LOGIQUE ET LANGAGE DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES ET LA FORMATION

Zoé MESNIL
Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot

Résumé. Quiconque fait des mathématiques met en œuvre de la logique, mais elle ne paraît malheureusement pas toujours naturelle aux élèves. Le professeur de mathématiques est alors amené à se poser des questions qu'il ne s'était pas forcément posées dans son parcours mathématique : quelle est cette logique ? Que dire et comment ? Enseigner des notions de logique est d'autant plus difficile que les enseignants manquent de formation et de ressources sur ce sujet.

Les nouveaux programmes pour le lycée, publiés à partir de 2009 pour la classe de Seconde, mentionnent[1] explicitement des notions de logique telles que connecteurs ET et OU, implication, négation, quantificateur, types de raisonnement et y associent des objectifs d'enseignement. Ces notions sont de toute façon présentes dans l'activité mathématique, et l'on peut se demander s'il y a besoin de recommandations institutionnelles explicites pour que les enseignants en parlent. De fait, le programme de 2009 ne semble pas avoir beaucoup changé les pratiques : une bonne partie des enseignants déclarent que ces notions étaient déjà présentes dans leur enseignement (voir questionnaires du Groupe « Logique et raisonnement » de la CII Lycée, 2013, ou de la thèse Mesnil, 2014). La question du discours tenu sur ces notions se pose alors, d'autant plus si l'on a en tête le constat de V. Durand-Guerrier selon lequel « les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence » (Durand-Guerrier, 2005), et le fait que la logique mathématique est quasiment absente de la formation initiale actuelle des enseignants de mathématiques. Pourtant, même si ce qui est demandé aux enseignants n'est pas d'enseigner la logique mathématique, elle est une référence pertinente pour parler de logique en lien avec l'activité mathématique, et à ce titre devrait être présente dans la formation initiale de tout enseignant de mathématiques.

Je vais défendre ce point de vue en trois temps : d'abord, je montrerai sur un exemple comment je peux me servir de connaissances en logique mathématique pour comprendre ce que je fais quand je fais des mathématiques. Ensuite, j'argumenterai la nécessité d'une référence pour l'enseignement des notions de logique évoquées dans les nouveaux programmes en montrant l'imprécision des documents pouvant servir aux enseignants (programme, document ressource, manuels). Je terminerai en proposant un programme pour la formation qui aborde la logique mathématique à partir d'une étude naïve du discours mathématique.

[1] De nouveau : c'était déjà le cas dans les programmes de la période des mathématiques modernes, entre 1969 et 1981, mais pas dans les programmes entre 1981 et 2009.

Quand la logique mathématique nous aide à décrire, et à comprendre, ce que nous faisons quand nous faisons des mathématiques

Un premier exemple de phénomène langagier

Dans cette première partie, je propose de montrer comment la logique mathématique peut être utilisée pour décrire certains phénomènes langagiers que l'on rencontre dans l'activité mathématique. Je donne d'abord un rapide exemple pour expliciter ce que j'entends par « la logique peut être utilisée pour décrire un phénomène langagier » : quand on demande à un mathématicien ce qu'il peut dire à propos de la proposition P1 : « *n* est premier et *n* est impair », il est généralement embarrassé, ne comprend pas bien la question qui lui est posée, se prononce parfois en disant que « c'est vrai pour certaines valeurs de *n*, faux pour d'autres ». Demandons-lui ensuite ce qu'il peut dire à propos de la proposition P2 : « si *n* est premier alors *n* est impair ». Il est alors beaucoup moins hésitant, et affirme, contre-exemple à l'appui, que cette proposition est fausse. D'un point de vue linguistique, quelle différence y a t-il entre les deux propositions ? Elles sont toutes deux construites sur le même modèle : deux propositions (« *n* est premier » et « *n* est impair ») reliées par la conjonction « et » pour la première, la conjonction « si… alors… » pour la deuxième. Pourtant, comme je l'ai décrit, grand nombre de mathématiciens ne réagissent pas de la même façon face à ces deux propositions. Nous constatons qu'une différence linguistique minime, plutôt de nature *syntaxique*, c'est-à-dire liée à la forme des propositions, entraîne une différence importante, plutôt de nature *sémantique*, c'est-à-dire liée à l'interprétation, au sens des propositions. Il s'agit d'un phénomène dû à une utilisation particulière de la langue dans un certain contexte, c'est-à-dire lié au langage. Plus précisément, il s'agit ici de ce que l'on pourrait appeler une *pratique langagière de la communauté des mathématiciens* (Rebière, 2013). La logique mathématique fournit alors une référence pour comparer ces deux interprétations. Pour cela, nous allons procéder à une analyse de la structure logique de ces propositions, en utilisant le langage des prédicats. La proposition P1 est obtenue en faisant opérer le connecteur logique ET sur les deux propositions « *n* est premier » et « *n* est impair », ce qui donne la proposition « *n* est premier ET *n* est impair » (je note ici un « et » en majuscule pour faire ressortir le fait qu'il s'agit du connecteur logique[2]). Dans les deux propositions initiales, et dans la conjonction de ces deux propositions, la variable *n* est une variable libre (Hache et Mesnil, 2013), ces propositions « parlent » d'un individu qui s'appelle *n*, et sans renseignements supplémentaires sur cet individu, nous ne pouvons nous prononcer sur la valeur de vérité de ces propositions. De la même façon que le connecteur ET dans P1, nous pouvons interpréter la conjonction « si… alors… » dans la proposition P2 comme le connecteur IMPLIQUE : « *n* est premier IMPLIQUE *n* est impair ». Or, cette interprétation ne reflète pas l'usage : en effet, la variable *n* serait alors également une variable libre dans la proposition P2, et nous ne pourrions pas nous prononcer sur sa valeur de vérité (conformément à la table de vérité du connecteur IMPLIQUE, la proposition « *n* est premier IMPLIQUE *n* est impair » est par exemple vraie lorsque la variable *n* prend la valeur 5, car prémisse et conclusion sont vraies, ou la valeur 8, car la prémisse est fausse, mais elle est fausse quand la variable *n* prend la valeur 2, car la prémisse est vraie et la conclusion est fausse). L'usage chez les mathématiciens est d'interpréter la conjonction « si… alors… » (dans une proposition de la forme « si A[*x*] alors B[*x*] ») comme une implication universellement quantifiée, c'est-à-dire que P2 est lue comme : « pour tout entier *n*, *n* est premier IMPLIQUE *n* est impair ». Ce phénomène n'est cependant pas dû à l'utilisation de la conjonction « si… alors… » elle-même : face à la proposition « *n* est premier ⇒ *n* est impair », où la flèche représente clairement le connecteur IMPLIQUE, les mathématiciens

[2] Je pourrais également utiliser le symbole ∧, mais celui-ci n'est pas très usité.

réagissent de la même façon. Il s'agit d'une pratique de la communauté : les implications sont lues comme des propositions universellement quantifiées, quand bien même cette quantification n'est pas explicite. La logique mathématique permet de bien différencier les interprétations, en y associant différentes propositions d'un même langage formel de référence : d'une part l'implication entre propositions « *n* est premier IMPLIQUE *n* est impair », dans laquelle la variable *n* est libre, d'autre part l'implication universellement quantifiée « pour tout entier *n*, *n* est premier IMPLIQUE *n* est impair », dans laquelle la variable *n* est liée.

Voyons maintenant un autre exemple.

À une lettre près

Intéressons nous aux propositions suivantes :

(*) « 1 et -1 sont des solutions réelles de l'équation $x^4 - 1 = 0$ »

(**) « 1 et -1 sont les solutions réelles de l'équation $x^4 - 1 = 0$ »

Notons qu'une seule lettre a changé entre la proposition (*) et la proposition (**). Là encore, un changement syntaxique minime entraîne un changement sémantique important. Pour nous convaincre de cela, nous pourrions nous demander comment démontrer ces deux propositions. Pour la proposition (*), deux calculs sont suffisants : $1^4 - 1 = 0$ et $(-1)^4 - 1 = 0$. Ces calculs permettent de vérifier que 1 est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ et que –1 est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$. Pour la proposition (**), il faut non seulement vérifier cela, mais également que 1 et -1 sont les seules solutions réelles de cette équation. La structure de ces preuves est directement en lien avec la structure logique de ces propositions, que nous allons maintenant mettre au jour. Considérons pour cela un prédicat P[*t*] : « *t* est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ».

La proposition (*) est alors une reformulation de la proposition « P[1] ET P[-1] », obtenue en faisant opérer le connecteur logique ET sur les deux propositions P[1] et P[-1], c'est-à-dire en construisant leur conjonction. On passe de la proposition « 1 est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ET -1 est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ » à la proposition (*) par des manipulations de la langue française : tout d'abord une contraction par mise en facteur de « est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ », puis accord du verbe et de l'attribut qui doivent être mis au pluriel. Nous pourrions alors appeler le « et » de la proposition (*) un *et propositionnel* : il n'est pas directement employé entre deux propositions, mais il correspond tout de même à un connecteur logique ET dans une certaine reformulation de la proposition.

La proposition (**) n'est pas, sur le même modèle que la proposition (*), une reformulation de la conjonction des propositions « 1 est la solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ » et « -1 est la solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ». La structure d'une preuve de la proposition (**) est en lien direct avec sa structure logique : elle peut s'écrire comme une conjonction de trois propositions : « 1 est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ET -1 est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ET il n'y en a pas d'autre », ou encore, en utilisant le prédicat P[*t*] précédemment défini (première reformulation de la proposition (**), notée R1) :

R1 : « P[1] ET P[-1] ET pour tout réel *z*, si P[*z*], alors ($z = 1$ OU $z = -1$) »

La proposition (**) n'est pas la conjonction de deux propositions, le « et » qui y figure n'est pas un *et propositionnel*, il s'agit plutôt de ce que nous pourrions appeler un *et d'énumération*.

Mais la proposition (**) est également équivalente à la proposition (deuxième reformulation de la proposition (**), notée R2) :

R2 : « pour tout réel z, P[z] si et seulement si ($z = 1$ OU $z = -1$) »

Comparons maintenant les propositions R1 et R2 : notons tout d'abord que R2 est équivalente à « (pour tout réel z, si ($z = 1$ OU $z = -1$) alors P[z]) ET (pour tout réel z, si P[z] alors ($z = 1$ OU $z = -1$)) » : la première partie correspond au « si », la deuxième partie correspond au « seulement si », et par ailleurs, le quantificateur universel « se distribue » sur le connecteur ET[3]. Nous retrouvons ainsi dans le « seulement si » de R2 une partie de la proposition R1. Comparons maintenant « P[1] ET P[-1] » (dans R1) et « pour tout réel z, si ($z = 1$ OU $z = -1$) alors P[z] » (dans R2). Il est assez immédiat que la proposition « pour tout réel z, si $z = 1$ alors P[z] »[4] est équivalente à la proposition P[1] (ce qui est une façon beaucoup plus claire de dire la même chose). De plus, les propositions « si (A OU B) alors C » et « (si A alors C) ET (si B alors C) » sont équivalentes (il s'agit d'un petit exercice de calcul propositionnel, qui peut être résolu par exemple en faisant une table de vérité de chaque proposition). En utilisant encore une fois la distributivité du quantificateur universel sur le connecteur ET, la proposition « pour tout réel z, si ($z = 1$ OU $z = -1$) alors P[z] » est donc équivalente à la proposition « (pour tout réel z, si $z = 1$ alors P[z]) ET (pour tout réel z, si $z = -1$ alors P[z]) », c'est-à-dire à « P[1] ET P[-1] ».

La logique mathématique n'aide pas à résoudre la tâche qui consiste à montrer que les propositions (*) et (**) sont vraies. Elle aide à comprendre et à justifier les techniques utilisées dans la résolution de cette tâche. Nous pourrions dire qu'il y a une logique à l'œuvre dans la résolution de la tâche, qui peut être décrite en s'appuyant sur la logique mathématique.

Nécessité d'une formation en logique mathématique pour les enseignants de mathématiques

Puisqu'il y a de la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique, la logique est inévitablement présente dans la classe de mathématiques. D'une certaine façon, les nouveaux programmes de mathématiques pour le lycée rappellent la nécessité d'enseigner cette logique. Ils précisent bien cependant que cela ne consiste pas à enseigner des notions de logique mathématique, en définissant des objets et en en donnant certaines propriétés, mais à présenter des outils qui pourront aider les élèves dans l'apprentissage du langage et du raisonnement mathématiques.

Ces outils, les enseignants savent les utiliser quand ils font des mathématiques. Mais cette connaissance en acte n'est pas toujours reliée à des connaissances théoriques. Par exemple, n'importe quel enseignant de mathématiques sait montrer que la proposition « si un triangle est rectangle alors il est isocèle » est fausse, à l'aide d'un contre-exemple. Maintenant, demandons quelle est la négation de cette proposition. Les réponses sont moins unanimement « il existe un triangle rectangle qui n'est pas isocèle »[5]. Ainsi, la technique du contre-exemple, utilisée pour montrer qu'une implication est fausse, est une technique maîtrisée, opératoire dans l'activité mathématique des enseignants, mais elle n'est pas associée à la propriété qui la justifie, à savoir que la négation d'une proposition « pour tout x, si A[x] alors B[x] » est la proposition « il existe x tel que A[x] et NON(B)[x] ». Connaître cette propriété ne semble pas

[3] C'est-à-dire que quels que soient les prédicats A[x] et B[x], les propositions « pour tout x, (A[x] ET B[x]) » et « (pour tout x, A[x]) ET (pour tout x, B[x]) » sont équivalentes.

[4] Formulation inhabituelle, que l'on rencontre rarement sauf malheureusement dans certains exercices estampillés « logique » dans les manuels de lycée, du type Vrai/Faux : la formulation sous forme d'une implication, alors qu'il est évident qu'il n'y a qu'un élément qui vérifie la prémisse, apparaît comme un artifice inutile.

[5] Les réponses les plus couramment proposées pour la négation d'une implication « si A alors B » sont des implications combinant A, B et leurs négations, par exemple « si NON(A) alors B ».

indispensable pour que certaines personnes arrivent à utiliser la technique du contre-exemple. Elle me paraît par contre indispensable à toute personne qui doit l'enseigner, en tant que savoir relevant d'un savoir logique plus large qui organise, explique, permet de comprendre et d'unifier la logique en acte. Elle permet de ne pas la fonder uniquement sur l'intuition, sur le bon sens, qui n'est finalement peut-être pas la chose la mieux partagée du monde.

Je propose ci-après quelques extraits des instructions officielles et de manuels de Seconde pour illustrer comment ce manque de références théoriques amène à proposer aux élèves des textes qui à mon sens n'aident pas à comprendre les notions de logique concernées (exemples issus de Mesnil, 2014). Je les accompagne de quelques suggestions.

Dans les programmes et les manuels pour le lycée, premier exemple : connecteurs ET et OU

Dans les nouveaux programmes pour le lycée, il est indiqué d'entraîner les élèves, sur des exemples, « à utiliser correctement les connecteurs logiques "et", "ou" et à distinguer leur sens des sens courants de "et", "ou" dans le langage usuel ». Le discours sur ces notions est assez différent d'un manuel à l'autre (voir Hache et Mesnil, 2013). Bien sûr, tous les manuels qui parlent de notions de logique indiquent la distinction entre « ou » inclusif (présenté comme celui des mathématiques) et « ou » exclusif (présenté comme le plus utilisé dans le langage courant). Certains manuels opposent un usage des mots « et », « ou » « dans le langage courant » et un usage « en mathématiques ». Dans la proposition (**) étudiée dans le paragraphe précédent, il y a un « et » qui n'est pas un connecteur logique ET, pourtant l'exemple est bien pris en mathématiques. Ainsi, même à l'intérieur du langage utilisé en mathématiques, il y a des distinctions à souligner sur diverses utilisations du « et ». Or ces distinctions n'apparaissent dans aucun manuel, ni dans le document *Ressources pour la classe de Seconde. Notations et raisonnement mathématiques* qui accompagne le nouveau programme. Celui-ci propose les commentaires ci-dessous sur l'utilisation du « et » et du « ou » :

Le lien entre les connecteurs « et » et « ou » nécessite aussi d'être explicité.

Exemple 14

Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.
1. Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?
2. Les deux phrases suivantes : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>ou</u> l'option danse » et « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>et</u> tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

La première question met en évidence que l'intersection de deux ensembles est incluse dans leur réunion.
La seconde question montre une utilisation du mot « et » en langue naturelle qui correspond à une réunion.
Une analogie peut être faite avec l'emploi des mots « et » et « ou » dans la phrase suivante :
« $A(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ **ou** $x = 2$
donc les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont 1 **et** 2. ».

Figure 1 – Extrait du document Ressources sur « et, ou »

Dans le dernier exemple donné, nous retrouvons une proposition de la même forme que la proposition (**), avec un *et d'énumération*, ainsi que sa reformulation sous forme d'équivalence, avec un *ou propositionnel*. Mais la différence de statut entre le « ou » et le « et » n'est pas du tout explicitée. Je répète encore une fois un point essentiel qui est rarement mentionné dans ces termes : tous les « et » et tous les « ou » que l'on rencontre, même en mathématiques, ne correspondent pas à des connecteurs logiques ET et OU. Dans le langage

courant, « et » et « ou » sont des conjonctions de coordination entre deux éléments de même nature, et sont susceptibles de recevoir différents sens selon le contexte (d'où l'intérêt d'un travail en collaboration avec le professeur de français, voir par exemple les travaux du groupe GIL de l'IREM de Brest, 2014). Les connecteurs logiques ET et OU opèrent sur des propositions et ont une interprétation sémantique qui est donnée par leurs tables de vérité. Ces précisions méritent selon moi d'être mentionnées dans un document ressource à l'usage des enseignants : il me paraît essentiel que les enseignants aient une idée claire et précise de ce qu'est un connecteur logique, et de ce qui n'en est pas ! Dans l'exercice ci-après, extrait du manuel Pixel de Seconde, les mots utilisés laissent penser que la distinction n'est pas si claire.

2 Et, ou et contraposée *Logique*

ENONCE

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

si $x < 0$, $f(x) = -x - 2$; si $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$.

Pour chacune des affirmations proposées, dire si elle est vraie ou fausse.

1. a. « Les solutions de $f(x) = 1$ sont -3 ou 4. »

SOLUTION

1. Si l'on cherche **toutes** les valeurs de x telles que $f(x) = 1$, on trouve -3 et 4.
Les solutions de $f(x) = 1$ sont -3 **et** 4 ; l'affirmation a. est fausse.

Les affirmations :

« si $f(x) = 1$, alors $x = -3$ ou $x = 4$ »

et « si $x = -3$ ou si $x = 4$, alors $f(x) = 1$ »

sont vraies.

On peut alors écrire :
« $f(x) = 1$ si, et seulement si, $x = -3$ **ou** $x = 4$ »,
ou encore « $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -3$ **ou** $x = 4$ ».

Figure 2 – Extrait du manuel Pixel de Seconde sur « et, ou »

En effet, le problème de la phrase de la question 1.a telle qu'elle est énoncée n'est pas un problème de vérité ou de fausseté, mais d'abord un problème de correction grammaticale : l'utilisation de « les solutions sont… » demande que soient ensuite énumérées ces solutions, et une telle énumération se fait en utilisant un « et », mais qui n'est pas un connecteur logique ET, et non pas un « ou ».

Je retiens de l'étude de ces extraits plusieurs points sur les connecteurs ET et OU qui vont plus loin que ce qu'en dit le programme et qui méritent selon moi d'être connus des enseignants et des élèves :

- tout d'abord, le ET et le OU en mathématiques sont d'abord des connecteurs logiques ; du point de vue syntaxique, ce sont des opérateurs sur les propositions ; du point de vue sémantique, ils se définissent chacun par leur comportement par rapport aux valeurs de vérité ;
- le connecteur OU correspond au *ou inclusif*, ce qui le distingue du « ou » du langage courant qui est plus souvent exclusif (mais pas toujours) ;
- tous les « et » que l'on rencontre en mathématiques ne correspondent pas à des

connecteurs ET, nous rencontrons également des *et d'énumération* (les solutions de l'équation $(x-1)\ (x-3)=0$ sont 1 et 3), des *et couple* (les droites d et d' sont parallèles).

Dans les programmes et les manuels pour le lycée, deuxième exemple : négation et contre-exemple

Concernant la négation, les programmes indiquent d'entraîner les élèves, sur des exemples, à « formuler la négation d'une proposition ». Encore une fois, le document Ressources ne propose aucune considération théorique sur la négation, et même aucune indication de difficultés potentielles d'élèves. Il se contente de suggérer de proposer cette tâche à l'occasion de la formulation d'évènements contraires.

Je propose alors de m'appuyer sur des extraits de manuels pour montrer certains aspects complexes de la négation. Le premier extrait se trouve dans le manuel Transmath de Seconde :

6 Négation d'une proposition

6.1 Définition, exemples

À partir d'une proposition (P), on peut toujours énoncer une autre proposition notée (**non P**) qui est la négation de (P).

Exemples

- La négation de la proposition « le tableau de la classe **est** noir » est « le tableau de la classe **n'est pas** noir ».
- La négation de la proposition « le triangle ABC **est** isocèle » est « le triangle ABC **n'est pas** isocèle ».

Des deux propositions, évidemment, si l'une est vraie, l'autre est fausse.

Figure 3 – Extrait du manuel Transmath sur la négation

Dans cet extrait, l'aspect syntaxique de la négation en tant que connecteur est présent : à partir d'une proposition P, on peut former sa négation. L'aspect sémantique, c'est-à-dire « l'échange » des valeurs de vérité, est donné après des exemples, comme si celui-ci était une conséquence de la définition. Or, ces deux aspects participent au même titre à la définition de la notion de négation. Les exemples donnés sont des propositions élémentaires (sans connecteurs ni quantificateurs) exprimées « en mots » (c'est-à-dire n'utilisant pas de symboles mathématiques). Dans ce cas, la négation peut être obtenue dans ce registre de façon très simple en remplaçant le verbe par « ne + verbe + pas ». Cette technique est la même que celle que les élèves doivent utiliser dans les exercices de français dans lesquels ils doivent donner la forme négative d'une phrase. Mais dès que l'on considère des propositions complexes, cette technique n'est plus aussi efficace. En premier lieu, elle peut conduire à des propositions dont l'interprétation est ambiguë. La phrase « toutes les boules ne sont pas rouges » est un exemple bien connu (développé dans Durand-Guerrier 2005, Ben Kilani, 2005) : elle est majoritairement interprétée comme « il existe au moins une boule non-rouge », mais également parfois comme « toutes les boules sont non-rouges ». L'autre difficulté concerne les modalités d'application de cette technique dans le cas d'une proposition complexe. Considérons par exemple la proposition « tout nombre entier est un multiple de 2 ou un multiple de 3 ». Des élèves de Seconde avaient à donner la négation de cette proposition. Certains élèves ont alors juste remplacé « est » par « n'est pas », ce qui donne « tout nombre entier n'est pas un multiple de 2 ou un multiple de 3 ». D'autres ont « dédoublé » la négation sur le verbe, ce qui donne « tout nombre entier n'est pas un multiple de 2 ou n'est pas un

multiple de 3 ». Avec les ambiguïtés d'interprétation de ce type de phrase déjà mentionnées, difficile de savoir si ces élèves savent ou non quelle est la négation demandée, une possibilité étant qu'ils essaient d'appliquer une procédure syntaxique sans contrôle sémantique (c'est-à-dire sans se poser la question du sens de la négation donnée). Nous voyons à travers ces exemples qu'une des difficultés de la notion de négation est la distinction entre la tâche proposée en français « donner la forme négative » et la tâche proposée en mathématiques « donner la négation ». Les procédures syntaxiques pour obtenir la négation d'une proposition donnée sont d'autant plus efficaces que celle-ci est exprimée dans un registre formalisé (par exemple, pour peu que l'on connaisse ces procédures, il est assez simple de donner la négation de la proposition « quel que soit l'entier n, n est un multiple de 2 ou n est un multiple de 3 »). Or, le recours à un registre formalisé est généralement évité dans l'enseignement secondaire, ce qui rend plus complexe la tâche « donner la négation ». Sans exiger des élèves qu'ils soient capables seuls d'utiliser un langage formalisé, et de formuler des négations, le travail peut être fait collectivement sur de nombreux prédicats au fur et à mesure qu'ils sont rencontrés (par exemple, donner une expression formalisée de « la fonction f est croissante », de « la suite u est majorée », mais aussi de leurs négations).

Le deuxième extrait que je propose de regarder se trouve dans le manuel Hyperbole de Seconde :

La négation

La négation d'une proposition P, notée **non P**, est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie et qui est vraie lorsque P est fausse.

EXEMPLES

- La proposition « $6 > 5$ » est vraie ; sa négation « $6 \leqslant 5$ » est fausse.
- La proposition « $2 \times 3 = 5$ » est fausse ; sa négation « $2 \times 3 \neq 5$ » est vraie.

Figure 4 – Extrait du manuel Hyperbole sur la négation

Dans cet extrait, l'aspect sémantique est présent dans la définition. Au contraire du manuel Transmath, les exemples donnés sont des propositions formulées avec des symboles mathématiques et la négation est obtenue en remplaçant un symbole de relation par un autre symbole de relation. Deux cas sont présentés : dans le premier exemple, on a un couple de symboles, $>$ et $\leq$, dans le deuxième exemple, la négation est obtenue en remplaçant le symbole $=$ par le même symbole barré $\neq$. Plusieurs remarques manquent à mon avis pour faire ressortir l'intérêt de ces deux exemples, et donner du sens à la notion de négation. La première concerne l'utilisation des symboles barrés : elle fonctionne comme le couple est / n'est pas, elle est opératoire pour les propositions élémentaires, mais insuffisante pour formuler la négation de propositions plus complexes. Autre remarque à propos du symbole $\neq$: il peut se lire « n'est pas égal » ou « est différent ». Dernière remarque à propos du premier exemple : c'est une erreur courante chez des élèves de penser que la négation de $6 > 5$ est $6 < 5$. La définition qui est donnée ici est finalement insuffisante pour disqualifier cette réponse : en effet, on a bien d'une part une proposition fausse et d'autre part une proposition vraie. Pour mettre en évidence que le couple $> / \leq$ est un couple qui correspond à la négation, et non pas le couple $> / <$, il faut utiliser des propositions comportant au moins une variable libre : par exemple, la proposition « $x < 0$ » ne peut pas être la négation de la proposition « $x > 0$ » car quand la variable x prend la valeur 0, elles sont fausses toutes les deux.

L'extrait ci-après du manuel Math'x de Seconde me permet d'aborder un autre point important concernant la négation : la distinction entre négation et contraire.

2 Négation d'une proposition

La négation d'une proposition est la proposition obtenue en affirmant son « contraire ».

La négation d'une *proposition A* est vraie quand *A* est fausse, fausse quand *A* est vraie.

Exemples

- La négation de « 2 est un nombre pair » (vraie) est « 2 n'est pas un nombre pair » (fausse).
- La négation de « $x \geqslant 1$ « est « $x < 1$ ».
- La négation de « $x \in J$ » est « $x \notin J$ ».

Du point de vue des **ensembles** (voir page 350), la négation est à associer au complémentaire.

Figure 5 – Extrait du manuel Math'x sur la négation

Dans cet extrait, négation et contraire sont assimilés. Ces deux notions sont pourtant bien distinctes. Le TFLI[6] donne comme définition de « contraire » : qui présente l'opposition la plus extrême, la plus radicale. Suivant cette définition, il est correct de dire que le contraire de noir c'est blanc, et que le contraire de « tous les élèves sont présents » est « aucun élève n'est présent ». On voit bien que cette notion de contraire diffère de la notion de négation. Les élèves ayant parfois tendance à la confondre, il est essentiel de ne pas assimiler les deux (ce qui demande de prendre des précautions puisque l'on parle parfois de négation à l'occasion de la formulation de l'événement contraire…).

Les exemples donnés dans les extraits que j'ai choisis sont des propositions élémentaires.

Je retiendrai les points suivants concernant la négation de telles propositions :

- la négation est un connecteur unaire, qui « échange » les valeurs de vérité ;
- il y a plusieurs façons de formuler la négation d'une proposition élémentaire : en utilisant la forme négative « ne + verbe + pas », en utilisant un symbole barré, en utilisant un couple de prédicats (en mots ou en symboles) qui correspond à la négation ($> / \leq$, pair / impair pour les entiers, mais pas croissante / décroissante pour les fonctions).

Peu de manuels de Seconde donnent les règles de formulation de la négation pour des propositions complexes (le manuel Transmath est le seul à en faire une liste exhaustive : négation d'une proposition « P1 ET P2 », d'une proposition « P1 OU P2 », d'une proposition universelle, d'une proposition existentielle).

Parler explicitement de la négation des propositions quantifiées permet pourtant :

- de justifier la technique du contre-exemple, en reliant montrer qu'une proposition universelle est fausse et montrer qu'une proposition existentielle est vraie ; d'une façon plus générale, la négation permet d'expliquer les similitudes que l'on retrouve dans le tableau suivant (proposé par le groupe Logique de l'IREM de Paris), qui donne des indications sur la démonstration d'une proposition selon sa forme :

[6] Trésor de la Langue Française Informatisé

Type de phrase	Pour prouver qu'elle est vraie	Pour prouver qu'elle est fausse
Pour tout x , P[x]	Une valeur de *x* pour laquelle *P*[*x*] est vraie ne suffit pas. **Garder *x* !**	Une valeur de *x* pour laquelle *P*[*x*] est fausse suffit.
Il existe x , P[x]	Une valeur de *x* pour laquelle *P*[*x*] est vraie suffit.	Une valeur de *x* pour laquelle *P*[*x*] est fausse ne suffit pas. **Garder *x* !**

Figure 6 – Tableau des « pour prouver »

• d'expliquer la distinction entre négation et contraire ; en effet, la proposition « aucun *x* ne vérifie P[*x*] » correspond à « pour tout *x* NON(P)[*x*] », qui n'est donc pas la négation de « pour tout *x* P[*x*] » ; cette distinction entre négation et contraire était déjà présente dans la logique d'Aristote et les logiciens médiévaux l'ont reprise dans ce qu'ils ont appelé « le carré des oppositions » dont voici une version colorisée et modernisée dans le langage des prédicats :

Figure 7 – Carré des oppositions

Propositions pour la formation des enseignants

Les enseignants du secondaire rencontrent dans leur formation mathématique initiale les objets mathématiques sous une forme savante différente de la forme qu'ils prennent dans l'enseignement. Langage et raisonnement mathématiques sont étudiés en tant qu'objets mathématiques par la logique mathématique. Leur étude sous cet aspect me semble avoir tout à fait sa place dans cette formation initiale. Bien sûr, les connaissances mathématiques sur les notions de logiques ne sont pas suffisantes pour les enseigner. Tout d'abord parce que, comme toutes autres notions mathématiques, elles subissent un processus de transposition didactique : le savoir à enseigner est une adaptation du savoir savant, qui prend en compte la nécessité d'élaborer une progression dans la conceptualisation des notions. Mais également parce que, comme je l'ai déjà souligné, il ne s'agit de toute façon pas d'enseigner de la logique mathématique, mais d'enseigner de la logique utile pour faire des mathématiques. Des dispositifs de formation sont donc à imaginer, qui articulent l'approche mathématique des notions de la logique mathématique et leur utilisation dans l'activité mathématique. Je vais maintenant proposer une façon d'organiser cela, à partir d'une étude naïve du discours mathématique. Cette entrée est celle choisie dans une formation continue « Initiation à la

logique » proposée par l'IREM de Paris depuis 2009 (la description de cette formation a fait l'objet d'un atelier au colloque de la CORFEM 2012, voir Hache et Mesnil, 2013, elle est présentée et analysée dans Mesnil, 2014). Elle permet de faire prendre conscience aux enseignants des pratiques langagières de la communauté mathématique, qui sont largement importées dans la classe, et qui comportent un certain nombre de formulations dont on sous-estime parfois les ambiguïtés, les implicites, la complexité logique, autant d'éléments qui peuvent poser problème aux élèves. Nous avons déjà vu l'exemple de la quantification universelle implicite associée aux formulations en « si…, alors… ». C'est un exemple d'implicite pertinent, car quand on le souligne, des enseignants qui n'en avaient pas forcément conscience l'associent souvent à des réponses de certains de leurs élèves. Dans la formation « Initiation à la logique », nous l'utilisons régulièrement comme situation d'introduction, en proposant aux enseignants de se prononcer sur les deux propositions « n est premier ET n est impair » et « n est premier $\Longrightarrow$ n est impair ». Les notions de proposition, connecteur nous servent alors à souligner la similitude dans la structure logique des deux propositions, qui contraste avec la différence de réaction.

Proposition

La notion de proposition mathématique est essentielle dans l'étude du discours mathématique. Elle est première dans le sens où les notions de variable, connecteur, quantificateur peuvent ensuite être introduites comme des éléments constitutifs de ces propositions.

Une caractérisation naïve de cette notion suffit pour cela : une proposition mathématique dit un (ou des) fait(s) sur un (ou des) objet(s) mathématique(s), elle est susceptible d'être vraie ou fausse. Ainsi, « 3 est impair » est une proposition vraie, « 2 est impair » est une proposition fausse, « n est impair » (la variable n pouvant prendre ses valeurs dans $\mathbb{N}$) est une proposition pour laquelle cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question par manque d'information sur n. Par contre, « 3 est impair donc 3^2 est impair » n'est pas une proposition. Cette phrase ne met pas en jeu seulement des objets mathématiques, elle met en jeu une personne en train d'affirmer des propriétés de ces objets et qui fait un lien entre elles par une inférence. La question qui se pose à propos de cette phrase n'est pas celle de la vérité ou non d'une proposition, mais celle de la validité ou non d'un raisonnement (cette distinction entre vérité et validité est précisée dans Durand-Guerrier, 2005).

Pour être valide (on peut dire plus simplement « correct ») un raisonnement doit s'appuyer sur :

- une (ou des) prémisse(s) (hypothèses) vraie(s),
- un schéma de raisonnement valide.

Dans l'exemple donné, le raisonnement est correct, et dire que cette phrase est vraie ne nous dérange pas vraiment. Par contre, d'autres exemples peuvent amener à remettre en cause ce qualificatif inapproprié : « 2 est impair donc 2^2 est impair » s'appuie sur une prémisse fausse, mais sur un schéma de raisonnement valide (quel que soit l'entier naturel n, si n est impair alors n^2 est impair, or a est impair, donc a^2 est impair), alors à quoi devrait-on appliquer le qualificatif « vrai » ? Même question pour la phrase « 3 est premier donc 3^2 est impair » dont la prémisse et la conclusion sont vraies, mais qui ne s'appuie pas sur un schéma de raisonnement valide.

Variable

Dans certaines propositions mathématiques nous utilisons des variables. C'est le cas par exemple dans la proposition « n est premier ET n est impair » et dans la proposition « quel

que soit l'entier naturel n, si n est impair alors n^2 est impair ». Mais il y a une distinction fondamentale entre ces deux propositions concernant la variable n. D'un point de vue naïf, je dirais que la première proposition « parle » de n, elle dit quelque chose sur un objet qui s'appelle n, alors que la deuxième donne une propriété (il se trouve qu'elle est vraie) des entiers naturels, que je peux d'ailleurs formuler sans utiliser de variable : « le carré d'un entier naturel impair est impair ». D'un point de vue plus formel, on peut caractériser le statut de la variable n dans chacune de ces propositions : elle est parlante (ou libre) dans la première, muette (ou liée) dans la deuxième.

Repérer le statut des variables qui sont présentes dans des propositions peut aider à contrôler les équivalences entre elles : ainsi, la proposition « pour tout n, $u_n \leq M$ », dans laquelle la variable M est parlante, est équivalente à la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M » et non pas à la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » qui ne parle pas de M. Cette dernière proposition est équivalente à « il existe un réel M tel que pour tout n, $u_n \leq M$ », dans laquelle la variable M est muette, à cause du quantificateur existentiel. Cette notion de variable muette / parlante peut tout à fait vivre dans la classe, et à mon avis utilement, en se posant la question « de qui parle cette proposition ? ». Elle peut apporter un autre éclairage sur certains exercices, prenons par exemple un exercice classique en 1ère : déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ a deux solutions. On trouve que c'est pour $m < 1$. Finalement, nous avons montré que les propositions « l'équation $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ a deux solutions » et « $m < 1$ » sont équivalentes. Et il est très facile de voir quand est-ce que la deuxième est vraie[7]. On peut faire remarquer que la variable x, qui était muette dans la première proposition, a disparu dans la deuxième, et utiliser cette idée pour disqualifier la réponse d'un élève qui proposerait « $m = (-2\,x + 1) / x^2$ ».

Calcul propositionnel et connecteurs

Un connecteur est un opérateur sur les propositions. Le connecteur NON opère sur une proposition P, et permet d'obtenir sa négation NON(P), les connecteurs ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À opèrent sur deux propositions P, Q, et permettent d'obtenir la conjonction (P ET Q), la disjonction (P OU Q), l'implication ($P \Longrightarrow Q$) et l'équivalence ($P \Longleftrightarrow Q$). Cet aspect syntaxique des connecteurs est important dans la distinction entre *et propositionnel* et *et couple* par exemple.

Quand on se contente de considérer les propositions comme des variables pouvant prendre la valeur VRAI ou FAUX (on parle alors de variables propositionnelles), et de regarder les propositions construites à partir de ces variables propositionnelles et des connecteurs, on reste dans le cadre du calcul propositionnel. Dans ce cadre, on peut associer à chaque connecteur une table de vérité : c'est l'aspect sémantique des connecteurs, qui dit comment ils se comportent par rapport aux valeurs de vérité. Les tables de vérité sont souvent vues comme un ostensif formel, et l'utilisation de ces tables comme une manipulation vide de sens. Elles permettent pourtant d'établir certaines équivalences entre propositions, ou certaines tautologies (propositions vraies quelle que soit la valeur des variables propositionnelles qu'elles comportent) importantes à connaître, parce que liées au raisonnement.

Je donne quelques exemples :

- la proposition ($A \Longrightarrow B$) est équivalente à (NON(A) OU B) et la proposition NON($A \Longrightarrow B$) est équivalente à (A ET NON(B)) ;

[7] On retrouve la démarche de résolution d'une équation qui consiste effectivement à donner une proposition simple, du type $x = a$, équivalente à une proposition initiale plus complexe, une égalité entre deux expressions algébriques. L'équivalence entre les deux propositions, et la simplicité de la deuxième, permet de dire quand est-ce que la première est vraie.

• la proposition ((A ET (A ⟹ B)) ⟹ B) est une tautologie, à associer au schéma de raisonnement très utilisé : si A alors B, or A, donc B (schéma appelé *modus ponens*) ;
• les propositions ((A ET B) ⟹ C) et (A ⟹ (B ⟹ C)) sont équivalentes ; on appelle parfois « réciproque » d'une proposition de la forme ((A ET B) ⟹ C) la proposition ((A ET C) ⟹ B), et non pas (C ⟹ (A ET B)) (théorème de la droite des milieux par exemple) ; le nom de réciproque se justifie alors en regardant la forme équivalente (A ⟹ (B ⟹ C)) : on prend bien la réciproque de la deuxième implication ;
• les propositions ((A ⟹ C) ET (B ⟹ C)) et ((A OU B) ⟹ C) sont équivalentes, ce qui justifie le schéma du raisonnement par disjonction de cas.

Langage des prédicats et quantificateurs

La logique propositionnelle est insuffisante pour décrire la logique à l'œuvre en mathématiques. Avec le calcul des prédicats, la logique mathématique « rentre » à l'intérieur des propositions. Un prédicat est une expression « incomplète », destinée à être complétée par un ou plusieurs noms d'objets. Par exemple, « être pair » est un prédicat unaire, destiné à être complété par le nom d'un entier, « être croissante » est un prédicat unaire, destiné à être complété par le nom d'une fonction, « être inférieur à » est un prédicat binaire, destiné à être complété par les noms de deux réels.

À partir d'un prédicat P, on peut construire des propositions :
• en marquant la place de l'argument auquel s'applique le prédicat avec une variable, en précisant à quel domaine cette variable est astreinte ; on obtient alors une proposition P[x] dans laquelle la variable x est libre ; par exemple : « x est pair », proposition dans laquelle la variable x est astreinte à $\mathbb{Z}$;
• en mettant à la place de l'argument (ou des arguments) auquel s'applique le prédicat le nom d'un objet singulier ; par exemple : « 2 est inférieur à 3 ».

On peut bien sûr avoir recours à ces deux possibilités, et construire par exemple la proposition « x est inférieur à 3 ».

Nous avons déjà vu dans la première partie de ce texte (exemple de la proposition « 1 et -1 sont les solutions réelles de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ») comment les propositions mathématiques peuvent être modélisées dans le langage des prédicats en utilisant des prédicats, les connecteurs et les quantificateurs. D'un point de vue sémantique, on doit à Tarski une caractérisation mathématique de la notion de « être vraie » avec la notion de satisfaction d'une proposition (voir Durand Guerrier, 2005, pour une approche historique et une utilisation didactique de cette notion). Je propose quelques exemples pour illustrer la définition de cette notion, on pourra se reporter à un manuel de logique mathématique pour plus de précision (par exemple Cori Lascar, 1993 ; on trouve aussi une présentation de cette notion dans l'annexe A de Mesnil, 2014). Considérons des prédicats unaires P, Q destinés à être complétés par un élément d'un ensemble E.

On dira :
• l'élément a de E satisfait la proposition P[x] lorsque la proposition P[a] est vraie ;
• l'élément a de E satisfait la proposition (P[x] ET Q[x]) lorsque les propositions P[a] et Q[a] sont vraies ;
• la proposition $\forall x \in$E P[x] est satisfaite lorsque pour chaque élément a de E la proposition P[a] est vraie ;
• la proposition $\exists x \in$E P[x] est satisfaite lorsqu'il existe au moins un élément a de E pour lequel la proposition P[a] est vraie.

Nous avons déjà vu comment le langage des prédicats est une référence formelle qui permet par exemple d'expliciter certains phénomènes langagiers (exemple des formulations en « si…, alors… »), de souligner la différence entre négation et contraire, entre connecteur IMPLIQUE et implication universellement quantifiée. Il permet aussi de mettre au jour la structure logique des propositions (Selden et Selden, 1995) et de faire des liens entre cette structure logique et la structure d'une preuve de ces propositions, ou la façon d'utiliser ces propositions dans une preuve.

Théorie de la démonstration et types de raisonnement

Les modélisations des démonstrations que propose la logique mathématique sont beaucoup moins connues que le langage des prédicats. Les mathématiciens utilisent fréquemment des formulations qui sont assez proches de la modélisation dans le langage des prédicats (si ce n'est que les prédicats sont décrits explicitement, et non marqués par une variable P, Q…). Par contre, la rédaction des démonstrations reste éloignée du formalisme qu'en propose la logique mathématique, d'une part parce que ces démonstrations sont ponctuées de commentaires qui servent à donner des indications au lecteur sur les variables utilisées, les inférences faites, d'autre part parce que nous choisissons dans ces démonstrations de détailler certains passages en explicitant rigoureusement toutes les inférences, ou au contraire de passer rapidement d'une hypothèse à une conclusion sans relater tout le chemin déductif entre les deux.

La déduction naturelle est une théorie de la démonstration qui se veut proche des modes de raisonnement habituels en mathématiques. La modélisation dans un tel système permet une analyse logique non plus des propositions seulement, mais des preuves à l'intérieur desquelles sont agencées ces propositions.

Donner à voir un tel système amène à prendre conscience :

- de la complexité de la gestion des variables dans une preuve (voir par exemple Chellougui, 2004),
- de la dialectique entre la position de démonstrateur et la position d'utilisateur d'une proposition dans une preuve, en lien avec les règles d'introduction et d'élimination.

Par ailleurs, une théorie logique de référence permet aussi d'expliciter les schémas des types de raisonnements, et d'en justifier la validité. Nous avons déjà vu un lien possible entre les tautologies et les types de raisonnement. Je donne un autre exemple avec la distinction entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée.

Le raisonnement par l'absurde consiste à démontrer que faire l'hypothèse que la négation d'une proposition P est vraie amène à une contradiction. On en déduit alors que la proposition P est vraie. Le raisonnement par contraposée est utilisé pour démontrer une implication : il consiste à démontrer sa contraposée, qui lui est équivalente[8]. Regardons comment nous ferions pour démontrer une implication ($A \Longrightarrow B$) en raisonnant par l'absurde : on suppose sa négation vraie, c'est-à-dire qu'on suppose (A ET NON(B)) vraie. S'ensuit alors une démonstration qui aboutit à une contradiction. Parfois, la contradiction vient du fait que l'on a montré NON(A), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse A. Et pour cela, on a parfois seulement utilisé l'hypothèse NON(B). Dans ce cas, le raisonnement par l'absurde peut être rédigé sous la forme d'un raisonnement par contraposée : on part de la seule hypothèse NON(B) et on montre NON(A), on a donc montré ($NON(B) \Longrightarrow NON(A)$), et donc ($A \Longrightarrow B$). Les deux extraits de manuels de Seconde ci-dessous illustrent la différence entre les deux canevas de ces raisonnements :

[8] On parle parfois aussi de raisonnement par contraposée pour le schéma suivant : si A alors B, or NON(B) donc NON(A) (schéma appelé *modus tollens*). Pour ma part, je parle alors de raisonnement par contraposition, pour distinguer les deux.

8.2 Démonstration par l'absurde

« Absurde » signifie « contraire à la raison, au bon sens ».

Exemple. Démontrer que pour tout entier n, la proposition (P) : « n^2 est un entier pair » implique la proposition (Q) : « n est un entier pair ».
Démontrons par l'absurde cette implication. Supposons donc qu'il existe un entier n tel que n^2 soit pair et n soit non pair, c'est-à-dire tel que n soit impair. Alors, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. D'où $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi, $n^2 = 2k + 1$, avec $k = 2p^2 + 2p$, entier.
Donc n^2 est impair, ce qui contredit « n^2 est pair ».
Donc : Si « n^2 est pair » implique « n est pair ».

Figure 8 – Raisonnement par l'absurde dans le manuel Transmath Seconde

2 Démonstration par la contraposée

Énoncé : Démontrer que si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair.
Solution
La contraposée de la proposition à démontrer est : « si un entier naturel n est impair, alors n^2 est impair ».
On suppose que n est impair, c'est-à-dire $n = 2k + 1$ avec k entier naturel.
Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et donc n^2 est impair.
La contraposée est donc vraie ; par conséquent, la proposition « si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair » est vraie.

Figure 9 – Raisonnement par contraposée dans le manuel Hyperbole Seconde

On voit bien en comparant ces deux démonstrations que la différence est essentiellement due à la mise en forme. Sans trop insister sur cette subtile distinction avec les élèves, il est important que les enseignants aient les idées claires pour pouvoir répondre à d'éventuelles questions.

Conclusion

Dans cette communication, j'ai défendu la nécessité d'une formation en logique mathématique pour les enseignants de mathématiques, formation qui contiendrait des bases théoriques solides sur les notions de logique en tant qu'objet, articulées avec leur utilisation comme outil dans l'activité mathématique. Dans un premier temps, j'ai montré comment l'analyse logique s'appuyant sur une modélisation des propositions à l'aide du langage des prédicats permet de voir qu'une petite lettre qui change entre les propositions « 1 et -1 sont des solutions réelles de l'équation $x^4 - 1 = 0$ » et « 1 et -1 sont les solutions réelles de l'équation $x^4 - 1 = 0$ » amène un changement important au niveau du sens, qui aura comme conséquence une différence entre les démonstrations des deux propositions. J'ai ensuite montré des discours confus dans les textes officiels (programme et document ressource) et les manuels sur les connecteurs ET et OU et sur la négation, dus à un manque de référence pour ces notions. Ici encore, la logique mathématique est une référence pour éclairer certains points : distinction entre *et couple* et *et propositionnel*, distinction entre négation et contraire… J'ai finalement exposé une approche de la logique mathématique en lien avec l'activité mathématique qui s'appuie sur l'étude naïve du discours mathématique. Cette approche constitue une proposition de formation, mise en œuvre dans une formation continue proposée par l'IREM de Paris.

La transposition didactique des notions de logique au lycée ne peut pas se penser selon le schéma classique : la logique mathématique est un savoir savant qui étudie ces notions en tant

qu'objets mathématiques, mais cette approche n'est pas du tout celle visée. Cela semble raisonnable au lycée, et même au début du supérieur : il faut une bonne pratique des mathématiques pour aborder la logique mathématique avec le recul nécessaire pour que cela puisse être fructueux pour l'activité mathématique. Dans cette optique, le programme suggère de s'appuyer sur des situations à partir desquelles les élèves pourraient dégager les principes de la logique mathématique, ce qui paraît tout-à-fait judicieux. Mais il manque actuellement un corpus qui fasse consensus sur les notions dont la connaissance est nécessaire pour comprendre ces principes, et sur le discours à tenir sur ces notions (notamment sur le niveau de formalisation de ce discours). Il me paraît urgent de réfléchir collectivement pour construire un *savoir de référence*, qui constituerait un programme minimum pour la formation des enseignants, et permettrait de réfléchir à l'enseignement de ces notions dès le secondaire.

Références bibliographiques

Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

Cori, R., et Lascar, D. (1993). *Logique mathématique tome 1. Calcul propositionnel ; algèbre de boole ; calcul des prédicats.* Paris : Masson.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonne- ment mathématique dans une perspective didactique*. Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

Groupe "Logique et raisonnement" de la CII Lycée (2013) Un "retour" de la logique dans les programmes du lycée : une occasion à ne pas manquer ! Bouvart, G., Forgeoux, E., Fabert, C., Grenier, D., Mesnil, Z., *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée : et alors ?*, IREM de Paris.

Groupe IREM de logique, GIL (2014) *La logique au fil de l'eau, réflexion collaborative entre mathématique et français*. Université de Bretagne Occidentale, IREM de Brest.

Hache, C., et Mesnil, Z. (2013). Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques. *Corfem, actes des 18ème et 19ème colloques* (pp. 201–223). M. Gandit & B. Grugeon-Allys (Eds.), Université et IUFM de Franche- Comté.

Mesnil, Z. (2014) *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, actes de la 16ème École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 219–232). A. Bronner et al. (Eds.), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Selden, A., & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29(2)* (pp. 123-151).