ETUDE DES EVOLUTIONS DES PRATIQUES D'UNE ENSEIGNANTE DANS LE CADRE D'UN TRAVAIL COLLABORATIF ENTRE CHERCHEURS ET ENSEIGNANTS

Julia Pilet, LDAR, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil,
Soraya Bedja, LDAR, Université Paris Diderot

Résumé – Ce texte interroge en quoi un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs peut favoriser la diffusion de résultats de recherche et la conception de ressources pour l'enseignement des mathématiques. Il étudie les usages et l'évolution des pratiques d'une enseignante utilisant les outils d'évaluation diagnostique et les ressources de différenciation de l'enseignement en algèbre conçus dans le cadre du projet pluridisciplinaire PépiMeP.

La diffusion de résultats de recherche dans l'enseignement secondaire ordinaire préoccupe depuis de nombreuses années les chercheurs des équipes Pépite et PépiMeP[1] (Grugeon, 1997 ; Delozanne et al., 2010 ; Grugeon-Allys et al., 2012). L'objectif de ces projets a été de concevoir puis de diffuser sur la plateforme LaboMeP de l'association Sésamath des outils d'évaluation et de différenciation de l'enseignement pour aider les enseignants dans leur gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre à la fin de la scolarité obligatoire en France (15-16ans). Pour envisager dès leur conception la viabilité dans l'enseignement ordinaire de ces outils, nous avons mis en place un travail collaboratif avec des enseignants du secondaire dans le cadre d'un groupe IREM de l'université Paris Diderot. Dans ce texte, nous interrogeons les effets potentiels de ce travail collaboratif sur les pratiques d'une enseignante que nous appelons Garance. Après avoir présenté le contexte de notre recherche, nous étudions les évolutions dans les pratiques de Garance à partir d'une comparaison de ses progressions et de la mise en œuvre d'une même séance sur deux années consécutives. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous mettons en relation ces évolutions avec le travail effectué dans le groupe IREM. Nous concluons par des pistes sur les conditions à mettre en place pour favoriser la diffusion de résultats de recherche en didactique dans l'enseignement.

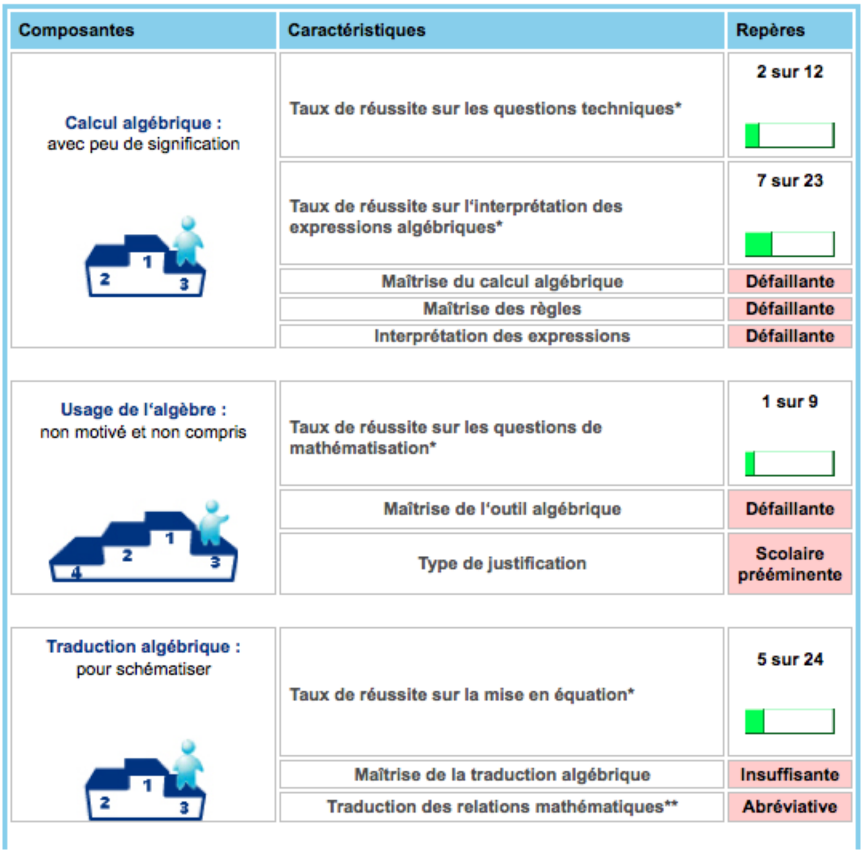
Le contexte du travail collaboratif enseignant-chercheur

Fonctionnement du groupe IREM : une conception participative liée à des projets de recherche

Créé en 2011, le groupe IREM « Algèbre et différenciation de l'enseignement » de l'université Paris-Diderot réunit des chercheurs en didactique des mathématiques, travaillant dans les projets Pépite et PépiMeP, et des enseignants de collège et de seconde, qui sont à la recherche de solutions face à des difficultés professionnelles liées à l'enseignement de l'algèbre et la prise en compte de la diversité des connaissances des élèves dans ce domaine. Nous avons ensemble conçu et mis en œuvre des ressources d'évaluation diagnostique et de gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre en classes de troisième et de seconde à partir de résultats de recherche produits dans Pépite et PépiMep. Ces projets,

[1] Projet PICRI financé par la région Ile-de-France de 2009 à 2012.

fruit d'une collaboration entre une équipe pluridisciplinaire de chercheurs en Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain et l'association Sésamath, ont donné lieu à un logiciel de diagnostic des compétences des élèves en algèbre élémentaire, nommé Pépite. Fondé sur une analyse épistémologique, cognitive et didactique de ce domaine, ce logiciel produit une analyse multidimensionnelle des réponses de l'élève pour le situer sur une échelle de compétence et l'associer à un groupe de travail. Par exemple, les élèves du groupe C donnent peu de sens au calcul algébrique (niveau 3 sur la composante calcul algébrique), utilisent peu ou pas l'algèbre comme outil pour résoudre des problèmes (niveau 3 sur la composante usage de l'algèbre) et traduisent majoritairement schématiquement du registre des écritures algébriques à un autre registre (niveau 3 sur la composante traduction algébrique). Un profil d'élève du groupe C est présenté dans la figure 1. L'équipe a conçu des parcours d'enseignement différencié (Pilet, 2012) à proposer aux élèves suite au passage de Pépite pour faire évoluer leur rapport personnel à l'algèbre vers un rapport plus idoine vis à vis des institutions Collège et Lycée. Ces parcours consistent en des exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des diagnostiqués par Pépite et portant sur un objectif d'enseignement commun à tous. Ce dernier point est apparu crucial pour les enseignants afin de permettre une institutionnalisation avec le groupe classe. Les parcours ont été discutés et testés au sein du groupe IREM afin d'envisager leur viabilité en classe et leur appropriation par les enseignants pour une meilleure gestion de l'hétérogénéité des apprentissages.



Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : avec peu de signification	Taux de réussite sur les questions techniques*	2 sur 12
	Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques*	7 sur 23
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
	Interprétation des expressions	Défaillante
Usage de l'algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	1 sur 9
	Maîtrise de l'outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : pour schématiser	Taux de réussite sur la mise en équation*	5 sur 24
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante
	Traduction des relations mathématiques**	Abréviative

Figure 1 – Profil d'un élève du groupe C

Les enseignants du groupe IREM ont choisi, en fonction de leur propre projet, le ou les parcours sur lesquels ils voulaient travailler. Ils ont fait passer le test Pépite sur Labomep au mois d'octobre, puis ont organisé une à trois séances différenciées en s'appuyant sur les groupes proposés par Pépite. Certains enseignants ont refait passer le test en fin d'année. Certaines de ces séances ont été filmées et en partie décryptées. Elles ont fait l'objet d'une analyse collective au sein du groupe IREM. La diversité des tâches permettant de couvrir les types de problèmes du domaine de l'algèbre, la place accordée aux procédures des élèves dans les mises en commun, les niveaux de justification proposés aux élèves, le rôle du contre-exemple et de la preuve algébrique, la place accordée à l'institutionnalisation (orale et écrite) ont été des sujets récurrents discutés lors des réunions IREM. Les potentialités de cette collaboration à faire évoluer les pratiques enseignantes sont analysées dans les travaux académiques de Pilet (2012) et de Bedja (en cours).

L'étude de cas présentée ici s'appuie sur l'appropriation et la mise en œuvre des séances différenciées par une enseignante du groupe que nous appelons Garance, dans ses classes de troisième.

Un portrait de Garance

Garance exerce depuis plusieurs années dans un collège de la région parisienne. Selon elle, même si le collège n'est pas classé en Zone d'Education Prioritaire, des problèmes de discipline et des difficultés scolaires des élèves rendent certaines classes difficiles. Elle constate une « certaine réticence des élèves » face à l'algèbre et qualifie de « catastrophique » l'apprentissage des élèves dans ce domaine. La possibilité d'échanger avec des collègues, la volonté de faire évoluer ses pratiques à la fois sur la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et sur l'enseignement de l'algèbre sont des motivations qui ont conduit Garance à participer au groupe IREM en 2011-2012 puis en 2012-2013. Elle a repris les parcours d'enseignement différencié discutés dans le groupe IREM pour les insérer dans sa progression et les tester dans ses classes de troisième. Nous discutons dans ce qui suit de son chapitre sur le calcul littéral.

Eléments méthodologiques pour repérer des évolutions

Pour repérer des évolutions dans les pratiques de Garance suite à sa participation au groupe IREM, nous distinguons deux niveaux d'analyse. Le premier niveau, que nous appelons global, porte sur la progression en algèbre prévue par Garance. Nous cherchons à repérer des évolutions dans la nature et la diversité des types de tâches qu'elle propose et dans leur organisation didactique. Nous nous appuyons sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous utilisons le modèle praxéologique de référence relatif aux expressions algébriques défini par Pilet (2012) pour analyser et comparer les progressions en terme d'organisation mathématique et didactique. Le deuxième niveau, que nous appelons local, s'attache à comparer les mises en œuvres opérées par Garance d'une même situation, celle du carré bordé.

Quelles évolutions au niveau global ? Une comparaison des progressions de Garance en algèbre

Garance structure son enseignement de l'algèbre en deux chapitres : un sur les expressions algébriques (développement, distributivité simple et double, identité remarquable) et l'autre sur la factorisation et la résolution d'équations. Nous discutons dans cette section des progressions sur le premier chapitre. Nous commençons par présenter dans les grandes lignes l'organisation mathématique épistémologique de référence en algèbre définie par Pilet (2012) avant d'analyser et de comparer les progressions de Garance.

Une organisation mathématique de référence pour comparer les progressions

Pilet (2012) a défini une organisation mathématique épistémologique de référence en algèbre. Elle décrit le domaine de l'algèbre en trois organisations mathématiques régionales : celle relative aux expressions algébriques, celle relative aux formules et celle relative aux équations. Celle relative aux expressions algébriques, qui nous intéresse plus particulièrement dans ce texte, est structurée en trois organisations mathématiques locales. La première, OM1, intitulée « Génération des expressions algébriques », regroupe les genres de tâches Produire une expression algébrique dans un contexte de généralisation, de modélisation ou de preuve, Traduire ou Associer du registre des écritures algébriques à un autre registre et vice versa. La seconde, OM2, intitulée « Equivalence des expressions algébriques », est structurée autour des genres de tâches Identifier la structure d'une expression algébrique, Tester ou Prouver l'équivalence de deux expressions algébriques et Choisir l'expression la plus adaptée au but visé. La troisième, OM3, intitulée « Algèbre des polynômes », porte sur la transformation des expressions algébriques et regroupe les types de tâches Substituer une valeur numérique à la variable, Réécrire une expression algébrique (par exemple, réécrire $16x^2$ sous la forme d'un carré), Développer et Factoriser une expression algébrique.

Cette organisation mathématique est fondée sur les aspects épistémologiques des expressions algébriques suivants :

- la prise en compte des aspects procédural et structural des expressions algébriques (Sfard, 1991) ;
- l'équivalence des programmes de calcul (Ruiz-Munzon et al., 2012 ; Chevallard et Bosch, 2012) ;
- l'équivalence des expressions algébriques (Frege, 1971 ; Drouhard, 1992 ; Kieran, 2007) ;
- l'importance de la dialectique du numérique et de l'algébrique pour assurer la continuité entre arithmétique et algèbre (Chevallard, 1985) ;
- la nécessaire flexibilité dans l'interprétation des expressions algébriques en articulation avec d'autres registres de représentation (Duval, 1995).

Comparaison des progressions

Nous comparons les progressions de Garance sur les expressions algébriques sur trois années consécutives : en 2010-2012, avant sa participation au groupe IREM ; en 2011-2012 et en 2012-2013, première et seconde années de participation au groupe IREM.

Nous analysons les progressions à la lumière de l'organisation mathématique de référence. Les trois organisations mathématiques locales sont-elles présentes ? Y a-t-il des genres de tâches absents ? Y a-t-il des évolutions suite à la participation au groupe IREM ? Nous complétons par des éléments sur l'organisation didactique : quelles sont les raisons d'être données aux expressions algébriques ? Ces analyses sont présentées dans la figure 2.

---

2 Nous ne disposons qu'en partie de la progression de Garance de 2010-2011, c'est pourquoi nous ne pouvons que faire ressortir des éléments dominants.

OM locale	2010-2011	2011-2012	2012-2013
OM1 Génération des expressions algébriques	Programmes de calculs équivalents en réinvestissement Traduction isolée faisant appel	Séances n°0 (traduction isolée), n°2, n°5, n°9, n°11 Généralisation et programmes de calculs équivalents en reprise Plus de rituels relevant de OM1	Séances n°0, n°2, n°3, n°5, n°6, n°9 Généralisation et programmes de calculs équivalents en reprise Plus de rituels relevant OM1
OM2 Equivalence des expressions algébriques	Un peu avec équivalence des programmes de calculs	Séances n°3, n°4, n°7 Synthèse pour montrer qu'une égalité est vraie pour toute valeur Contre-exemple Plus de rituels sur OM2	Séances n°0(structure des expressions), n°2, n°3, n°4, n°5, n°7, n°8 Synthèse plus tôt pour montrer qu'une égalité est vraie pour toute valeur et contre-exemple Plus de rituels sur OM2
OM3 Algèbre des polynômes	Oui La plupart des rituels dans OM3	Séances n°0, n°5, n°6, n°8, n°10, n°11 Moins de tâches techniques pures OM3 présente dans la résolution de problèmes et équivalence d'expressions algébriques	Séances n°5, n°7, Moins de tâches techniques pures Moins de tâches techniques pures OM3 présente dans résolution de problèmes et équivalence d'expressions algébriques

Figure 2 – Analyse des progressions de Garance de 2010 à 2013

En 2010-2011, Garance propose majoritairement des tâches techniques de OM3. OM1 et OM2 sont très peu présentes. Seules quelques tâches isolées comme l'étude de programmes de calculs équivalents abordent la génération des expressions algébriques et la question de leur équivalence. L'organisation didactique retenue rend faible le moment de reprise de l'algèbre pour donner des raisons d'être des expressions algébriques. En 2011-2012, Garance intègre deux parcours d'enseignement différencié en début de chapitre qui permettent d'organiser le moment de première rencontre avec l'algèbre à partir d'un problème de généralisation (OM1) et d'un travail sur l'équivalence des expressions algébriques (OM2). Le travail des techniques de développement et de factorisation (OM3) s'opère moins dans des tâches uniquement techniques et davantage dans des problèmes de généralisation et de preuves conduisant à un travail sur l'équivalence des expressions algébriques. Les rituels de début de séance, purement techniques en 2010-2011, portent davantage sur OM1 et OM2 à partir de 2011-2012. La synthèse écrite est complétée d'un paragraphe sur cette équivalence et sur le rôle du contre-exemple, ce qui montre une évolution dans le niveau raisonnement et de justification proposé aux élèves. Néanmoins, cette synthèse, présente en fin de séquence, reste éloignée de la première rencontre avec des types de tâches de OM2. Cette année-là, Garance modifie sa progression au fur et à mesure des séances IREM. La progression de 2012-2013 est plus mature et montre plus de cohérence dans les articulations des trois organisations mathématiques. Toutes les tâches ajoutées en 2011-2012 sont présentes et les méthodes de contrôle et de preuve sont institutionnalisées dès les premières séances. Elle reprend, de Pépite, l'exercice dit du prestidigitateur~~,~~ qui consiste à prouver qu'un programme de calcul donne toujours 7, pour travailler la conjecture par le numérique et la nécessité de la preuve algébrique.

Entre 2010 et 2013, les organisations mathématiques sur les expressions algébriques sont plus complètes et mieux articulées. L'organisation didactique aborde davantage les raisons d'être de l'algèbre et de la propriété de distributivité. Ces évolutions sont directement en lien avec les aspects de l'algèbre discutés dans le groupe IREM : les types de tâches manquants, le champ de problèmes de l'algèbre, les niveaux de raisonnement et de justification, les aspects procédural et structural des expressions algébriques, la dialectique du numérique et de l'algébrique, l'équivalence des expressions algébriques et l'interprétation des expressions algébriques en articulation avec d'autres registres de représentation.

Si, au niveau global, Garance a fait évoluer ses progressions, qu'en est-il de la mise en œuvre en classe ? Nous discutons dans la section suivante de la mise en œuvre d'une même séance d'enseignement différencié pendant les deux années scolaires 2011-2012 et 2012-2013.

Quelles évolutions au niveau local ? Une comparaison à partir des mises en œuvre de la séance du « carré bordé »

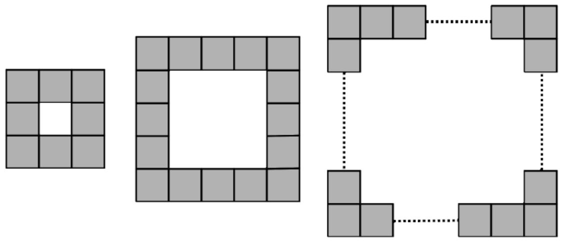
La situation de généralisation dite du « carré bordé » est reprise par Garance en 2011-2012 et en 2012-2013 pour ré-introduire l'algèbre en début de classe de troisième. Après avoir présenté les enjeux de cette séance, nous comparons les mises en œuvre sur les deux années consécutives. Nous analysons les évolutions d'une année à l'autre afin d'interroger en quoi un travail collaboratif peut amener les enseignants, d'une part, à comprendre les limites de certaines de leurs pratiques habituelles (gestion de la dévolution, de la formulation et de la validation, gestion de l'institutionnalisation), et, d'autre part, à rendre compte des potentialités des situations didactiques conçues pour favoriser une évolution du rapport personnel des élèves à l'algèbre.

La situation du carré bordé

Reconnue potentiellement riche par les chercheurs (Combier et al., 1995), cette situation didactique est une situation de généralisation utilisée pour introduire l'algèbre en classe de 5^e ou de 4^e. Si elle figure dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral » (MEN, 2006, 2009), elle est néanmoins peu présente dans les manuels actuels (Coppé & Grugeon-Allys, 2014). Dans le cadre du groupe IREM et du projet PépiMeP, nous l'avons reprise comme parcours d'enseignement différencié portant sur le rôle de l'algèbre dans la résolution de problème. Dans ce parcours, les variations portent sur le pattern et donc sur la complexité de la structure des expressions produites. Dans ce texte, nous nous centrons sur le pattern « carré bordé » présenté dans la figure 3. Les élèves ayant déjà rencontré l'algèbre depuis au moins deux ans, l'enjeu de cette situation, connu et discuté avec Garance, n'est plus d'introduire l'algèbre mais de lui redonner du sens et de revenir sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. L'augmentation du nombre de carrés sur la bordure oblige à la production d'un programme de calcul puis au recours à une expression algébrique ce qui permet de revenir sur le rôle de la lettre pour généraliser. Comme plusieurs formules sont possibles (par exemple, $(n-1)\times 4$, $(n-2)\times 4+4$, $2\times n+(n-2)\times 2$), la question de leur équivalence est l'occasion de revenir sur les propriétés et les règles de calcul algébrique et notamment sur la distributivité.

Dans la section suivante, nous présentons et comparons les analyses des mises en commun organisées par Garance au moment où les différentes expressions apparaissent et où se pose la question de leur équivalence et de la preuve de leur équivalence. Ces analyses sont l'occasion de ré-interroger (Coulange & Grugeon, 2008) les conditions de viabilité dans l'enseignement ordinaire d'une telle situation.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



1) Si le carré blanc a un côté unité de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

2) Si le carré blanc a un côté unité de 10 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

3) Si le carré blanc a un côté unité de 100 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.

4) Ecris une formule qui donne le nombre de carrés gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Figure 3 – Enoncé de la situation du carré bordé retenue par Garance

Comparaison des mises en œuvre sur le carré bordé

En 2011-2012 comme en 2012-2013, Garance a intégré cette situation dans sa progression comme une séance de reprise de l'algèbre. Prévue après le passage du test Pépite, c'est la première séance d'algèbre de l'année. En 2011, seules les genres de tâches Développer et Factoriser des expressions algébriques ont été rencontrés lors des moments routiniers de début de séance. Dans cette séance, les élèves sont répartis en deux groupes, B ou C suite au passage du test. Nous analysons ici les mises en commun réunissant les élèves du groupe C et les institutionnalisations. Elles sont présentées dans l'annexe.

En 2011-2012, la gestion de temps conduit à une recherche des élèves relativement longue (37 min) et à une mise en commun écourtée par rapport à ce qui avait prévu (3 min 20 sec). L'institutionnalisation est repoussée à la séance suivante et dure à peine deux minutes. Les élèves proposent deux expressions algébriques $n + n + n + 2 + n + 2$ et $d \times 4 + 4$. Bien que les lettres soient différentes, le choix de la lettre n'est quasiment pas discuté dans la mise en commun (échange n°40). Garance rencontre des difficultés dans la gestion pour dévoluer la question de l'équivalence des expressions algébriques. Les propriétés du calcul algébrique ne sont pas explicitées comme référence théorique pour justifier les transformations effectuées. Cette séance s'est déroulée très peu de temps après l'arrivée de Garance dans le groupe, ce qui peut expliquer que, même si nous avions discuté ses enjeux, sa mise en œuvre reste très délicate.

En 2012-2013, la gestion du temps évolue. Le temps de recherche est réduit à 26 minutes, ce qui permet à la mise en commun et à l'institutionnalisation d'exister davantage. Dans la mise en commun, Garance s'appuie davantage sur les procédures des élèves. Elle commence par montrer les limites du comptage des carreaux (échange n°53) pour un carré de côté 100 et s'appuie sur les expressions numériques produites pour introduire la lettre et les expressions algébriques correspondantes. La production des expressions est l'occasion de revenir sur le rôle des parenthèses et les priorités opératoires (échanges n°104 et n°106). L'équivalence des expressions algébriques produites est soulevée par Garance et est suivie de nombreux échanges sur le contre-exemple et la preuve algébrique. L'institutionnalisation qui suit porte sur les différents objectifs visés (échanges n°113 à n°136) : le rôle de la lettre pour généraliser, l'équivalence des expressions et une méthode (test par des valeurs numériques pour conjecturer, contre-exemple ou preuve algébrique) pour la prouver.

La mise en commun et l'institutionnalisation de la deuxième année permettent davantage de travailler les objectifs visés par la situation du carré bordé. On voit donc des évolutions majeures entre les deux années. Ces évolutions sont à mettre en relation avec les contenus travaillés dans les réunions IREM : hypothèses sur les erreurs des élèves, liens avec des types de tâches manquants, place des phases de formulation et de validation des procédures des élèves, rôle de l'institutionnalisation des nouveaux savoirs, nature des aides à apporter aux élèves, niveau de raisonnement pour amener les élèves à déstabiliser leurs erreurs ou à comprendre les limites de certaines procédures.

Conclusion

En conclusion, nous avons montré des évolutions dans les pratiques de Garance sur deux niveaux d'analyse. Au niveau global, elle modifie profondément ses progressions en ajoutant des genres de tâches manquants, des situations d'introduction, des institutionnalisations orales et écrites de méthodes de preuve et de contrôle. Au niveau local, elle s'appuie davantage sur les procédures des élèves pour montrer les limites du numérique et sur les propriétés du calcul algébrique pour justifier les écritures des expressions produites et prouver leur équivalence. Ces évolutions se retrouvent dans le bilan de fin d'année rédigé par Garance en juin 2012 :

> Dans un premier temps, ce travail m'a permis de proposer des types d'exercices que je n'avais pas l'habitude de proposer : le travail sur les égalités et les énoncés à démontrer du type : le carré d'un nombre pair est-il toujours un nombre pair ?
> Dans un deuxième temps ce travail m'a également fait réfléchir sur les méthodes de contrôle que je transmettais à mes élèves et comment je les transmettais. J'ai réalisé à quel point c'était implicite et que je n'explicitais les vérifications que lorsque c'était faux. J'ai institutionnalisé dans le cours différentes techniques de vérification.
> Dans un troisième temps, ce travail m'a aidée à penser des moyens de différencier les exercices. […] Le premier parcours a été brouillon et les objectifs n'étaient pas clairs pour moi puis progressivement j'ai défini l'objectif de la séance ce qui facilitait l'institutionnalisation. »

Ce bilan nous permet de rebondir sur les conditions à mettre en place pour transposer les savoirs didactiques en des ressources à même d'outiller les enseignants pour l'enseignement des mathématiques. Il ressort l'importance pour produire des ressources issues des savoirs didactiques qui s'intègrent dans une progression et pour prévoir des déroulements et des niveaux de justification visant à amener les élèves à valider ou invalider leurs procédures et à en comprendre les limites. Le travail collaboratif entre enseignant et chercheur présente des potentialités certaines, comme nous l'avons montré, pour avancer dans cette direction.

Références

Chevallard, Y., (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique, *Petit x*, n° 5, 51-94.

Chevallard, Y., (1989). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), 221-265.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en didactique de mathématiques. Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, hors-série, 19-40.

Coppé, S., & Grugeon-Allys, B. (2014 à paraître). Etude multidimensionnelle de l'impact de recherche en didactique dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : quelles évolutions ? Quelles contraintes ? Quelles perspectives ? Dans Butlen et al. (dir), *Actes de la 17ème école d'été de didactique des mathématiques*, Nantes du 19 au 26 août 2013. La Pensée Sauvage.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1995). *Calcul littéral : Savoirs des élèves de collège*. France : INRP.

Coulange, L., Grugeon-Allys B. (2008). A l'occasion d'un enseignement de l'algèbre destiné à des élèves en difficulté : à propos des pratiques enseignantes et de la diffusion de situations d'enseignement. *Petit x n°78* 5-23

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences, *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, 29 (8-9), 899-938.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Perter Lang.

Frege, G. (1971). É*crits logiques et philosophiques*, Éditions du Seuil, Paris.

Grugeon, B., Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématique*,s 17(2) 167–210.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In *Recherche en didactique des mathématiques*. *Hors série. Enseignement de l'algèbre, élémentaire Bilan et perspectives.* Coordonné par Coulange, Drouhard, Dorier & Robert. 137-162. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris. Disponible en ligne http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039

Ruiz-Munzon N., Matheron Y., Bosch M., Gascon J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, hors série, 87-106. Grenoble : La Pensée Sauvage Sauvage.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

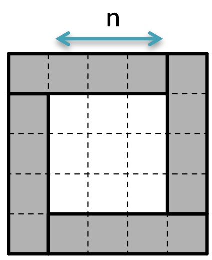
Annexe – Extraits des mises en commun et des institutionnalisations organisées par Garance sur le carré bordé

Le tableau suivant présente le découpage et les durées de chaque phase du déroulement effectif de la situation du carré bordé. Les phases retenues sont celles habituelles : phases de lancement, temps de recherche des élèves, mise en commun et institutionnalisation.

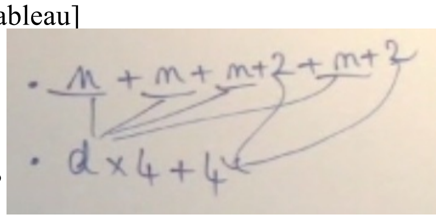
Année scolaire 2011/2012		
Etape	**Groupe**	**Durée**
Lancement	B et C	2’
Temps de recherche	B et C	37’
Mise en commun	C	3’20’’
Institutionnalisation (une 2nd séance)	B et C	1’50
Année scolaire 2012/2013		
Etape	**Groupe**	**Durée**
Lancement	B et C	1’20’’
Temps de recherche	B et C	26’32’’
Mise en commun	C	11’43’’
	B	9’
Institutionnalisation (la même séance)	B et C	3’

En 2011-2012

Extraits de la phase de mise en commun



1. **Ens** : Juste vous, on va faire un petit bilan. Hop ! Et le carré bordé ?
2. **Yann** : Le carré bordé ?
3. **Ens** : Le carré, là, il y a des bords, tout autour. Alors combien vous avez trouvé pour euh… Comment vous avez fait, pour trouver la formule ?
4. **Ens** : Vous (Yann et Michel), vous avez trouvé quoi, comme formule ?
5. **Yann** : Euh, *n* plus *n* plus *n* plus *n* + 2 plus *n* + 2 [Enseignant écrit au tableau]
6. **E1** : Trop long !
7. **Elèves** : Non ! Moi non ! J’ai…
8. **Ens** : Ok. Qu’est ce que vous avez trouvé d’autre, comme formule ? Vas-y, Divonne !
9. **Divonne** : Euh, c’est quoi le *n* ?
10. **Ens** : Bah, c’est pas grave. Mets ce que tu as mis !
11. **Divonne** : Je mets une lettre ? D. \\ *d* fois 4 plus 4 [Enseignante écrit au tableau]



12. **Ens** : Vous en avez trouvé d’autres ? Laure ?
13. **Laure** : Non, j’ai trouvé la même chose.
14. **Ens** : La même chose que qui ?
15. **Laure** : Bah que Divonne.
16. **Ens** : Ok. Et Mohamed et Samuel, vous avez trouvé une formule ou pas ?
17. **Mohamed** : Ouais, c’est un raccourci.
18. **Ens** : Marc et Tamara ?
19. **Ens** : Ok. Est-ce que, à votre avis (…) à votre avis, là, est-ce que ça donne la même ?

20. **E** : On a bon, nous, Madame. Regardez !
21. **Ens** : Ok. Et alors, pourquoi ça marche, pourquoi ça revient au même ?
22. **Samuel** : Parce que 4 *n* ça fait *d* fois 4 et 2 plus 2 ça fait 4 et…
23. **Yann** : parce que c'est la…
24. **Ens** : Parce que c'est la…?
25. **Yann** : La contraction.
26. **Ens** : La contraction ? ça veut dire quoi, en fait, la contraction ?
27. **E** : C'est décomposé.
28. **Yann** : Qu'il a été euh…raccourci !
29. **Michel** : Contracté !
30. **Ens** : Qu'est ce qu'on a euh…mis ensemble, qu'est ce que tu viens de dire Samuel ?
31. **Yann** : Euh, tous les *n* et tous les…
32. **E** : Simplifié.
33. **E** : Parce qu'on a factorisé.
34. **Ens** : Donc ça, on les a mis là et euh 2 plus 2, donc ce que tu as dit Samuel ?
35. **Yann** : tous les *n* et tous les…
36. **E** : simplifié.
37. **E** : Parce qu'on a factorisé.
38. **Ens** : Donc ça, on les a mis là et euh 2 plus 2, donc ce que tu as dis Samuel…?
39. **E** : Non, justement, on a ni développé, ni factorisé.
40. **Ens** : D'accord. Euh, ça ne vous dérange pas que ça ne soit pas la même lettre ?
41. **Elèves** : Non.
42. **Ens** : D'accord. Ça veut dire la même chose, hein.
43. **E** : Oui.
44. **Ens** : D'accord pour tout le monde. Alors je vous distribue, du coup, la deuxième partie.

Extraits de la phase d'institutionnalisation

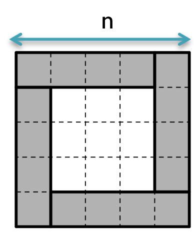
45. **Ens** : Donc pour montrer qu'une formule, que euh, deux formules, sont inégales… deux expressions ne sont pas égales, il suffit de le montrer pour un nombre. Par contre, comment on fait pour montrer que deux égalités sont égales ?
46. **Elève** : C'est la distributivité.
47. **Ens** : On se sert de quoi ? Voilà, des règles de calcul algébrique. Et vous, vous connaissez quoi comme règle ? […] Ok. Quand tu as deux égalités d'accord. Quand tu as deux expressions, pour voir si elles sont égales. Pour montrer qu'elles sont égales, si tu as des lettres, tu es obligé d'utiliser le calcul algébrique […] C'est le calcul avec les lettres. D'accord, pour pouvoir utiliser le calcul algébrique, ça veut dire que tu te sers de la distributivité.

En 2012-2013

Extraits de la phase de mise en commun

L'enseignante demande aux élèves combien il y a de carreaux colorés pour un carré blanc de 3 unités, 10 unités et 23 unités, puis elle leur demande leurs « techniques » pour déterminer ce nombre.

48. **Ens** : Alors ensuite, qu'est ce que vous avez trouvé… Comment vous avez fait pour le premier là ? C'est quoi votre technique ?
49. **Ens** : Oui, Gladys, lève la main par contre. Vas- y !
50. **Gladys** : On a compté les carrés
51. **Ens** : Vous avez compté les carrés. Qu'est ce que vous avez fait pour 10 unités ?
52. **Gladys** : On a aussi compté!
53. **Ens** : Vous avez aussi compté ! Est-ce que vous avez compté pour 100 ?
54. **Elèves** : Non !



55. **Ens** : Non ! Ensuite, vous avez essayé de mettre quoi en place…
56. **Elèves :** Une formule !
57. **Ens** : Voilà, une espèce de formule, une espèce de procédure. D'accord ? Alors, vous avez mis quoi comme calcul là ? pour le 100, vous avez trouvé quoi ? Vas- y Rachel.
58. **Rachel** : //Inaudible//
59. **Ens** : Alors, ça c'est la formule. C'est la quatrième question. Moi, ce que je te demande c'est : quel calcul tu as fait pour trouver le 100 ?
60. **Rachel** : Ah !
61. **Ens** : Vas- y !
62. **Rachel** : 100 x 4…
63. **Ens** : Donc, 100 x 4…
64. **Rachel** : 100 x 4 – 4
65. **Ens** : 100 x 4 – 4. Omar, c'est quoi la formule que vous avez fait ?
66. **Otmane** : En fait… En fait, on a fait, a fois 4 entre parenthèses
67. **Ens** : Alors ! ce que je veux ce n'est pas la formule mais c'est savoir comment tu as fait pour 100.
68. **Otmane** : On a fait 100 + 99 x 3
69. **Ens** : Voilà ! 100 + 99 x 3. Mayana, vous avez fait quoi vous ?
70. **Mariame** : 98 x 4 + 4
71. **Parash** : Non !
72. **Mariame** : Si
73. **Ens** : Ok ! Alors ce qu'on va faire… vous avez fait quoi vous Rachel , euh Laetitia pardon !
74. **Laetitia** : 100 x 4 – 4
75. **Ens** : 100 x 4 – 4 ! Ensuite, celui d'après, le 4 là ! qu'est ce que vous avez fait comme formule ? Vas y Laetitia, vous avez trouvé quoi comme formule vous ?
76. **Laetitia** : On n'a pas trouvé !
77. **Ens** : Vous n'avez pas trouvé la formule ?
78. **Mariame** : Moi, je peux le dire ?
79. **Ens** : Alors, comment vous avez fait pour trouver la formule ? Gladys, vous avez fait quoi ?
80. **Gladys** : *a* x 4 – 4 ! */ ENS le note au tableau /*
81. **Mariame** : Non ! C'est ça ?
82. **Ens** : Alors, ensuite, qu'est ce que vous avez trouvé ? Yasmine, vous avez trouvé quoi vous ?
83. **Yasmine** : (*a* – 1) x 3 + 4
84. **Ens** : Ok ! Mayana, vous avez trouvé quoi vous ?
85. **Mariame** : (*a* x 4) + 4. C'est pas ça ?
86. **Ens** : Non !
87. **Mariame** : Pourquoi non ? !
88. **Ens** : Attendez ce n'est pas clair ce que vous me dîtes !
89. **Mariame** : Ah je sais, c'est *a* – 2 x 4 + 4 !
90. **Ens** : * **Ens** écrit *a* – 2 x 4 + 4 * Comme ça ?
91. **Mariame** : Voilà !
92. **Pierre** : Il faut mettre les parenthèses !
93. **Pierre** : Non, il ne faut pas en mettre !
94. **Mariame** : Faut mettre les parenthèses ?
95. **Ens** : Faut mettre des parenthèses ou il ne faut pas en mettre ? la question est là !
96. **Mariame** : Il ne faut pas en mettre !
97. **Ens** : Donc, la question qui se pose là c'est est-ce que je dois mettre des parenthèses qui entourent le *a* – 2 ? Qu'est ce que veut dire le calcul là ?
98. **Un groupe d'élèves** : oui faut mettre !
99. **Un autre groupe d'élèves** : Non.
100. **Ens** : Bon, ce n'est pas oui ou non ! S'il faut en mettre, il faut dire pourquoi et s'il ne faut pas en mettre il faut me dire pourquoi. Vas y !
101. **Elève** : Parce qu'il faut faire le calcul en premier.
102. **Ens** : C'est quel calcul qu'il faut faire en premier ?
103. **Elève** : *a* – 2

104. **Ens** : (a – 2) d'accord ! Et si je ne mets pas de parenthèses, c'est-à-dire c'est quel calcul que je fais en premier ?
105. **Un groupe d'élèves** : 2 x 4
106. **Ens** : 2 x 4 pourquoi ? parce que la multiplication est prioritaire ce n'est pas parce que le « *a* on ne sait pas ce que c'est » ! Alors, qu'est ce que ça représente, en fait, le *a* ?
107. **Elève** : c'est n'importe quel nombre !
108. **Ens** : Oui c'est n'importe quel nombre. Mais est-ce que j'étais obligé de mettre *a* d'ailleurs ?
109. **Elèves** : Non !
110. **Ens** : J'aurais pu mettre quoi aussi ?
111. **Elèves :** *x*, *b*…
112. **Ens** : *b*, *x*… Je pourrai mettre n'importe quelle lettre. Donc, là, ce qui est bizarre, c'est que vous avez trouvé des formules qui sont différentes. Moi ce que je veux savoir c'est est-ce que vous avez tous trouvé la même formule ? Est-ce qu'il y en a ceux qui ont raison ? Ceux qui ont tort ? Qui a raison et qui a tort ? […]

Extraits de la phase d'institutionnalisation

113. **Ens** : J'aimerais bien, juste qu'on fasse une dernière synthèse sur ce que nous venons de voir aujourd'hui. Pourquoi on a utilisé des lettres ?
114. **E** : Pour trouver une formule !
115. **Ens** : On lève la main !
116. **Mariame** : Pour généraliser madame.
117. **Ens** : Qu'est ce que tu as dis ?
118. **Mariame** : Pour généraliser.
119. **Ens** : Pour généraliser. Très bien ! Une formule c'est pour généraliser. Est-ce qu'il y a une lettre qui est prédéfinie ?
120. **Elèves** : Non !
121. **Ens :** Non, on peut utiliser n'importe quelle lettre ! Vous avez tous pris *a*. Souvent, on utilise quoi comme lettre ?
122. **Elèves** : *x*
123. **Ens** : *x* ; *y* ; a aussi et il y a une troisième. .. C'est *n*.
124. **Elève** : *k*
125. **Ens** : Ah oui, *k* aussi, tu as raison ! mais souvent on utilise *n* pour les nombres entiers. Ensuite, est-ce que deux expressions avec des lettres peuvent être égales ou pas ?
126. **Elèves** : Oui !
127. **Elèves** : Non !
128. **Ens** : Si, ici on en a trouvé nous ! Là, on a trouvé que ça et ça c'est la même chose. D'accord ? Alors, ensuite, comment on fait pour montrer que deux expressions sont égales ? Vous avez commencé par faire quoi ? On utilise…
129. **Mariame** : On distribue !
130. **Ens** : voilà, on utilise la distributivité, les règles du calcul algébrique. Vous avez commencé par faire quoi vous ?
131. **Mariame et un élève** : par remplacer.
132. **Ens** : Voilà, vous avez commencé par remplacer la lettre par un nombre. Est-ce que quand on remplace les lettres par un nombre ça nous permet de montrer que deux expressions sont égales ?
133. **Elèves** : Oui.
134. **Ens** : Oui, si on met les mêmes. Mais est-ce que ça veut dire que c'est égal pour n'importe quel nombre ?
135. **Elèves** : non !
136. **Ens** : Non, voilà ! ça nous montre uniquement pour un seul nombre. Par contre, ce qu'elle nous permet de montrer c'est que si on obtient deux expressions qui ne sont pas égales comme dans la formule de tout à l'heure 396 et 397 ça, par contre ça nous permet de dire que deux expressions ne sont pas égales. Ça, ça s'appelle un contre-exemple. On retravaillera là-dessus la semaine prochaine. D'accord.