

LA PRATIQUE DES PROBLEMES DE RECHERCHE POUR ENSEIGNER LA LOGIQUE ET LES
RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES

Denise GRENIER
Institut Fourier & IREM & Fédération de Recherche Maths-à-Modeler
Université de Grenoble

Résumé – Les savoir-faire nécessaires pour faire des mathématiques ne peuvent s'acquérir que si on les pratique soi-même. Les Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) que nous proposons permettent aux élèves de tous niveaux de construire eux-mêmes leurs conjectures, de les étudier avec des exemples ou contre-exemples à leur portée, et d'en établir des preuves partielles ou complètes. Après avoir précisé les enjeux d'enseignement de la logique au Secondaire, nous présentons des exemples analysés de SiRC.

Introduction

Les savoir-faire nécessaires pour faire des mathématiques ne peuvent s'acquérir que si on les pratique soi-même et de manière autonome. C'est ce qui est d'ailleurs prescrit dans les programmes de collège et lycée actuels. Les enseignants du Secondaire inscrits dans nos stages de formation continue sur ce thème ont des demandes fortes d'outils (problèmes, définitions) pour enseigner le raisonnement et la logique au programme du collège et du lycée, et des questions sur l'intérêt d'enseigner ces notions à ce niveau.

Les situations de Recherche pour la Classe (SiRC) sont étudiées depuis de nombreuses années dans la Fédération de Recherche Maths-à-Modeler¹ et dans le groupe « Logique et SiRC » de l'IREM de Grenoble. Elles ont la spécificité de permettre aux élèves de tous niveaux de construire eux-mêmes leurs conjectures, de les étudier avec des exemples ou contre-exemples à leur portée, et d'en établir des preuves partielles ou complètes. Après avoir précisé les enjeux d'enseignement de la logique qui nous semblent raisonnables dans le Secondaire, nous précisons les caractéristiques d'une SiRC et en donnons quelques exemples (certaines sont devenues classiques), accompagnées d'une analyse de la logique et des raisonnements qu'elles permettent de construire chez les élèves, et des éléments de gestion dans la classe.

¹ Responsable Sylvain Gravier, DR CNRS maths discrètes. Maths-à-modeler rassemble de nombreux chercheurs, enseignants, élèves. Site : <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr>

1. Constats sur les connaissances des étudiants en logique

1.1 Difficultés durables et nombreuses

Nos travaux depuis de nombreuses années, attestent des méconnaissances des élèves du Secondaire mais aussi des étudiants en Sciences, des bases du raisonnement mathématique et de la logique. Les programmes du Secondaire suggèrent de faire travailler la logique sur des propositions de la vie courante, ou au fil des chapitres du programme, et de nombreux manuels reprennent cette idée. La question est de savoir jusqu'où cela peut être possible, et si c'est vraiment pertinent.

Exemple 1. Le(s) sens de l'implication

Voici deux copies d'élèves (très représentatives d'un grand nombre de réponses) concernant la compréhension du « si...alors » dans un contexte de logique commune. Ce problème est tiré d'un questionnaire proposé à des élèves et étudiants de Secondes, L1-L2 sciences, Classes prépas (Fabert 2011).

Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert." *si → alors*

L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? (O)

S'il ne la mange pas ? (NPPS)

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe." *si et seulement si*

Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.)

Oui : *s'il ne mange pas la soupe il n'aura pas de dessert.*

Figure 1 – Elève de Terminale S

Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."

L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? O

S'il ne la mange pas ? NPPS

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."

Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) Oui

il aurait un dessert, seulement si il mange la soupe alors qu'avant il aurait très bien pu en avoir un s'il ne la mangeait pas.

Figure 2 – Elève de Classe Préparatoire

Ces deux copies révèlent plusieurs difficultés :

- la phrase « B si A » n'est pas reconnue comme équivalente à « Si A alors B », il semble

- y avoir une prévalence de l'ordre des phrases dans la compréhension de l'implication ;
- l'implication est confondue avec sa réciproque, ou alors tout ceci est une équivalence (le « **si** et seulement si » est évoqué).

Le contexte a probablement une influence sur cette interprétation. Mais que peut-on faire avec ce type de phrase du point de vue de la logique ? On peut dire aux élèves que, si le père et l'enfant sont d'accord sur une interprétation de la phrase, ce n'est justement pas celle qu'on fera en mathématiques ! Affirmation que l'on ne pourra pas négocier, car écrire la réciproque oblige à mettre une temporalité différente dans la phrase : « si tu as un dessert, alors tu as mangé ta soupe » ? Tout ceci est peu convaincant.

Exemple 2. Quantificateurs et implications avec prémisses fausses.

Voici un extrait d'un problème posé en L1-L2 sciences (Rolland 1999), puis pendant plusieurs années en 3^{ème} année de Licence de mathématiques (Fabert & Grenier 2011).

Les propositions suivantes sont-elles Vraies, Fausses, ou On ne peut pas savoir ? Justifiez.

k est un entier quelconque

(a)	$k \text{ pair} \Rightarrow k+1 \text{ impair}$
(b)	$k \text{ pair} \Rightarrow k+1 \text{ pair}$
(a')	$3 \text{ pair} \Rightarrow 4 \text{ impair}$
(b')	$3 \text{ pair} \Rightarrow 4 \text{ pair}$

Plusieurs questions sont en jeu ici :

- l'interprétation du « k quelconque » : quantificateur universel ou élément générique ?
- quels types de justification peut-on donner : preuve déductive, par contre-exemple, autre ?
- quel sens ont pour les étudiants les propositions (a') et (b') construites avec une prémisse fausse ?

Les réponses des étudiants de L3 maths sont stables depuis quinze ans. Elles montrent qu'il y a un vrai travail à faire à la fois sur les écritures et la compréhension des quantificateurs (et du contre-exemple) et sur le statut Vrai-Faux d'une implication quantifiée ou non. En voici une synthèse.

Pour (a), la réponse est unanimement « Vraie » et ne soulève aucune difficulté. La preuve est sous forme de raisonnement déductif consistant majoritairement à redémontrer qu'un nombre pair est suivi d'un nombre impair (!).

Pour (b), il y a deux types de réponse :

« Fausse », accompagnée d'un contre-exemple, ce qui est compatible avec une interprétation en quantification universelle de « k est un entier quelconque »
ou « On ne peut pas savoir », attestant d'une interprétation de k comme élément générique) : « cela dépend si k est vraiment pair ou non ».

Pour (a') : les réponses « Fausse » et « Vraie » sont présentes et bien sûr les arguments sont de natures différentes. La réponse Vraie est justifiée par le fait que (a') est un cas particulier de (a). La réponse « Fausse » est justifiée par des arguments tels que « Il y a deux raisons pour lesquelles c'est

faux : 3 n'est pas pair et 4 n'est pas impair ». Mais, après discussion, on a aussi « mais elle pourrait être vraie si on redéfinissait les pairs et les impairs. »

Pour (b'), la réponse très majoritaire est « Fausse », accompagnée soit d'un argument de type « fausse pour deux raisons : 3 n'est pas pair et deux entiers consécutifs n'ont pas la même parité », soit « parce que c'est un cas particulier de (b) ».

Exemple 3. L'implication dans un raisonnement par récurrence (hérédité) (L3 et M1 maths) (Grenier 2012)

La connaissance en jeu est la suivante : Si une propriété P dépendant d'un entier n est héréditaire et que l'on peut initialiser le processus, le principe de récurrence permet de déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est vraie.

Question. Étude du caractère *héréditaire* des deux propriétés suivantes :

$P(n) : 10^n - 1$ est divisible par 9

$Q(n) : 10^n + 1$ est divisible par 9

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ est-elle vraie ?

Pour $P(n)$, il n'y a pas de difficultés particulières. C'est un exercice classique (au lycée et en début d'université) d'application du principe de récurrence. Voici une preuve que P est héréditaire pour tout entier naturel :

$\forall n \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $10^{n+1} - 1 = (10^n - 1).10 + 9$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, **si** $P(n)$ est vraie, **alors** $P(n+1)$ est vraie.

Autrement dit P est héréditaire pour tout entier $n : \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$,
et $P(0)$ étant vraie, la question est résolue.

Lors de la « correction » au tableau, un seul « reproche » est fait assez systématiquement par les étudiants sur l'énoncé : « Il faut d'abord initialiser avant de faire l'hérédité » !!

Pour $Q(n)$, le travail est très différent. Il y a un refus assez général des étudiants d'étudier l'hérédité de Q et des réactions nombreuses :

« Ça n'a pas de sens, on sait déjà que $Q(n)$ n'est jamais vraie. » (L3)

« On peut rien démontrer, ça sert à rien, Q est fausse. » (M1)

« Q est toujours fausse, donc la propriété n'est jamais héréditaire. » (L3, M1)

« [...] c'est un piège ! » (M1)

« $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ n'est jamais vraie, sinon on aurait une contradiction. » (M1)

J'écris donc moi-même au tableau, en marquant (en rouge, par exemple) les signes « + » qui remplacent les signes « - », et inversement, dans les écritures précédentes pour P , ce qui donne :

$\forall n \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $10^{n+1} + 1 = (10^n + 1).10 - 9$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, **si** $Q(n)$ est vraie, **alors** $Q(n+1)$ est vraie.

Q est donc héréditaire pour tout $n : \forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ vraie.

Les réactions des étudiants attestent d'une incompréhension de ce qui est fait et leur refus de la conclusion : « raisonnement faux », « piège », « mais où est l'erreur ? » ! Une cause très probable est qu'ils utilisent en classe le principe de récurrence quasi exclusivement pour des propriétés

dont on sait à l'avance qu'elles sont vraies (mais alors à quoi cela sert-il ?) et dont on connaît le rang initial (en général donné dans l'énoncé).

Ce problème avec P et Q (ou des propriétés analogues) est donc tout à fait pertinent pour faire distinguer dans le principe de récurrence, *ce qui relève de l'hérédité d'une propriété de ce qui relève de sa validité*, et donc aussi du rôle nécessaire de l'initialisation (Grenier 2012b).

1.2. Synthèse des conceptions erronées en L1-L2 sciences, L3 maths, M1 maths

Nous présentons de manière synthétique toutes ces connaissances erronées ou absentes que nous avons repéré régulièrement dans nos études et pratiques de classe.

- *Des affirmations qui relèvent de la (seule) « logique naturelle »*
 $\ll P \Rightarrow Q \gg$ n'a pas d'intérêt (ou pas de sens) lorsque P est fausse.
 $\ll P \Rightarrow Q \gg$ est fausse lorsque P est fausse.
- *Des confusions fréquentes entre Condition Nécessaire et Condition Suffisante, entre*
 $\ll P$ implique $Q \gg$ et $\ll P$ donc $Q \gg$, entre $\ll$ preuve par contraposée $\gg$ et $\ll$ preuve par l'absurde $\gg$.
- *Des connaissances absentes et pourtant nécessaires pour construire la notion d'implication et celles qui lui sont liées.*
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ OU } Q$
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \text{ est une CN pour } P) \Leftrightarrow (P \text{ seulement si } Q)$
 $\text{non } (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ ET non } Q$
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \quad (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et non } Q \Rightarrow Q)$
- *Une conception causale et temporelle de l'implication : $P \Rightarrow Q$ n'a de sens (et d'utilité) que lorsque P et Q ont un lien de cause à effet entre elles. Et dans $P \Rightarrow Q$, P est vérifiée avant Q, ce qui entraîne une difficulté à comprendre que « Q est une condition nécessaire pour P ».*
 Cette conception, étudiée par Deloustal-Jorrand dans sa thèse (2004) fait *obstacle* à la compréhension de la *vérifonctionnalité de l'implication* : la valeur de vérité de $P \Rightarrow Q$ ne dépend que des valeurs de vérité de P et Q.
- *Échecs pour l'écriture formelle de la négation d'une implication (L3, M1)*
 À la question « Écrire la négation de la phrase $P \Rightarrow Q$ », on constate très souvent des tentatives (vaines) d'essais divers, certaines propositions étant assez vite reconnues comme fausses : $\text{Non } P \Rightarrow \text{Non } Q$? $P \Rightarrow \text{Non } Q$? $\text{Non } P \Rightarrow Q$? $\text{Non } Q \Rightarrow \text{Non } P$? (celle-ci, non, car c'est la contraposée !). Finalement une réponse assez majoritaire est que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $\text{Non}(P \Rightarrow Q)$!
 Nous supposons qu'il y a deux causes à cet échec :
 - la négation d'une proposition conditionnelle n'est pas une proposition conditionnelle, elle est d'une autre « forme » (on s'en convainc avec la seule « table de vérité » de la logique des propositions) ;
 - les éléments de logique formelle de base, nécessaires pour répondre sont absents de l'enseignement.

II. La logique dans les programmes du Secondaire

Nous ne donnons ici que les éléments des programmes reliés à la suite de notre propos, chacun pouvant compléter ces informations sur le site EDUSCOL.

II.1. Raisonnements logiques et « démarche d'investigation » au Collège

Les extraits ci-après du document Ressources collège 2009 précisent les objectifs essentiels.
« *Raisonnement logiquement, pratiquer la déduction, démontrer* sont des capacités qui relèvent du socle commun de connaissances et de compétences et qui sont à acquérir progressivement tout au long de la scolarité au collège. »

Objectifs de la « démarche d'investigation » : mettre en œuvre *différents types de raisonnement (inductif, exhaustivité des cas, disjonction des cas, absurde...)*, travailler les notions de *réciproque, la quantification, le contre-exemple*.

Apprentissage de la « démarche de recherche », où le raisonnement inductif prend toute sa place pour l'élaboration de *conjectures*.

II.2. Compétences mathématiques au lycée (MEN novembre 2013)

Elles sont données dans une liste assez longue, et le tout semble très ambitieux. On y trouve en particulier (celles qui nous concernent plus) :

Chercher, Analyser un problème, Extraire, organiser et traiter l'information utile.

Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture.

Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.

Raisonnement : Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis ...

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence ...).

Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Nos questions sont nombreuses, mais nous pensons utiles de les écrire toutes ici.

Quels raisonnements et quelles notions de logique sont-ils accessibles dans le Secondaire, et pour quelles utilisations ?

Lesquels peut-on faire travailler « à l'occasion de questions ou erreurs d'élèves » (cf. programmes de lycée), et à partir de quels problèmes ?

Est-il possible d'enseigner les différents types de raisonnement et les bases de la logique seulement « au fil des chapitres » (ce que recommandent les programmes) ?

Que faut-il savoir pour « distinguer la logique mathématique de celle du langage courant » et pour « distinguer implication mathématique et causalité » ?

Quelles conditions doit remplir une situation (un problème) pour que l'élève s'engage dans une recherche lui permettant de pratiquer différents raisonnements et preuves ?

Quels types de conjectures un élève peut-il faire « sans l'enseignant » ? Est-ce possible sur une notion qu'il est en train d'apprendre ?

Pour faire (réellement) des mathématiques, peut-on se passer des notions telles que « négation d'une proposition (conditionnelle) » et « implication (au sens de la logique mathématique) » ?

Nos hypothèses, basées sur nos travaux de recherche et nos nombreux échanges avec des enseignants (lors de stages de formation continue ou à l'IREM), sont que tout cela est complexe, et, plus précisément :

- H1. Un élève ne peut pas dans le même temps découvrir un concept de logique et apprendre une notion nouvelle.
- H2. Les démonstrations utilisant « seulement des propriétés ou théorèmes du cours » sont insuffisantes pour mettre en place la démarche d'investigation (ou de recherche).
- H3. L'élève doit résoudre des problèmes sans « boîte à outils », avec phases expérimentales et conjectures accessibles.
- H4. Les objectifs de ces problèmes, leur gestion et les synthèses doivent concerner en priorité le raisonnement et les notions de logique.

IV. Différents types de problèmes pour une « vraie » activité mathématique

Différents types de problèmes sont susceptibles de permettre en classe une activité mathématique consistante tout en étant accessible aux élèves. Encore faut-il bien les choisir. Un casse-tête choisi au hasard a plus de chance de relever de la devinette que du raisonnement logique. Mais certains problèmes dits « de logique » peuvent être pertinents².

L'étude de « preuves fausses » est un type de questions qui nécessite une grande attention à tous les éléments du texte censé être une preuve, et peut amener l'élève à douter de chaque affirmation, même si celle-ci relève d'un théorème connu ou d'une propriété familière.

Dans cet exposé, nous allons nous centrer sur un autre type de problèmes, relevant des « Situations de Recherche pour la Classe » (SiRC) construites et étudiées depuis de nombreuses années par la Fédération de Recherche « Maths-à-Modeler », ou dans le cadre de des thèses menées au sein du thème « maths discrètes et didactique » de l'Institut Fourier, ou encore dans le groupe « Logique et SiRC » de l'IREM de Grenoble³.

IV.1. Caractérisation du modèle SiRC

L'objectif des SiRC est d'amener les élèves (de l'école élémentaire à l'université) à une véritable pratique mathématique, en leur donnant l'occasion d'être autonomes dans leurs recherches. Les SiRC peuvent être considérées comme un modèle pour une transposition en classe de l'activité du chercheur en mathématiques. Ce modèle peut se décrire ainsi (Grenier et Payan 2002) et Godot 2005)

1. La situation s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. *Elle doit*

² Nous ne développons pas ici. Une publication du groupe IREM est en cours qui en proposera quelques exemples analysés.

³ Nous les étudions aussi avec les enseignants dans nos stages de formation continue du PAF.

être proche de questions non résolues. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues (non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs) va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.

2. La question initiale est facile d'accès. *Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit «amener» l'élève à l'intérieur des mathématiques.*

3. Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques. *De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.*

4. Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, *aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.*

5. Une question résolue peut renvoyer à une nouvelle question. *Critère de « non-fin » de la situation. On peut changer les hypothèses (un contre-exemple ne clôt pas le problème, on peut changer la question.*

6. Une SiRC est caractérisée par des « variables de recherche », *paramètres du problème qui pourraient être des variables didactiques (c'est-à-dire, à la disposition de l'enseignant), mais qui sont laissés à la disposition de l'élève. Elles doivent être choisies avec attention (Godot 2005).*

Dans une SiRC, il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel spécifique visé, même si des notions mathématiques sont évidemment mobilisées ou explorées. Les apprentissages prioritairement visés sont ceux qui caractérisent l'activité mathématique (Grenier & Payan 1998).

Un problème de type SiRC est forcément non usuel dans la classe. L'autonomie dans la recherche implique que les élèves peuvent tenter de résoudre leurs propres questions. Il n'y a pas nécessairement de réponse finale au problème posé au départ, l'objectif n'est pas l'exercice d'une technique ou d'une méthode vues en cours et c'est la preuve le moyen de validation à la charge des élèves.

Le contrat didactique, dans une SiRC est spécifique, car les élèves et l'enseignant sont dans des positions et rôles inhabituels. Les élèves sont en position de « chercheur » et ont pour tâche de résoudre le problème et de produire des résultats qui sont nouveaux pour eux. L'enseignant est dans une double position de chercheur et de gestionnaire de la situation. Les élèves peuvent se poser des questions pour lesquelles il n'a pas immédiatement les réponses. Il doit contrôler l'activité de l'élève par rapport aux objectifs d'apprentissage qui sont « les savoir-faire fondamentaux » de l'activité mathématique.

Gérer une telle situation s'apprend (en le faisant). Cela consiste (en pratique) à :

- vérifier la « bonne » dévolution du problème,
- laisser se développer différentes approches dans la phase expérimentale lors du travail en groupes,
- ne pas invalider/valider autoritairement une conjecture,
- inciter l'élève à reformuler une phrase, à identifier le statut de ce qu'il énonce : est-ce une hypothèse, une conjecture ? Est-ce un argument, une preuve ? Est-ce un exemple, un contre-exemple ?

V. Exemples de Situations de Recherche pour la Classe

V.1. Partition d'un carré en n carrés⁴

Question. Pour quelles valeurs de n est-il possible de partager (paver) un carré quelconque en n carrés ?

De nombreuses expérimentations de la Sixième à l'Université nous permettent d'affirmer que la dévolution est facile (organisée en travail collaboratif en groupes), des solutions sont trouvées assez vite pour des valeurs particulières de n , les conjectures fréquentes fausses sont invalidées par les élèves eux-mêmes, et finalement, dans un temps acceptable (une heure), la conjecture générale correcte est construite par les élèves sans intervention de l'enseignant, avec des éléments de preuve pour certains n .

Les raisonnements et notions de logique en jeu sont diverses. Dans un premier temps, l'étude de cas simples ($n = 4, 9, 16$ etc.) conduit à des propositions de pavage qu'il est facile de justifier. Les propositions fausses (par exemple pour $n = 6$, voir ci-après) sont invalidées collectivement, une fois posées au tableau, par des raisonnements géométriques. Un exemple correct est suffisant pour prouver l'existence d'une partition. Un raisonnement inductif permet de traiter le problème pour presque toutes les valeurs de n .

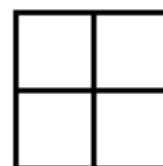
Exemple d'un scénario « classique » au collège⁵

L'enseignant pose le problème ainsi. Il dessine un carré au tableau (à main levée) puis demande aux élèves de chercher à le partager (paver) en six carrés, en rajoutant « si pendant votre recherche vous trouvez d'autres partages, on va les noter au tableau avec le dessin correspondant ». Il trace alors deux colonnes, l'une pour les valeurs de n , l'autre pour les dessins associés.

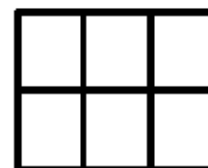
Un élève pose très vite $n = 4$ et vient au tableau dessiner à main levée le dessin ci-contre.

Les élèves doivent dire s'ils sont d'accord ou non.

Le dessin est tout de suite accepté après un petit travail géométrique simple.



Très vite, un autre élève propose alors $n = 6$ et dessine (à main levée) le dessin ci-contre.



⁴ Cette situation a été construite et étudiée dans le groupe « Logique et SiRC » de l'IREM de Grenoble : Roland Bacher, Hervé Barbe, Yvan Bicaïs, Grégoire Charlot, Tarkan Gezer, Denise Grenier.

⁵ Scénario mis en place par un enseignant de collège membre du groupe IREM, qui expérimente chaque année cette SiRC à tous les niveaux de classe dont il atteste les résultats et les effets très positifs sur ses élèves.

Un débat a lieu, pour savoir si la proposition est valide ou non, qui conduit à la nécessité d'une preuve pour se mettre d'accord. Un travail de géométrie élémentaire aboutit à son rejet, les arguments et la preuve étant à la portée des élèves.

Nos expérimentations de cette situation dans des collèges et lycées, à tous les niveaux, montrent que les bonnes conjectures émergent (après de très nombreux dessins) et qu'il y a des preuves ou des arguments de preuve pour presque toutes les valeurs de n . Ainsi, si on demande par exemple à un élève « peux-tu me convaincre qu'il existe une partition en 17 carrés », il sait décrire et construire cette partition.

Le constat unanime des enseignants qui ont essayé cette situation dans leurs classes est qu'elle permet de manière fiable que tous les élèves trouvent des solutions (partielles), raisonnent sur leurs propositions, plusieurs algorithmes de partitions sont possibles, et qu'en une heure, la question est presque résolue.

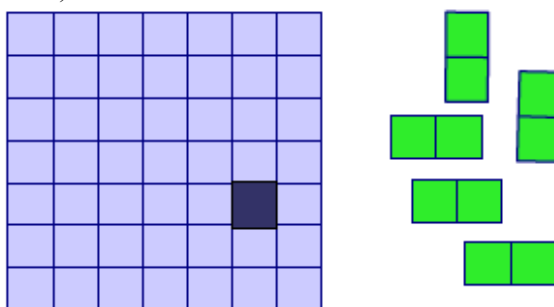
V.2. Pavage de polyminos carrés avec des dominos

Nous avons proposé cette situation dans notre conférence parce qu'elle est pour nous fondamentale pour l'apprentissage de tout ce qui constitue l'activité mathématique : expérimenter, étudier des cas particuliers, faire des conjectures, les étudier (avec exemples et contre-exemples accessibles), argumenter, prouver, tout cela étant accessible aux élèves.

Comme elle a été largement décrite et analysée dans différents textes et actes de colloques, avec d'autres situations proches (polyminos en trapèzes, pavages avec triminos, deux trous, etc...), nous renvoyons le lecteur aux textes Grenier & Payan 1998, Grenier 2006, 2007, 2008 & 2009. Nous donnons seulement ici le texte du problème initial, que nous considérons comme la situation de mise en place de l'activité mathématique particulière aux situations de pavage.

On considère un polymino carré de taille n (nombre de cases du côté) ayant un trou d'une case pouvant se situer n'importe où. Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ?

(Ci-dessous exemple pour $n=7$)



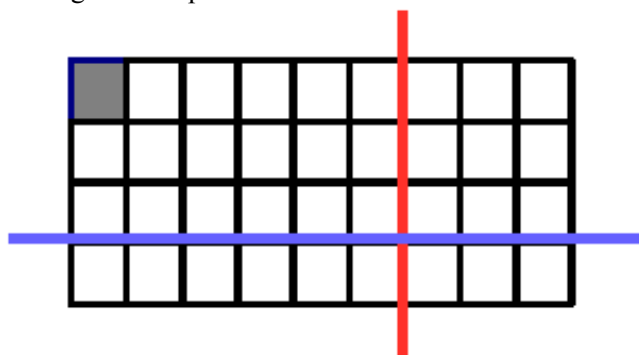
Le matériel à manipuler (bois, carton, ou mousse) est indispensable pour résoudre la question. La situation est pertinente du Primaire à l'Université avec le même énoncé, la résolution se déroulera sur des temps différents et les preuves seront plus ou moins abouties. De nombreux prolongements sont possibles, permettant de réinvestir les arguments et propriétés issus de cette situation initiale.

V.3. Un jeu de Nim : le « jeu du chocolat »

Cette situation a été expérimentée de nombreuses fois à des niveaux très différents. Une étude est décrite dans la thèse de Colipan (2014) et un chapitre lui est consacré dans la publication IREM en cours. Nous ne donnons ici que l'énoncé.

Jeu à deux (équipes de) joueurs.

Chaque joueur doit à tour de rôle « couper » la tablette (restante) dans une seule de ses dimensions et choisir de garder l'un des deux morceaux. Celui qui est obligé de prendre le carré de savon (en gris sur le dessin) doit le manger et il a perdu.

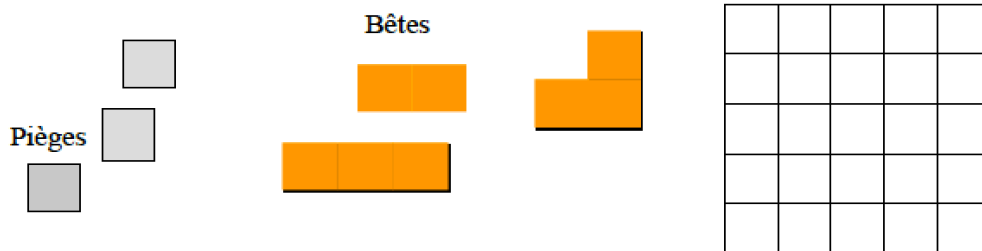


Une fois résolue cette version du jeu, on peut prolonger le problème en considérant que le carré de savon est n'importe où sur un bord de la tablette. Le problème devient beaucoup plus difficile très complexe lorsque le carré de savon est n'importe où dans la tablette.

V.4. La « Chasse à la bête »

Cette SiRC a été construite par un étudiant en thèse en maths discrètes⁶ qui a eu l'idée de transposer un problème mathématique de recherche rencontré lors de son travail de thèse sous forme de jeu accessible à des élèves du Secondaire. Elle s'est révélée formidable sous beaucoup d'aspects. On peut en lire une analyse didactique dans Grenier 2012a.

On veut protéger un territoire quadrillé (5x5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.



⁶ Eric Duchêne (2006), *Jeux combinatoires sur les graphes*, Thèse de l'université Joseph Fourier.

Cet énoncé constitue en fait trois problèmes, correspondant à chaque type de bêtes (domino, trimino long, trimino coudé), qu'il est judicieux de proposer à résoudre dans cet ordre, la complexité du problème étant croissante.

C'est une situation ludique impliquant un problème d'optimisation dans $\mathbb{N}$. La dévolution est facile dès la fin du primaire, les conjectures sont accessibles (un peu moins pour le trimino coudé), les preuves plus difficiles (elles génèrent souvent dans un premier temps des arguments faux qu'il est intéressant de travailler collectivement). La recherche de la solution optimale se fait par encadrements successifs du nombre cherché.

Conclusion

Nos travaux montrent qu'il est possible, avec de bonnes situations, de remplir une partie des objectifs des programmes du secondaire concernant les différents raisonnements et la logique. Nous invitons le lecteur à expérimenter lui-même les SiRC proposées ici et restons disponible pour toute question (écrire à denise.grenier@ujf-grenoble.fr).

REFERENCES

- DELOUSTAL V., GRENIER D. (2001) L'implication dans le raisonnement mathématique : Etat des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants, *Learning in mathematics and Science and Educational Technology*, A. Gagatsis éditeur, Intercollege press Cyprus, 2001.
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- DURAND-GUERRIER V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Claude Bernard Lyon.
- FABERT Ch. (2010) *Le nouveau programme de logique de seconde*, mémoire de master de Didactique des maths, Université Joseph Fourier Grenoble, en ligne : charlotte.fabert.free.fr.
- FABERT Ch. & GRENIER D. (2011), Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique, *petit x* n°87 31-52.
- GIROUD Nicolas (2011) *Rôle de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- GODOT K. (2005) Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- GRENIER D. (2012a) Research Situations to learn logic and various types of mathematical reasonings and proofs, *actes du 8ème Congress of European Research in Mathematics education*.
- GRENIER D. (2012b) Une étude didactique du concept de récurrence, *petit x* n°88 27-47.
- GRENIER D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes, *Actes du séminaire de l'ARDM*, Paris.
- GRENIER D. (2008a) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique, *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

GRENIER D. (2007) Des « situations recherche » pour la transition secondaire/université, actes du colloque EMF 2006 Sherbrooke.

GRENIER D. (2008b) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

GRENIER D. & PAYAN Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de recherche en didactique de mathématiques*, Paris, 19 Octobre 2002.

ROLLAND J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*, thèse de l'Université Joseph Fourier.

ANNEXE. RECAPITULATIF DES RAISONNEMENTS ET NOTIONS MATHÉMATIQUES PRIORITAIREMENT EN JEU DANS LES SiRC ÉVOQUÉES ICI.

Nom de la SiRC	Raisonnements en jeu	Notions mathématiques strictes
Pavages de polyminos	raisonnements et preuves par l'absurde, inductif, exhaustivité des cas, contre-exemple, théorème d'existence, etc..	repérage dans le plan partition d'une figure, algorithmes, notion d'adjacence, récurrence sur des sous-ensembles
La chasse à la bête	optimisation dans N condition suffisante/nécessaire conjecture	intervalles d'entiers, lien entre <i>au plus</i> , <i>il suffit</i> et <i>inférieur ou égal</i>
Partage d'un carré en n carrés	raisonnement inductif, stratégie gagnante/perdante	dénombrement, génération de suites d'entiers géométrie élémentaire
Jeu du chocolat	raisonnement inductif, absurde, stratégie gagnante/perdante	géométrie élémentaire
Jeu d'Euclide géométrique ⁷	raisonnement inductif stratégie	algorithme d'Euclide