17,5 m.

31’27 – l’enseignant demande « pour le calcul de *SH*, on utilise quoi ? quel outil ? » et des élèves répondent « Pythagore ». L’enseignant déclare « je ne la réécris pas complètement » et il demande ce que les élèves ont trouvé « à peu près quel résultat », et des élèves disent « 27,3 ».

31'57 – l'enseignant précise « d'accord, on tombe pas sur une valeur exacte », et il écrit $SH \approx 27{,}3$ en demandant : « avec cette valeur approchée, faites un calcul de l'aire » « nous, on veut l'aire de SAB ».

32'26 – Nouvelle recherche individuelle, ceux qui ont terminé vont commencer l'exercice sur le camion, la transition n'est pas bien marquée ; on ne revient plus sur l'exercice de la pyramide.

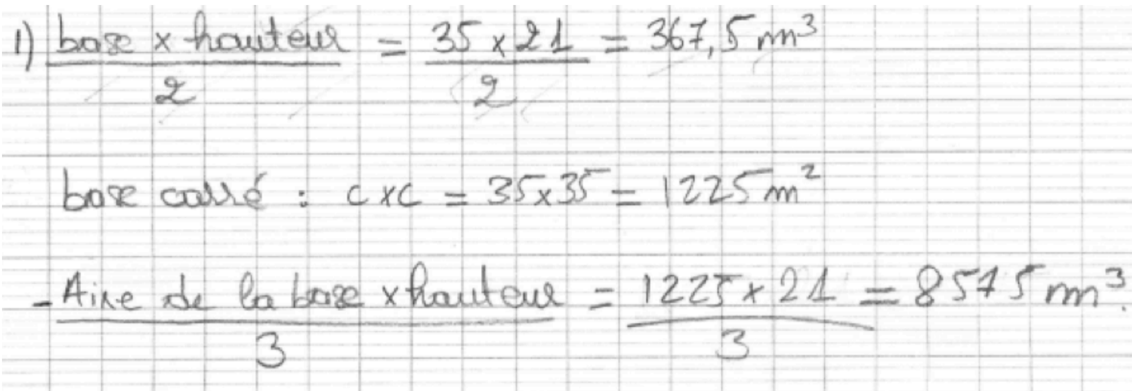
Nous visionnons la séance de classe de 12'58 à 32'26. On comprend alors d'où provient cette grande homogénéité des productions écrites des élèves. En effet, on peut voir que l'enseignant oriente largement vers la procédure 2 (la seule qui est mentionnée par l'enseignant) à partir de 16'05. Par la suite, on constate que beaucoup d'élèves ont dû copier le tableau, d'où l'homogénéité, car on ne peut que remarquer la très grande proximité de ce qui est écrit au tableau avec ce qu'écrivent certains élèves. Le théorème de Pythagore est mentionné oralement (31'27), mais les calculs sont entièrement laissés à la charge des élèves (on peut alors déceler des élèves qui ont des activités *a minima* : E11 et E18). En particulier, l'enseignant ne donne pas l'aire à calculer.

On retrouve la confusion sur la hauteur (18'21) ainsi que l'erreur de considérer que les triangles sont équilatéraux (19'12) dans les discussions que l'enseignant engage à partir de ce qu'il a vu de ses élèves. Avec la correction de la question 1 au tableau, on comprend la grande homogénéité des réponses des élèves car il s'agit de fait d'une prise de note de ce qui est fait au tableau conforme à l'élève E15 (voir l'annexe 1 et plus spécifiquement la partie après « Co », sans doute pour « correction »).

III-4) Retour aux copies

Ainsi, en reprenant les productions des élèves, on ne peut considérer que seuls 7 élèves ont effectivement répondu correctement (en tout cas ce qu'ils écrivent n'est pas une reformulation superficielle de la trace écrite au tableau), 7 élèves produisent un écrit identique au tableau et 4 élèves ont une production très proche.

Cela permet alors de se pencher sur les erreurs dans cette première question et notamment sur les élèves E11, E12, E17 et E15 puisque la suite est uniquement la prise de note du tableau. On y retrouve les confusions annoncées (comme dans la figure 1) avec, ensuite, la correction (cela se voit de manière plus évidente encore avec E15, cf. annexe 1).



1) $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{35 \times 21}{2} = 367{,}5 \text{ m}^3$

base carré : $c \times c = 35 \times 35 = 1225 \text{ m}^2$

- $\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{1225 \times 21}{3} = 8575 \text{ m}^3$

Figure 2 – Deux confusions de E11 : aire de triangle/volume de la pyramide et hauteur de la pyramide/hauteur d'un triangle

Finalement, et globalement pour tous les élèves, que reste-t-il à la charge des élèves ? Si l'on s'en tient aux aspects géométriques il est manifeste que l'enseignant prend en charge une grande partie du travail. Néanmoins, si l'utilisation du théorème de Pythagore dans *SOH* est indiquée comme étant la procédure à suivre (par défaut, puisqu'il n'y a aucune autre procédure de mentionnée collectivement) avec la mention de la valeur approchée 27,3 pour *SH*, les calculs intermédiaires sont à la charge des élèves. Dans ces calculs intermédiaires apparaissent des conceptions liées à l'objet racine carrée proche des modèles avancés par Bronner (voir l'annexe 4).

Ce que l'on soulève ici ce sont :

- l'importance de l'enseignant, de son discours, dans les activités des élèves (notamment sur l'orientation des procédures, la prise de note) ;
- dans ce qui n'est pas pris en charge par l'enseignant, on peut déceler des conceptions des élèves (donc, ici, uniquement du point de vue numérique).

Il est à noter que, pour ces deux points, c'est surtout l'association vidéo/productions écrites qui est intéressante.

IV- Deux utilisations en formation

Une présentation de deux exemples de séances de formation en Master 2 dans deux universités différentes effectuées par deux formatrices différentes au printemps 2013 mettra l'accent sur la question de l'élaboration d'un scénario ou d'une séance de formation à partir de ce matériel.

IV-1) Première formation

L'utilisation en formation se déroule durant une séance de 3h en M2 à l'UCP dédiée à la préparation à l'oral 2. 9 étudiants répartis en 3 groupes de 2 et un groupe de 3.

Au début on ne donne que l'énoncé de l'exercice. On leur dit qu'il s'agit d'un exercice de l'oral 2 du CAPES sans les productions d'élèves proposées par le jury, de vraies productions d'élèves de 3$^{\text{ème}}$ seront distribuées ensuite. Les étudiants ont tout d'abord à faire l'exercice et à chercher les différentes procédures possibles, analyser les difficultés et les erreurs envisageables. Le sujet de concours dans son intégralité est distribué à la fin.

Puis, pendant 20 min et à partir des productions E1 à E7, les étudiants doivent observer, anticiper sur les interventions de l'enseignant, trouver les points communs et les divergences.

Pendant 20 min, un étudiant présente une correction au tableau, les autres étudiants jouent les élèves. Beaucoup de discussions émergent, notamment sur la différence entre valeur exacte et valeur approchée.

Un extrait d'environ 20 min est visionné (de 12'58 à 32'26) où ils doivent prendre des notes. Une synthèse sur la vidéo est faite en 15 min.

Ce que les étudiants voient : le professeur parle trop ; il n'y a pas assez de traces écrites ; quelle est la nature de ce qui est au tableau ?

Le problème majeur reste les erreurs des étudiants. En particulier, pour beaucoup les faces d'une pyramide régulière sont des triangles équilatéraux et la difficulté de positionnement des étudiants (plus en posture élève qu'enseignant).

La séance a été très riche pour les étudiants, ils ont été très impliqués. Le travail par groupe a permis de faire émerger plusieurs procédures émanant des différents membres du groupe car souvent chaque étudiant n'en voit qu'une, la sienne.

Toutefois il aurait été préférable d'avoir deux séances car le travail sur la vidéo a été un peu court. Il semble que 2 séances de 2h30, voire de 2h, seraient idéales. A la suite, un travail pourrait être organisé autour d'exercices sur les grandeurs et mesures et les différentes représentations des racines carrées.

IV-2) Deuxième formation

Une séance prévue sur 2h, mais finalement il a fallu 2h30 avec 5 étudiants présents sur 12.

Il s'agit d'un choix de formation riche abordant la géométrie plane, la géométrie dans l'espace et le calcul. L'objectif est de faire un travail sur l'énoncé avec la production d'autres énoncés en prenant en compte l'ouverture et la fermeture des énoncés et de compléter avec une vidéo et des productions d'élèves.

Le sujet du CAPES est donné sans la copie de l'élève. Après un travail individuel, un étudiant corrige les questions du sujet au tableau. Suit une comparaison avec le sujet du BNC 2000 qui présente des questions bien plus détaillées.

Cinq productions écrites sont données (E1, E2, E3, E6 et E15) avec 25 min de lecture et 45 min de discussion. Puis un court extrait de la vidéo, environ 6 min, est visionné, de 12'58 à 19'12 : présentation et amorce de l'exercice, on arrête au moment où l'enseignant dit qu'une pyramide régulière a des faces latérales qui sont des triangles isocèles.

Si la discussion sur la vidéo a été assez pauvre, les discussions autours des énoncés et des copies ont permis de soulever plusieurs points : la distinction valeur exacte/valeur approchée, le problème des triangles équilatéraux dans une pyramide régulière, la difficulté d'extraire des sous-figures, la difficulté de calculer, le travail sur les racines carrées. En outre, les étudiants ne voient que la procédure P1 et pas du tout la P2 – cela tranche avec ce qu'ont fait les élèves et renforce le poids de l'enseignant.

Conclusion

Ces deux exemples montrent combien ce qui est esquissé dans l'oral 2 du CAPES est, malgré la volonté de rapprocher le concours du métier d'enseignant de mathématiques, éloigné de la réalité de la salle de classe. Il ne s'agit, au mieux, que d'un *demi-pas* dans la classe. Ainsi il est, à nos yeux, nécessaire d'accompagner cette préparation au concours d'une formation professionnelle. Bien entendu, il n'est pas question de dire que ce que l'on voit dans ces vidéos est *la* réalité de la classe, car cette réalité est multiple et complexe. En particulier, les choix de gestion des enseignants sont déterminants.

Notre objectif est de proposer des scénarios de formation qui redonnent de la cohérence à l'ensemble de la formation que suivent les étudiants. Nous pensons que des scénarios de formation élaborés à partir d'un sujet d'*oral 2* peut permettre de répondre à cet objectif. Ils permettraient en effet de travailler principalement une dimension professionnelle tout en accompagnant la préparation au concours. Notre position nous semble renforcée par la nouvelle formule du CAPES qui s'esquisse. En effet, à côté d'un *oral 2* qui paraît, pour l'essentiel, reconduit, l'écrit devrait donner lieu, aussi, à un travail sur les productions écrites d'élèves, ce que nos scénarios se proposent de travailler.

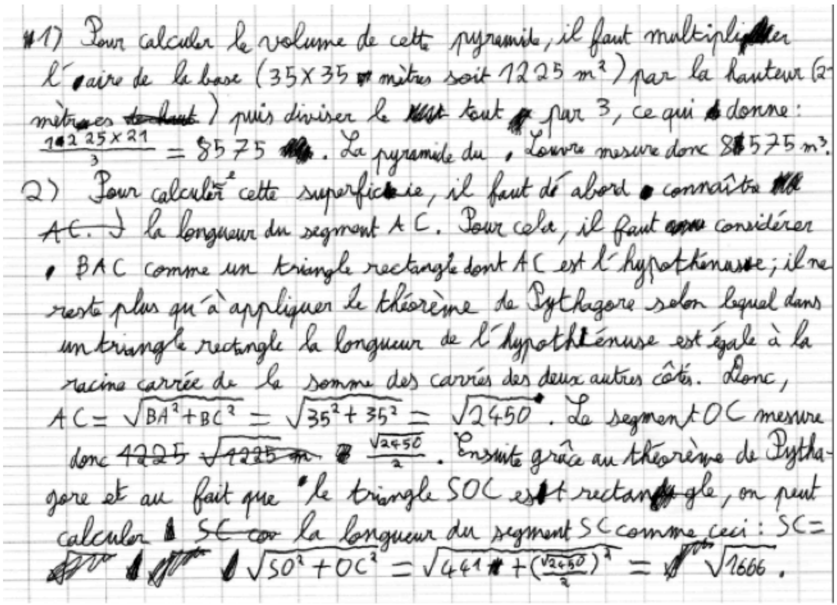
Cependant, il ne s'agit pas de faire des scénarios figés, mais plutôt de proposer du matériel en indiquant différentes pistes pour les exploiter en formation initiale en indiquant les caractéristiques qui nous paraissent intéressantes. On le voit d'ailleurs dans les deux scénarios qui ont été testés : ils n'utilisent pas tout à fait les mêmes productions écrites, ce n'est pas la même séquence vidéo qui est visionnée, ce ne sont pas les mêmes documents complémentaires qui sont proposés.

Dans la suite de notre travail nous désirons formaliser des scénarios *modulables*, c'est-à-dire au choix du formateur, tout en explorant d'autres thèmes mathématiques comme les probabilités.

BIBLIOGRAPHIE

Bronner A. (2005). Vers la recherche d'un milieu perdu pour l'apprentissage des nombres réels au collège : racine carrée et idécimalité, dans *Sur la théorie des situations didactiques*, Salin M.-H., Clanché P. et Sarrazy B. éditeurs, La Pensée Sauvage, pages 167-182.

Annexe 1 – Productions données à l'atelier : E1, E3, E6, E7 et E15



1) Pour calculer le volume de cette pyramide, il faut multiplier l'aire de la base (35 X 35 mètres soit 1225 m²) par la hauteur (21 mètres ~~en haut~~) puis diviser le tout par 3, ce qui donne : $\frac{1225 \times 21}{3} = 8575$. La pyramide du Louvre mesure donc 8575 m³.

2) Pour calculer cette superficie, il faut d'abord connaître ~~AC.~~ la longueur du segment AC. Pour cela, il faut considérer BAC comme un triangle rectangle dont AC est l'hypothénuse ; il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Pythagore selon lequel dans un triangle rectangle la longueur de l'hypothénuse est égale à la racine carrée de la somme des carrés des deux autres côtés. Donc, $AC = \sqrt{BA^2+BC^2} = \sqrt{35^2+35^2} = \sqrt{2450}$. Le segment OC mesure donc ~~1225~~ $\cancel{\sqrt{1225}}$ $\frac{\sqrt{2450}}{2}$. Ensuite grâce au théorème de Pythagore et au fait que le triangle SOC est rectangle, on peut calculer ~~SC car~~ la longueur du segment SC comme ceci : $SC = \sqrt{SO^2+OC^2} = \sqrt{441+\left(\frac{\sqrt{2450}}{2}\right)^2} = \sqrt{1666}$.

Figure 3 – Production de l'élève E1

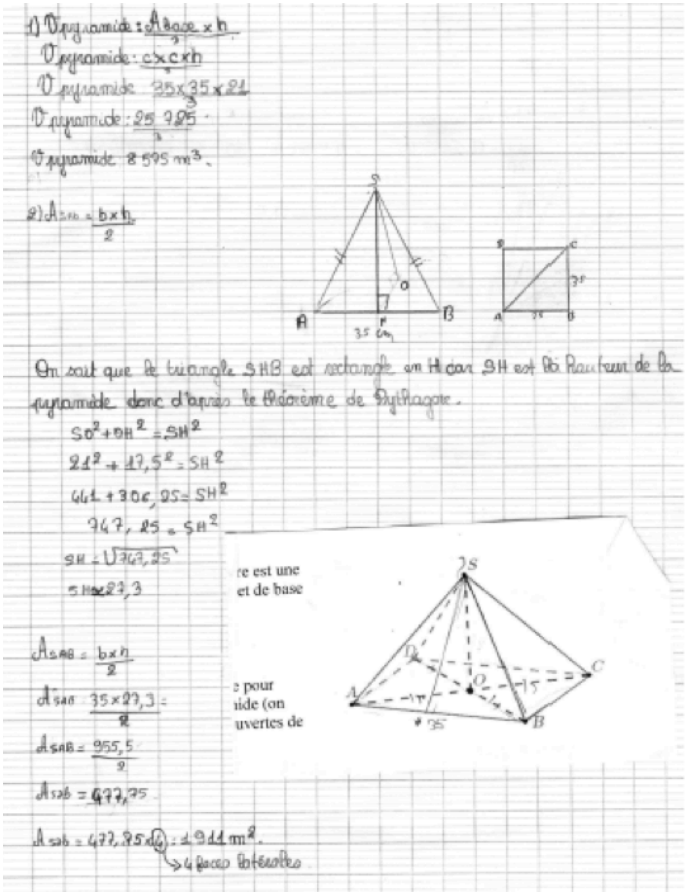
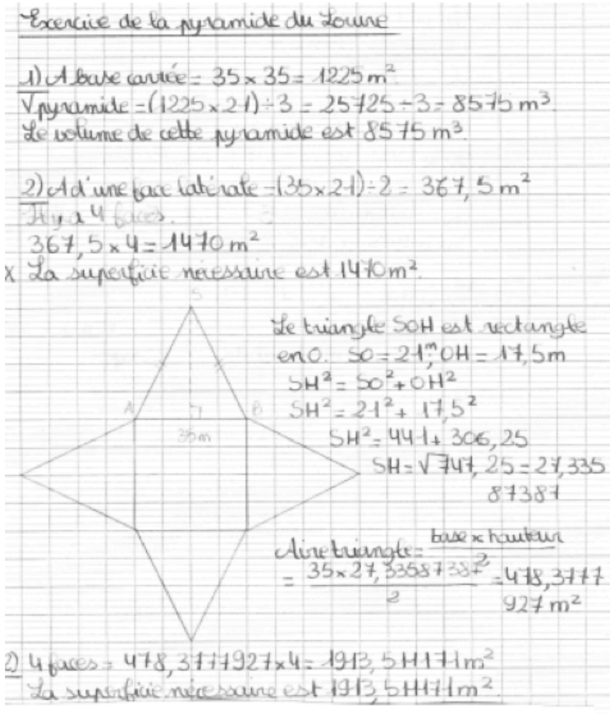


Figure 4 – Production de l'élève E4



Exercice de la pyramide du Louvre

1) A base carrée = 35 x 35 = 1225 m²
V pyramide = (1225 x 21) ÷ 3 = 25725 ÷ 3 = 8575 m³
Le volume de cette pyramide est 8575 m³

2) A d'une face latérale = (35 x 21) ÷ 2 = 367,5 m²
~~Il y a 4 faces.~~
367,5 x 4 = 1470 m²
X La superficie nécessaire est 1470 m²

Le triangle SOH est rectangle en O. SO = 21 m, OH = 17,5 m
SH² = SO² + OH²
SH² = 21² + 17,5²
SH² = 441 + 306,25
SH = √747,25 = 27,33587387

Aire triangle = base x hauteur / 2
= 35 x 27,33587387 / 2 = 478,3777927 m²

2) 4 faces = 478,3777927 x 4 = 1913,511171 m²
La superficie nécessaire est 1913,511171 m²

Figure 5 – Production de l'élève E6

Exercice de mathématiques.

~~1/ V pyramide = Aire de base x hauteur / 2 = 1225 x 21 / 2 = 12862,5~~

→ Aire de la base = 35 x 35 = 1225 m²

1/ V pyramide = Aire de la base x hauteur / 3 = 1225 x 21 / 3 = 8575 m³

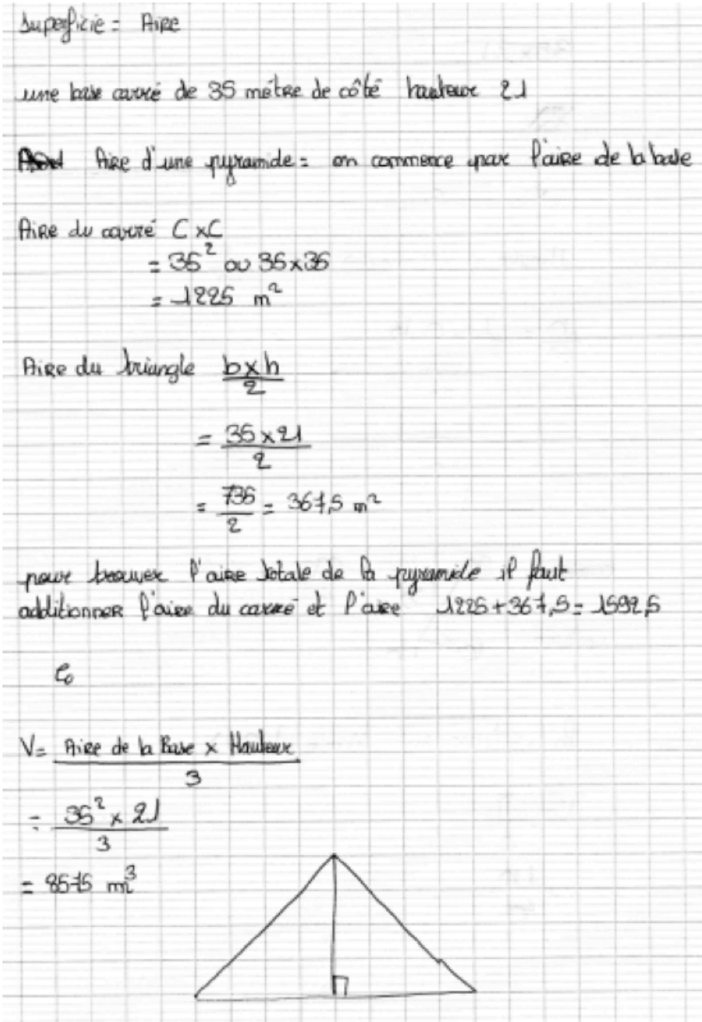
2/ Sachant que OH est la moitié de CB, elle mesure la moitié de 35 cm, soit 17,5 cm. Donc on peut calculer SH grâce au théorème de Pythagore. Le triangle SOH est rectangle en O. Or, d'après le théorème de pythagore, car OS est la hauteur de la pyramide.
SH² = SO² + HO²
= SH² = 21² + 17,5²
= SH² = 441 + 306,25
= SH² = 747,25
= SH = √747,25 ≃ 27,34 m

Comme on connait la hauteur des triangles (27,34 m), on peut maintenant calculer l'aire d'une face latérale.
→ Aire du triangle = B x hauteur / 2 = 35 x 27,34 / 2 ≃ 478,37 m²

Aire des 4 triangles = 478,37 x 4 = 1913,48 m².

⇒ La superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide est de 1913,48 m².

Figure 6 – Production de l'élève E7


Superficie = Aire

une base carré de 35 mètre de côté hauteur 21

~~Aire~~ Aire d'une pyramide = on commence par l'aire de la base

Aire du carré $C \times C$
$= 35^2$ ou 35×35
$= 1225\ m^2$

Aire du triangle $\frac{b \times h}{2}$

$= \frac{35 \times 21}{2}$

$= \frac{735}{2} = 367{,}5\ m^2$

pour trouver l'aire totale de la pyramide il faut additionner l'aire du carré et l'aire $1225 + 367{,}5 = 1592{,}5$

$V = \frac{\text{Aire de la Base} \times \text{Hauteur}}{3}$

$= \frac{35^2 \times 21}{3}$

$= 8575\ m^3$

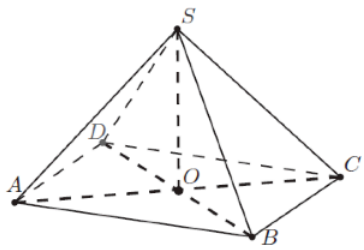
Figure 7 – Production de l'élève E15

Annexe 2 – Sujet d'oral 2 du CAPES 2012, exercice de la *pyramide*

Thème : Grandeurs et mesures

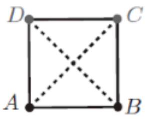
L'exercice

La pyramide du Louvre schématisée ci-contre est une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté.

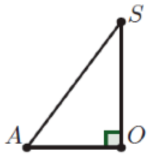


1) Calculer le volume de cette pyramide.
2) Calculer la superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide (on convient que les faces sont totalement recouvertes de verre).

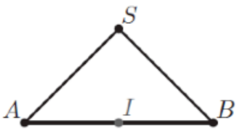
La réponse d'un élève à la question 2) :



On utilise Pythagore : $OA = \sqrt{17,5^2 + 17,5^2} = \sqrt{612,5}$



On utilise à nouveau Pythagore : $AS = \sqrt{612,5 + 21^2} = \sqrt{1053,5}$



On appelle I *le milieu de* $[AB]$: $IS^2 = AS^2 - AI^2$
donc $IS \approx 27,33$

On a quatre faces donc $4 \times \dfrac{35 \times 27,33}{2} \approx 1913,1\ m^2$

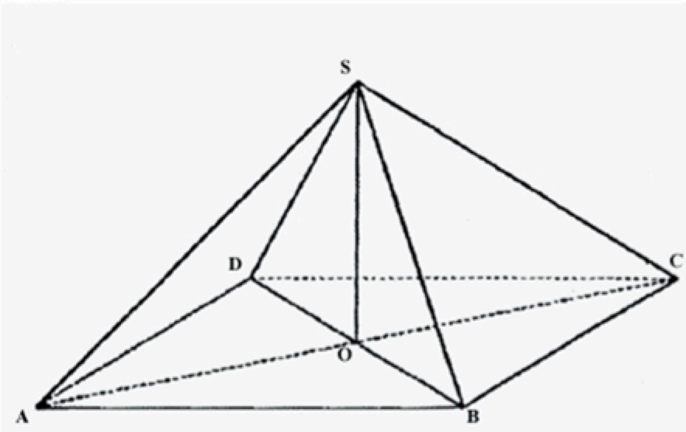
Le travail à exposer devant le jury

1- Analyser la production de l'élève, en particulier la prise d'initiative, la capacité à s'engager dans une démarche, à exposer un raisonnement et à mener les calculs.
2- Proposer une démonstration aboutie en complétant ou en modifiant la démarche de l'élève telle que vous la présenteriez devant une classe.
3- Proposer plusieurs exercices à différents niveaux (collège et lycée) sur le thème grandeurs et mesures.

Annexe 3 – Sujet du Brevet National des Collèges 2000

PARTIE A :

Paul en visite à Paris admire la Pyramide, réalisée en verre feuilleté au centre de la cour intérieure du Louvre
Cette pyramide régulière a une base carrée ABCD de côté 35 mètres et pour hauteur le segment [SO] de longueur 22 mètres.



1) Calculer la valeur arrondie au mètre près de la longueur de la diagonale du carré ABCD.
2) Calculer la longueur de l'arête [SA] ; en donner une valeur arrondie au mètre près.
3) Réaliser un patron de cette pyramide à l'échelle 1/1000.

Annexe 4 – Les modèles de Bronner

Ces cinq modèles sont, en *deux mots* :

- CF : le modèle « formel », $\sqrt{a}$ est une expression formelle et n'est pas considérée comme un nombre ;
- CP : le modèle carré parfait, $\sqrt{a}$ n'existe que si a est un carré parfait ;
- CA≈ : le modèle approximation, les nombres ne sont pas assimilés aux valeurs approchées décimales, il y a une différenciation valeur exacte-valeur approchée ;
- CA : le modèle approximation *dégénéré* du précédent, la racine carrée est assimilée à l'opérateur de la machine à calculer ;
- CN : le modèle nombre, les racines carrées sont considérées comme des nombres, il y a une différenciation valeur exacte-valeur approchée, les *idécimaux*[30] sont reconnus comme des nombres.

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E12	E13	E14	E16
CF	CA≈	CA≈	CN	CP CA	CA	CA≈	CA≈	CA≈	CP CA	CP CA	CA≈	CP CA	CP CA

On ne peut se prononcer sur E11, E15, E17 et E18 car ces élèves n'ont pas fait les calculs issus du théorème de Pythagore. Pour certains élèves, il est difficile de se prononcer, nous avons donc mis deux propositions.

[30] Un *idécimal* est un nombre qui s'écrit avec une infinité de décimales (par opposition aux décimaux).