DES RESSOURCES AUX OUTILS POUR L'ENSEIGNEMENT : QUELLES CONDITIONS ?

Sylvie Coppé,
ESPE de Lyon, Université Lyon 1, UMR ICAR (Université Lyon 2, CNRS, ENS Lyon),
Brigitte Grugeon-Allys,
ESPE de Créteil – UPEC, LDAR, Université Paris Diderot-Paris 7

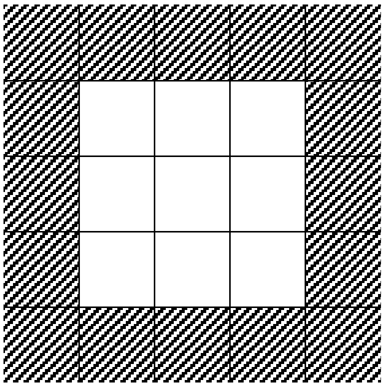
Introduction

La question de la diffusion des savoirs de la didactique des mathématiques dans différentes institutions, de leur impact sur les pratiques enseignantes et de la pertinence de cette diffusion a pris une grande importance notamment par le travail fait en formation des maîtres par les didacticiens depuis les années 1990, date de création des IUFM. Une question importante nous paraît donc de déterminer quelles sont les conditions et contraintes qui pourraient favoriser la diffusion des résultats de recherche de didactique de façon à être « durablement viables, à un coût supportable, en telle ou telle partie de l'institution scolaire » (Chevallard 2007). Ainsi on peut se demander quels résultats ont diffusé. Comment et où ? Qu'est-ce qui n'a pas diffusé ou a rencontré des difficultés dans la diffusion ? Quels éléments méthodologiques la communauté doit-elle développer pour étudier la diffusion des résultats de recherche dans les institutions ? Telles sont les questions que nous souhaitons aborder ainsi que celles plus globales, sur la production de ressources et celles des liens entre recherche et pratiques.

Dans cette conférence, nous nous limiterons d'une part à l'étude des documents institutionnels et d'autre part, au champ de l'algèbre parce qu'il existe de nombreux travaux en didactique sur ce thème. Ce champ s'est développé notamment parce que l'entrée dans l'algèbre constitue pour un grand nombre d'élèves un moment de rupture, un moment où l'activité mathématique perd son sens et se limite souvent à un jeu formel de règles dans des exercices de calcul littéral dont les raisons d'être sont obscures. Les nombreux travaux ont tenté de comprendre ces phénomènes, d'en faire émerger les causes et les mécanismes, de spécifier ce qui relève de difficultés cognitives ou épistémologiques liées à la nature même du domaine algébrique, ou bien de l'évolution du processus de transposition didactique ou encore de pratiques d'enseignement et de mettre en relation ces différentes sources de difficultés (Chevallard 1985, 1989, 1990, Gascon 1994, Kieran 1990, 2007, Chaachoua 2015).

Pour commencer et illustrer notre propos, nous reprenons l'exemple bien connu de l'activité « Le carré bordé », (Combier et al., 1996) bien connue à la fois par l'institution (on y fait également référence dans le document Ressource intitulé « Du numérique au littéral » (MEN 2006, 2009), par la recherche et dans les classes.

Voici le texte initial qui a été proposé par Combier et al. (1996) pour la classe de 6^{e}: on demandait le nombre de carreaux pour un carré de côté 5, puis 37, puis



> Vous venez d'utiliser une méthode pour calculer le nombre de carreaux hachurés quand le côté du carré compte 37 carreaux ; maintenant vous allez décrire cette méthode, en une ou plusieurs phases, pour qu'elle permette de calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré construit sur le même modèle. (p. 42)

Figure 1 – Le problème des carreaux colorés

Ce problème dont l'analyse montre qu'il est riche a plusieurs objectifs :

- motiver l'introduction de la lettre, des expressions algébriques ou de la distributivité (il peut constituer un moment de première rencontre) ;
- utiliser la distributivité pour justifier l'égalité des expressions trouvées pour tout… (construction du bloc technologico théorique) ;
- travailler sur les aspects sémantiques et syntaxiques.

Cette situation a été mise en œuvre et analysée plusieurs fois dans des classes dites ordinaires. Coulange et Grugeon (2008) ont étudié sa mise en œuvre par une professeure de collège dans deux classes de 3e avec des élèves en difficulté. Elles concluent ainsi qu'il est probable que les professeurs n'utilisent pas toutes ses potentialités. Ainsi le scénario de départ (proche de celui de Combier et al. 1996) est largement modifié par la professeure qui réduit fortement la phase de dévolution permettant d'établir les formules, qui s'attache à prouver les équivalences avec des arguments qualifiés de « légaux » par les auteures, c'est-à-dire fortement basés sur des règles techniques (« on a le droit »…). La faible dévolution et/ou le guidage excessif diminuent l'accès aux raisons d'être de la notion visée ou de la propriété travaillée et au détournement d'une situation de preuve. Par la suite, la professeure donne peu d'indications pour situer la situation en rapport avec les objectifs d'enseignement visés. Le niveau technologique (distributivité et équivalence des expressions) est oublié, car en tension avec des habitudes technologiques anciennes (pas d'usage du numérique pour dégager un contre-exemple, usage d'ostensifs et d'éléments technologiques d'ordre légal). La professeure n'institutionnalise pas le savoir visé. Cependant les auteurs notent une évolution lors de la seconde reprise : la professeure laisse davantage de temps et d'autonomie aux élèves pour élaborer les formules et elle oriente moins l'activité des élèves tout en restant très soucieuse du temps passé.

Une autre mise en œuvre a été observée par Coppé (2012, 2013) avec une professeure qui participe aux travaux du groupe de recherche collaborative sur la diffusion de ressources sur l'algèbre élémentaire (groupe SESAMES[1], documents disponibles sur le site

[1] SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation).

http://www.ens.fr/pegame/). L'auteure montre que la professeure, par sa connaissance fine des objectifs du problème et surtout par la mise en place de ce problème au sein d'une séquence d'enseignement avec des programmes de calcul (et non de façon isolée) permet aux élèves d'avoir un rapport plus conforme aux buts initiaux. La dévolution du problème est ainsi organisée avec des consignes qui évoluent et qui préparent la mise en commun qui est fortement pilotée par la professeure en fonction des objectifs et suivie d'une institutionnalisation en lien avec le problème.

A travers ces deux exemples de mise en œuvre nous avons voulu montrer qu'il ne suffit pas qu'une situation ait un potentiel didactique important pour qu'elle soit mise en œuvre de façon pertinente du point de vue des apprentissages. Cette situation est difficile à proposer dans une classe car elle nécessite une bonne connaissance des objectifs, des procédures d'élèves et surtout elle doit être replacée dans une progression. On peut donc voir qu'ici l'organisation mathématique locale avec les programmes de calcul qui précèdent la situation des carreaux et l'organisation didactique (une articulation entre des moments de première rencontre, d'institutionnalisation et de constitution du bloc technologico-théorique) sont déterminants dans la réussite de cette activité pour les apprentissages des élèves. Si ces conditions ne sont pas mises en place, cette situation risque de ne pas être exploitée avec intérêt pour les élèves et pour le professeur. Pour les élèves, si elle est trop éloignée des problèmes habituels ou si elle n'est pas posée au bon moment, elle peut se révéler trop complexe (ou trop simple) et dans tous les cas, ne pas permettre d'apprentissage ; pour les professeurs, si elle est trop éloignée de leurs pratiques, ils risquent de la simplifier (par l'ajout de multiples questions intermédiaires) ou de ne pas pouvoir gérer la mise en commun.

A la suite de cet exemple, nous faisons l'hypothèse que la diffusion de publications « en quête d'une présentation exploitable » par les enseignants, s'appuyant sur des pratiques de travail dissymétriques entre chercheurs et enseignants, va s'avérer insuffisante pour permettre une appropriation qui permette de faire évoluer les pratiques enseignantes de façon durable. En effet, un important travail de transposition reste à la charge des enseignants (et peut-être des formateurs) à la fois en ce qui concerne le choix des situations et tâches diffusées et la gestion didactique en classe.

La diffusion, une préoccupation ancienne en didactique

Des travaux sur la diffusion

Les questions portant sur la diffusion des recherches et des résultats constituent une préoccupation ancienne. Elles ont été abordées par de nombreux chercheurs (Artigue 1986, Brousseau 1989, Robert 2001, Chevallard 2007) et ceci, dès le début de la didactique des mathématiques, à travers plusieurs dimensions, au cours des étapes progressives de la construction de ce domaine.

Ainsi Artigue (1986), en prenant le point de vue de la reproductibilité, souligne l'importance de la question, puis pointe les contraintes qui pèsent sur la diffusion de pratiques innovantes. Elle aborde donc le difficile problème de la transformation des pratiques enseignantes et elle souligne que si les situations qui pourraient être implantées dans les classes ne sont pas suffisamment décrites et comprises, celles-ci seront abandonnées.

> Le problème auquel nous nous intéressons ici est celui de la reproductibilité des situations didactiques. C'est une question fondamentale car l'obtention de résultats dans ce domaine conditionne en partie les possibilités de transmission voire d'utilisation des travaux de recherche. (p. 7)

> L'expérience montre que ces situations où le maître, tout en exerçant un contrôle sur la dynamique de la classe, a le souci de laisser le plus possible aux élèves la responsabilité de la construction de leur savoir, sont des situations difficiles à gérer. En l'absence d'informations précises sur à la fois les certitudes et les incertitudes de leur dynamique, sur les moments clefs de décision, l'enseignant peut avoir tendance à forcer la reproduction de dynamiques déjà observées ou décrites dans des documents, la réalisation de cette reproductibilité externe se faisant souvent contre une reproductibilité au niveau du sens. (p. 56)

En 1989, Brousseau, dans un article intitulé « Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège », indique que pour que les connaissances puissent se diffuser il est important qu'elles puissent trouver leur place dans le système de connaissances et compétences, déjà installées, du professeur. Il introduit le terme de « connaissances sur l'enseignement ».

> Le professeur s'attend à ce qu'*AU MOINS* la didactique lui [au professeur] fournisse l'essentiel des *TECHNIQUES SPECIFIQUES* des *NOTIONS* à *ENSEIGNER*, compatibles avec ses conceptions éducatives et pédagogiques générales. (p. 50) (majuscules conservées)

Comme Artigue, il précise ensuite que, si l'on voulait décrire à un professeur les conditions optimales de reproduction des situations, cela nécessiterait un texte très long dans lequel il faudrait veiller aux termes employés, entre des termes spécifiques qui renvoient à des cadres théoriques et les termes de la profession.

Plus récemment Chevallard (2007) indique :

> […] le second grand type de problèmes […] est celui de la diffusion (et de la non-diffusion) des praxéologies didactiques dans l'espace institutionnel d'une société (voire d'une civilisation) et tout particulièrement au sein de son Ecole. […] celui de la diffusion – et surtout des difficultés de la diffusion, notamment dans l'enseignement secondaire français – des praxéologies didactiques engendrées par la théorie des situations didactiques. Quelles contraintes empêchaient leur libre circulation et leur pleine pénétration institutionnelle ? Sous quelles conditions ces praxéologies étaient-elles durablement viables, à un coût supportable, en telle ou telle partie de l'institution scolaire ? (p. 15)

Les travaux de Robert montrent bien, d'une part, la nécessité de tenir compte des pratiques effectives des enseignants (Chesné et al. 2009) et, d'autre part, ils soulèvent de nombreuses questions, encore en débat, sur la formation. Voici ce qu'indiquait Robert il y a 10 ans déjà, sur cette difficulté de la diffusion et, par conséquent sur l'élaboration de formations :

> C'est là qu'est le vrai mystère, que ce soit pour comprendre les difficultés à adopter en classe des séquences non habituelles, ou pour évaluer le rôle de ce que l'enseignant dit ou ne dit pas, ou pour comprendre comment se forment les pratiques, voire pour percevoir les besoins des formés, avant de concevoir des scénarios de formation (y compris continue) (Robert, 2004, p.19)

Enfin la théorie de la double approche (Robert 2001, 2008) permet de rendre compte des contraintes qui pèsent sur le professeur et de donner des éléments d'explication à la difficulté liée à la mise en place effective de situations d'enseignement / apprentissage ayant une certaine robustesse didactique. On peut aussi trouver cette idée de contraintes mais de cohérence des pratiques chez Roditi (2008).

L'analyse des stratégies d'enseignement montre que les ingénieries didactiques ne sont pas reprises dans l'enseignement ordinaire mais, au-delà de ce constat, des divergences apparaissent, notamment concernant l'introduction et l'institutionnalisation du nouveau savoir. (p. 83)

En conclusion, depuis près de trente ans, se pose la question de la diffusion des résultats des recherches en didactique à la fois aux chercheurs qui produisent ces résultats et aux formateurs impliqués dans la formation des maîtres, mais sans toujours faire l'objet de véritables recherches.

Le contexte de la diffusion

Nous abordons l'étude de la diffusion des résultats de recherche en didactique de l'algèbre dans un contexte particulier : celui du changement de programme de 2005 puis 2008 en France qui a particulièrement affecté l'enseignement de l'algèbre.

Ce changement de programme est l'aboutissement d'un long processus, exemple d'un contexte spécifique en France de diffusion de savoirs issus de la didactique qui impliquait des didacticiens, des membres d'associations et de sociétés savantes, l'APMEP, la SMAI, la SMF et l'UPS[2]. L'enjeu était de réfléchir à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques « suite à des secousses importantes, voire à un véritable séisme de notre système éducatif » après la réforme des mathématiques modernes de 1970. La rédaction des nouveaux programmes de 2008 s'est appuyée sur des propositions de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), présidée par J.P. Kahane, créée en avril 1993. Cette commission, constituée de chercheurs en Didactique des Mathématiques et d'enseignants de mathématiques engagés dans la formation au sein des IUFM, était donc liée au milieu de la recherche en didactique et de la formation des maîtres. Les programmes de collège correspondant au domaine « Travaux numériques » ont pris en compte les recommandations du rapport sur le calcul coordonné par M. Artigue. Ce contexte de diffusion a été aussi facilité par le développement des IREM depuis 1968 en lien avec le développement de la recherche en didactique des mathématiques[4].

L'évolution des programmes illustre bien aussi, pour cette période de 1970 à 2005, les relations entre les membres de la noosphère, des didacticiens, des formateurs des IREM et des IUFM, favorables à la diffusion de savoirs de didactique. Les conditions semblaient donc favorables pour diffuser les résultats de la recherche en didactique de l'algèbre.

Approche multidimensionnelle pour étudier la diffusion

Pour étudier la diffusion des résultats de recherche dans différentes institutions, nous proposons une étude multidimensionnelle. Ce choix nous permettra d'interroger comment les résultats de recherche ont diffusé au cours du processus de transposition didactique, à différents niveaux de co-détermination didactique, et quels ont été leurs impacts sur les pratiques enseignantes. Nous mobilisons les cadres théoriques et les outils adaptés aux différentes dimensions mises en jeu pour prendre en compte différentes échelles, différents

---

[2] APMEP : Association des Professeurs de Mathématiques de L'enseignement Public, SMAI : Société des Mathématiques Appliquées et Industrielles, SMF : Société Mathématique de France, UPS : Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques.

[3] La CREM est issue d'un groupe de réflexion, le GRIAM, Groupe Inter-Associations de Mathématiciens, regroupant quatre associations, l'APMEP, la SMAI, la SMF et l'UPS. Sa mission fut de dégager les évolutions à long terme des objectifs et des contenus de l'enseignement des mathématiques, de l'école élémentaire à l'université, et de faire évoluer en conséquence la formation initiale et la formation continue des enseignants de mathématiques, ainsi que les concours de recrutement. La commission comprenait des représentations des quatre associations. Elle a réuni ensuite les représentants les plus éminents de tous les groupes auxquels l'institution a officiellement confié l'élaboration et la mise en place des programmes de mathématiques. J. C. Duperret indique que « la composition de la commission a été mûrement réfléchie : sa richesse et son éclectisme seront un atout majeur de sa réussite. La diversité des expériences et des secteurs représentés traduit un désir d'ouverture et de prise en considération de tous les acteurs concernés sans exclusive. »
http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/etudes/histoire-de-la-c-r-e-m-1999-2001-1/.

[4] A cette période, les directeurs d'IREM étaient souvent très proches de la recherche en didactique des mathématiques.

niveaux de granularité ainsi que les caractères générique et spécifique des phénomènes étudiés. C'est une étude exploratoire pour étudier la diffusion et l'impact réel des résultats de recherche en didactique de l'algèbre, pour en comprendre les freins et faire des hypothèses sur des conditions favorables à une diffusion plus adaptée aux besoins des enseignants.

Nous étudierons plusieurs types de documents qui participent à la diffusion et qui correspondent à des niveaux de transposition didactique :

- les documents institutionnels : les programmes, les documents ressources,
- les manuels scolaires,
- des articles dans les revues d'interface telles que Petit x, Repères IREM,
- des publications des IREM et de l'INRP/IFE.

Cette diffusion concerne la noosphère, rédacteurs des programmes, membres de l'inspection générale, chercheurs, auteurs des manuels et formateurs impliqués dans la formation ou la recherche.

En revanche, nous n'avons pas abordé les apprentissages des élèves. Les résultats des évaluations CEDRE de 2006 ne permettent pas d'analyser l'impact de la réforme de 2008 sur les acquis des élèves et les prochaines épreuves de CEDRE n'auront lieu qu'en juin 2014.

Principaux résultats de recherche en algèbre

Nous reprenons une synthèse des principaux résultats de recherche bien établis en didactique de l'algèbre. Nous les structurons selon trois approches, cognitive, sémiotique et anthropologique. Cette synthèse s'appuie, sur les articles de la première partie du numéro spécial « Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives » coordonné par Coulange et Drouhard dans la revue RDM[5] (Coulange et Drouhard 2012), sur les travaux de Chevallard (1985, 1989, 1990), sur l'ouvrage coordonné par Bednarz, Kieran et Lee (1996) et sur le chapitre 16 relatif à l'enseignement de l'algèbre du *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Kieran 2007). Ces résultats constituent autant de points de repère pour définir des éléments épistémologiques caractérisant l'algèbre élémentaire dans ses dimensions *outil* et *objet* au sens de Douady (1986), qui permettent la construction d'un rapport idoine à l'algèbre : un champ de problèmes - des problèmes de modélisation *via* les relations fonctionnelles entre données et variables, des problèmes conduisant à une mise en équation, des problèmes mettant en jeu la généralisation et la preuve -, différents statuts des lettres en lien avec la résolution des problèmes du domaine algébrique, une dialectique entre le numérique et l'algébrique, les aspects procédural et structural des objets de l'algèbre, leur équivalence, les différentes représentations sémiotiques d'un objet dans différents registres de représentation sémiotique du domaine de l'algèbre. Ils structurent une référence épistémologique du rapport à l'algèbre visé pour organiser l'analyse des programmes, des manuels scolaires et des publications, en ce qui concerne l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre.

Des résultats portent d'abord sur l'identification et la compréhension des difficultés des élèves dans le processus de conceptualisation de l'algèbre. Ils proviennent de recherches réalisées dans des approches cognitive et sémiotique. L'entrée dans l'algèbre suppose une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre (Vergnaud 1988, 1989) dans les deux dimensions *outil* et *objet*, rupture réinterprétée par Kieran (1990) en termes de

[5] RDM : Recherche en Didactique des Mathématiques

fausses continuités et discontinuités. Kieran (2007) définit quatre sources de signification au cœur du processus de conceptualisation de l'algèbre : une signification interne aux mathématiques qui relève d'abord de la structure algébrique et sémantique des objets de l'algèbre mais aussi de la nécessité d'articuler différentes représentations mathématiques d'un objet dans différents registres de représentation sémiotique (Duval 1996), une signification liée au contexte de résolution à travers différents types de problèmes, généralisation, modélisation, preuve (Bednarz, Kieran et Lee 1996), une signification extérieure aux mathématiques en lien avec l'environnement culturel (Radford 2000). La signification interne des expressions algébriques s'appuie sur la mise en relation des différents statuts des lettres, la mobilisation des aspects procédural et structural des expressions (Sfard 1991, Sfard et Linchevski 1994), le développement d'une flexibilité dans leur interprétation autour des aspects syntaxique et sémantique des expressions (Drouhard 1992) et de leur équivalence.

Kieran (2007) distingue trois aspects de l'activité algébrique :

- une activité générative qui concerne la génération et l'interprétation des relations entre des objets de l'algèbre mis en jeu,
- une activité transformationnelle qui concerne la manipulation des expressions algébriques, des équations,
- une activité globale qui concerne la mobilisation et l'usage de l'algèbre pour résoudre différents types de problèmes du domaine algébrique.

Ces différents aspects de l'activité algébrique sont au cœur du développement des différentes sources de signification de l'algèbre et doivent permettre un pilotage intelligent et raisonné du calcul en fonction du but poursuivi et un contrôle syntaxique et par la sémantique interne des expressions équivalentes obtenues par transformation, articulant algébrique et numérique.

Dans le cadre de l'approche anthropologique, d'autres travaux (Chevallard 1985, 1989, 1990, Gascon 1994) interrogent la place et la fonction du savoir algébrique, à travers les différentes étapes de la transposition didactique, à différentes époques du système éducatif, qui ont conduit à dénaturer l'enseignement de l'algèbre et à favoriser la construction de rapports à l'algèbre non idoines. L'algèbre n'est pas une arithmétique généralisée (Chevallard 1989, Gascon 1994) mais un domaine mathématique beaucoup plus vaste impliquant différents types de problèmes, raisons d'être de l'algèbre, cités plus haut. Ainsi, l'algèbre permet de développer le langage de la modélisation mathématique pour exprimer des rapports entre les mathématiques et d'autres domaines scientifiques, mais aussi le langage de la généralisation pour exprimer les propriétés des opérations et les régularités de l'arithmétique. Un des enjeux de l'enseignement de l'algèbre est d'amener les élèves à développer un rapport fonctionnel à l'algèbre dans ses différents emplois (Chevallard 1985, 1989). Le jeu dialectique entre numérique et algébrique pour conjecturer puis prouver permet d'entretenir les liens entre l'algèbre et le numérique (Chevallard 1985, 1989), ce qui permet d'assurer une certaine continuité entre arithmétique et algèbre. Ruiz-Munzon (Ruiz-Munzón 2010, Ruiz-Munzón et al. 2012) définit l'algèbre élémentaire comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul. La première étape motive la nécessité d'expliciter globalement la structure d'un programme de calcul et non son processus pour développer des techniques de manipulation, ce qui conduit à de nouvelles techniques de création et de simplification d'expressions algébriques et un nouvel environnement technologico-théorique pour étudier l'équivalence des programmes de calcul à travers celle des expressions. La deuxième conduit au passage de la manipulation des expressions à celle du calcul équationnel et la troisième étape engage la modélisation fonctionnelle.

En bilan, nous retenons que l'enseignement de l'algèbre doit viser le développement d'un rapport fonctionnel à l'algèbre visant un calcul intelligent et contrôlé, au service de la résolution de problèmes – problèmes de modélisation, de mise en équation, de généralisation et de preuve – qui permet un pilotage du calcul en fonction du but poursuivi, en appui sur la structure interne des objets, sur un contrôle syntaxique et par la sémantique interne des expressions équivalentes obtenues par transformation, articulant la dialectique algébrique / numérique.

Etude de l'évolution des programmes de collège

Nous choisissons comme première entrée l'analyse du curriculum officiel. À partir de 2005, les programmes du collège ont changé de façon progressive (en 2005 en 6^e, 2006 en 5^e, etc.). Des indices sur ces changements pourraient laisser penser à une prise en compte par l'institution de résultats de travaux en didactique, avec, en particulier, la place accordée aux expressions algébriques préalablement aux équations, l'introduction des preuves en algèbre à côté de celles en géométrie et enfin une introduction de la lettre par son statut de variable et pas seulement d'inconnue.

Cette évolution va de pair avec la place accordée à la résolution de problèmes depuis 1978. Ainsi, l'institution met en avant la résolution de problèmes pas seulement en réinvestissement. Voici un extrait des programmes qui montrent cette volonté institutionnelle depuis la fin de la période dite des mathématiques modernes.

> L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt et qu'elle soit suivie immédiatement d'applications substantielles. (BO du 5 mars 1981, p.1)

On peut voir là des influences d'une part des hypothèses constructivistes pour lesquelles les notions de problème ainsi que les processus d'assimilation et d'accommodation sont fondamentales, et d'autre part des recherches en didactique des mathématiques comme la théorie des situations de Brousseau (1998) et la dialectique outil/objet de Douady (1986).

> Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation adidactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. […] (p. 60)
> Le maître doit effectuer, non la communication d'une connaissance, mais la dévolution d'un bon problème. (p. 61)

En ce qui concerne l'algèbre voyons tout d'abord quelques grands traits sur l'évolution des programmes.

Les programmes avant 2005

Dans les programmes de 1923, 1945, 1958 on trouve deux domaines : celui de l'arithmétique et celui de l'algèbre ; l'algèbre étant vue comme une arithmétique généralisée. A partir de 1970 (réforme des mathématiques modernes), il y a disparition de cette dialectique (Chevallard 1985). On note alors un rapport formel au calcul algébrique (celui-ci intervient de façon non motivée dans des exercices non finalisés) et peu d'usage de l'algèbre comme outil de résolution de problèmes (modélisation, démonstration). Les nombres relatifs sont introduits en 5^e et en 4^e, il est fait explicitement référence au calcul sur les polynômes (qui disparaîtront des programmes en 1978). Voici un extrait du programme de 4^e qui montre bien ce rapport formel au calcul.

> II Nombres décimaux relatifs et approche des réels
> 3 . Sur des exemples numériques, équations et inéquations du premier degré à une inconnue.
> 4 . Exercices de calcul sur les polynômes
> Produits $(a + b)^2(a - b)^2$ et $(a + b)(a - b)$. Exercices de factorisation. (BO du 22 juillet 1971)

A partir de 1985, on note plusieurs changements qui seront repris dans les programmes suivants. Tout d'abord, les programmes sont découpés en 3 secteurs communs à toutes les classes du collège (tout ce qui se rapporte à l'algèbre se situant dans le 2).

1. Travaux géométriques.
2. Travaux numériques.
3. Gestion de données, fonctions.

Puis on relève une entrée plus progressive dans l'algèbre en classe de 5e avec les équations et le début de la dialectique numérique/algébrique à travers la propriété de distributivité qui est vue d'abord sur les nombres positifs ou à travers le calcul mental.

> 2.1.1 Enoncer sous leur formulation littérale et utiliser uniquement sur des exemples numériques, les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a – b) = ka – kb$.
> […]
> 2.3 Équations numériques
> Résoudre une équation à coefficients numériques du type $a + x = b$ où a et b sont deux nombres décimaux relatifs ou $a\,x = b$ avec a non nul. Mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficients numériques de l'un des types précédents. (BO n° 44 du 12 décembre 1985)

Le terme « calcul littéral » n'apparaît qu'en classe de 4e, ce qui conforte l'idée de la progressivité de l'entrée dans l'algèbre en 5e et met moins l'accent sur la partie calcul :

> L'initiation aux écritures littérales se poursuit, mais le calcul littéral ne figure pas au programme. (BO n° 44 du 12 décembre 1985)

Les programmes depuis 2005

A partir de 2005 puis dans les programmes suivants de 2007 et 2008, ce sont 4 secteurs qui organisent les programmes :

1. Organisation et gestion de données. Fonctions.
2. Nombres et calculs.
3. Géométrie.
4. Grandeurs et mesures.

Ce qui relève de l'algèbre se trouve alors dans les secteurs 1 (« utiliser/produire des expressions littérales »), 2 (distributivité, équations, etc.) et 4 (référence à l'utilisation des formules).

Un des objectifs de l'algèbre est indiqué en 2007 dans l'introduction qui montre encore une fois l'accent mis sur la résolution de problèmes :

> Assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation). (BO n° 6 du 17 avril 2007)

On précise explicitement un nouveau type de tâche : démontrer des propriétés algébriques (voir sur ce sujet des preuves en algèbre l'étude de Barallobres 2004) :

> Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer. (BO HS n° 5 du 9 septembre 2004)

Enfin le socle commun de connaissances et compétences est introduit en 2007, ce qui a beaucoup d'impact sur l'enseignement de l'algèbre puisque certains thèmes comme les équations ne font pas partie du socle. On peut noter qu'en 5e, « Produire des expressions littérales » ne fait pas partie du socle alors que « Utiliser des expressions littérales » en fait partie.

> Dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue (BO n° 6 du 17 avril 2007).

En 5e, on introduit la formule de distributivité sous les deux formes (addition et soustraction) ; elle est donnée sans quantificateur :

> Sur des exemples numériques / littéraux, utiliser les égalités $k\,(a + b) = k\,a + k\,b$ et $k\,(a - b) = k\,a - k\,b$ dans les deux sens. L'intégration des lettres dans ce type d'égalité est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique et graphique. (BO n° 5 du 25 août 2005)

On peut donc penser que cela permettra de faire vivre les types de tâches « développer et factoriser des expressions littérales ». Mais, en 5e, celles-ci sont assez peu variées puisque la multiplication des relatifs n'est pas au programme, la double distributivité est au programme de 4e avec les développements et enfin les identités remarquables et les factorisations au programme de 3e. Or, il faut bien noter que pour passer de l'écriture de $3x + 5x$ à $8x$, la technique associée à ce type de tâches est de factoriser par x et la propriété de distributivité en est un élément technologique.

Conclusions

En ce qui concerne l'évolution, on peut conclure que la classe de 5e constitue maintenant une année « de première rencontre » avec des savoirs algébriques qui seront étudiés dans les niveaux suivants, qu'il y a une tentative d'articuler deux organisations mathématiques jusque-là isolées : une portant sur les équations et une autre sur le calcul littéral. Et enfin, même si l'on note une évolution des genres de tâches (généraliser, prouver, démontrer, modéliser) l'explicitation des finalités de l'algèbre au collège n'est pas encore suffisante (celles-ci seront vues au lycée).

Plus spécifiquement, pour les programmes à partir de 2005, cette étude montre, selon nous, des tendances contradictoires. Ainsi, on peut penser que les concepteurs de programme ont voulu rendre l'enseignement de l'algèbre moins formel et moins technique et mettre l'accent sur les types de problèmes qui peuvent être résolus. Ce qui peut s'analyser comme un effet des recherches en didactique de l'algèbre en prenant en compte les deux organisations mathématiques citées ci-dessous (plus seulement les équations) par le biais de l'étude de l'équivalence des expressions, en introduisant la lettre comme variable avant inconnue (mais de façon peu lisible pour les professeurs) et associant les aspects sémantiques et syntaxiques. Mais, ce qui relève de l'algèbre en termes soit de types de tâches, soit de techniques, soit de technologie est disséminé dans les différents secteurs pour une même année et dans les différents niveaux. Il y a donc un risque que les types de tâches soient morcelés, que la distributivité n'apparaisse pas comme un élément technologique opérationnel pour les techniques de calcul, que les professeurs n'arrivent pas à construire des organisations mathématiques cohérentes sur un niveau et sur le collège et donc que les élèves n'arrivent pas à voir la puissance de l'outil algébrique à la fois dans son aspect de moyen de résolution de problèmes et dans son aspect technique de calcul. C'est ce que nous avons appelé l'atomisation de l'enseignement de l'algèbre (Assude, Coppé et Pressiat 2012). Enfin la place des relatifs entre 5e/4e n'aide pas à développer des organisations mathématiques autres que ponctuelles ou locales.

Analyse des documents ressources

Pour compléter cette analyse, nous étudions les documents d'accompagnement qui constituent des ressources institutionnelles pour les enseignants. Trois concernent l'algèbre : « Du numérique au littéral » (MEN 2006 puis 2008), « Raisonnement et démonstration » (MEN 2009) et « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée » (MEN 2013).

Analysons rapidement de quoi ils sont constitués pour déterminer quels types de ressources les enseignants peuvent y trouver. Dans « Du numérique au littéral » qui a été écrit à la suite des nouveaux programmes de 2005, on trouve des références assez claires aux savoirs didactiques sur l'algèbre sur les différents statuts de la lettre ou du signe égal, sur la place des formules, sur les résolutions arithmétiques/algébriques, sur les différents aspects structural et procédural. Trois problèmes bien connus provenant de Combier et al. (1996) sont utilisés pour illustrer ce qui est dit (Les carrés bordés, La boite, Alice et Bertrand). Pour terminer, le programme du collège pour l'algèbre est résumé dans un tableau par niveau en tenant compte des divers points cités. Chaque statut de la lettre est associé à un niveau de classe, ce qui voudrait signifier qu'il y a une sorte de progressivité dans l'apprentissage des statuts de la lettre, ce qui nous semble fortement discutable. Là encore on peut y voir le signe d'un émiettement. Enfin ce document fait référence aux programmes de calcul alors que ce terme n'apparaît pas dans les programmes.

Pour ce document, on peut donc noter une volonté institutionnelle de donner certains éléments de savoir aux enseignants en faisant l'hypothèse que ces connaissances didactiques vont être mises au service de l'élaboration d'organisations mathématiques et didactiques pour la classe : peut-on parler comme Brousseau (1989) de savoirs pour l'enseignement ? Certaines raisons d'être de l'enseignement de l'algèbre au collège sont bien mentionnées mais pas de façon suffisamment explicite pour piloter les organisations mathématiques.

Dans le document « Raisonnement et démonstration » (MEN 2009) un paragraphe est consacré au calcul littéral, marquant la volonté des auteurs de ne pas focaliser le raisonnement que sur la géométrie, conformément au programme. Il est précisé :

> Le calcul littéral constitue en lui-même un mode de raisonnement, grâce auquel on dépasse le stade de l'investigation sur quelques cas particuliers pour accéder au niveau de la généralisation. C'est par exemple une démarche naturelle pour s'assurer de l'exactitude d'une conjecture émise dans le cadre d'un programme de calcul.
>
> Le calcul littéral permet de démontrer certaines propriétés arithmétiques (la somme de deux nombres pairs est paire, etc.).
>
> Il donne par ailleurs la possibilité d'activités spécifiques amenant à un travail sur les notions de propriété directe et de réciproque, en particulier lors de la résolution d'équations ou d'inéquations. (p. 18)

On peut interpréter cet extrait comme l'énoncé de raisons d'être qui justifieraient l'insistance portée aux activités de preuve en algèbre, à côté des preuves en géométrie, et qui permettent de mettre en œuvre différents types de raisonnements mathématiques. Là encore il est fait référence aux programmes de calcul comme un outil pour l'enseignement mais sans davantage de précisions.

Enfin dans le document « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée » (MEN 2012), le paragraphe 4 est consacré à « L'apprentissage du calcul littéral » dans lequel quatre problèmes isolés sont proposés :

- un programme de calcul nommé algorithme qui permet d'implémenter une formule dans un tableur (seulement pour faire calculer différentes valeurs) ;
- une association entre des écritures littérales et leur signification ;
- une formulation de conjecture sur la somme des six premiers termes d'une suite de Fibonacci et la démonstration ;
- une situation d'introduction d'équations illustrée par des programmes de calcul déguisés.

Notons que pour ces deux dernières situations, les auteurs proposent un « scénario de mise en œuvre possible ».

En conclusion, ces documents fournissent d'une part des connaissances théoriques provenant de la recherche qu'on peut supposer utiles pour l'enseignement et d'autre part des problèmes isolés qui ont pu faire l'objet de recherches mais sans les références (comme, par exemple, *Les carrés bordés*). En revanche, ils ne fournissent pas de liens opérationnels entre connaissances et situations de classe, d'éléments sur les évolutions de la transposition didactique qui pourraient expliquer, éclairer les changements. Certaines analyses des problèmes peuvent contribuer à justifier l'introduction de nouveaux objets, à expliciter des raisons d'être, mais de façon encore trop implicite. Le statut des problèmes proposés n'est pas explicite : s'agit-il de simples exemples, d'exemples génériques, d'une typologie des problèmes, de problèmes permettant de développer des compétences de base. Il n'y a ni indications d'organisations mathématiques même ponctuelles ou locales ni d'organisations didactiques. Ainsi, on pourrait dire que cette analyse révèle un manque dans la diffusion de technologies (voire de techniques) didactiques pour utiliser les ressources. On peut donc faire l'hypothèse que ces documents n'auront pas le rôle et la fonction qui leur sont institutionnellement attribués (d'ailleurs il est connu que les documents ressources ne sont pas lus par les professeurs). En revanche ils peuvent constituer des ressources pour les formateurs qui peuvent ainsi avoir aussi des éléments de légitimation institutionnelle de leur discours.

Voyons maintenant comment les hypothèses que nous avons faites se traduisent dans les manuels de collège.

Etude des manuels de 5^e et 4^e depuis 1995

Notre analyse porte plus particulièrement sur les manuels de la classe de 5^e puisque nous avons vu que c'est à ce niveau que se situent les changements. Nous avons étudié sept manuels de la classe de 5^e correspondant au programme de 1995 (publiés en 2001), dix manuels correspondant au programme de 2005 (publiés en 2006) et sept manuels correspondant au programme de 2008 (publiés en 2010).

Un premier critère d'analyse a été le nombre et le titre des chapitres consacrés à l'algèbre. En 1995, nous notons une assez grande uniformité puisque cinq proposent un chapitre « résolution d'équations » (ce qui est conforme à l'organisation mathématique dominante en 1995), un manuel propose un chapitre « Initiation au calcul littéral » et le dernier ne propose aucun chapitre. Tous introduisent la propriété de distributivité dans le premier chapitre sur les nombres et les opérations, avec les deux formulations, l'ensemble de référence étant les décimaux. A cette occasion, trois d'entre eux définissent « développement » et « factorisation ». Les types de tâches sont fortement en lien avec l'utilisation de la propriété de distributivité soit pour développer, soit pour factoriser. Les problèmes sont simples et l'injonction de faire deux calculs est essentiellement motivée par l'utilisation de la distributivité.

Voici les types de tâches que nous avons répertoriés (nous gardons les termes utilisés dans les manuels) :

- calculer de deux façons différentes des expressions numériques / littérales du type $k\,(a \pm b)$;
- simplifier / écrire plus simplement / factoriser des écritures littérales du type $a\,x + b\,x$;
- calculer mentalement en utilisant la distributivité ;

- résoudre des problèmes en faisant deux calculs différents.

Les manuels de 2006 sont différents : on constate que les premiers manuels après la réforme ont une variété de chapitres plus importante que l'édition suivante (figure 2). Ceux qui ne proposent pas de chapitres spécifiques ont un paragraphe concernant le calcul littéral dans le premier chapitre sur les nombres comme dans les manuels précédents et introduisent une partie algèbre dans chaque chapitre. On peut voir là une certaine inertie du système qui ne prend pas en compte les modifications aussitôt (déjà pointé pour les fonctions par Coppé et Dorier 2009).

Manuels de 2006 (10 manuels)				
Expressions littérales	*Calcul littéral*	*Initiation au calcul littéral et équations*	*Equations*	*Pas de chapitre calcul littéral partout*
Babylone Bordas	Phare Hachette Sesamaths	Prisme Belin Triangle Hatier 5^e Bréal	Transmath Nathan	Diabolo Hachette Maths Magnard Domino Nathan
Manuels 2010 (7 manuels)				
Transmath Nathan Myriade Bordas	Phare Hachette Zénius Magnard Sesamaths	Triangle Hatier Nouveau Prisme Belin		

Figure 2 – Les chapitres dans les manuels de 5^e de 2006 et 2010

L'ordre proposé par rapport aux relatifs est lui aussi variable : certains manuels introduisent les relatifs puis le calcul littéral alors que d'autres procèdent dans l'ordre inverse. Or, l'introduction de la propriété de distributivité avant les relatifs suppose des conditions restrictives sur $a - b$ qui ne sont jamais précisées. Ceci peut sembler surprenant car il nous semble que l'entrée dans l'algèbre se fait aussi par les relatifs (souligné par Vergnaud 1989). Nous avons ensuite analysé les types de tâches et particulièrement celles concernant les preuves.

Même si les chapitres sont différents, on trouve tout de même une certaine uniformité des types de tâches :

- écrire (produire) une expression littérale (il s'agit de « traductions » langage naturel / symbolique ou du registre géométrique vers des écritures symboliques) ;
- remplacer un nombre dans une expression littérale, tester des égalités ;
- simplifier des écritures littérales (notons que ce n'est pas le même sens que précédemment puisqu'il s'agit notamment de supprimer les signes x ou des parenthèses inutiles) ;
- développer, factoriser, réduire et développer puis réduire des expressions littérales simples.

Ces quatre derniers types de tâches sont ceux qui concernent les techniques de calcul littéral. Dans les manuels, « factoriser et réduire » sont des tâches distinguées par la forme des expressions. Ainsi le type de tâches consistant à transformer l'écriture $a\,x \pm b\,x$ en $(a \pm b)\,x$ (a et b étant des nombres) est souvent désigné par « réduire » dans les consignes des exercices. Ce terme est défini dans le cours par « *réduire une expression algébrique, revient à l'écrire avec le moins de termes possibles* ». Là encore, on ne donne pas de technique, on montre la forme finale, avec des critères qui ne permettent pas le contrôle : que veut dire « le moins de termes possibles » ?

On constate que les types de tâches sont plus diversifiés que ceux des manuels précédents, ce qui correspond au programme. En revanche, même si le programme le préconise, on trouve encore peu de types de tâches de preuve ou de généralisation à la fois en classe de 5e et de 4e, comme on peut le voir dans les deux tableaux suivants, et ceci même lors de la seconde édition. Pour effectuer une comparaison, nous donnons, pour les manuels de la classe de 4e, le nombre d'exercices portant sur les techniques de calcul (désignés par « autres » dans le tableau) dont les énoncés sont « développer et réduire, factoriser, enlever les parenthèses ».

Manuels	Prisme Zenius	Transmath Triangle	Myriade	Phare	Sésamath
	Aucun exercice de preuve	Un exercice en approfondissement	Deux exercices en approfondissement avec des programmes de calcul	Trois exercices en approfondissement dont un avec un programme de calcul	Cinq exercices dont un avec un programme de calcul

Figure 3 – Les exercices de preuve dans les manuels de 5e de 2010

Manuel	Phare	Prisme	Transmath	Triangle	Sésamath	Myriade	Zenius
Total	60	110	106	109	68	165	192
Preuve	5	5	7	8	8	9	6
Autres	33	50	39	88	42	83	106

Figure 4 – Les exercices de preuve dans les manuels de 4e de 2011

Un autre critère d'analyse concerne le rôle et la place de la distributivité. Cette propriété est institutionnalisée avec différentes désignations : règle, propriété, égalité vraie, identité ou juste citée et entourée par un cadre. Ainsi, l'utilisation d'ostensifs est forte : flèches, couleurs, distinction entre somme et produit. C'était également le cas dans les manuels précédents. Enfin, l'ensemble de référence des nombres sur lequel porte la propriété n'est pas toujours indiqué : par exemple « *a*, *b* et *k* représentent 3 nombres ».

Cependant, quelques points nouveaux apparaissent. Tout d'abord, une grande insistance est portée sur la forme des expressions. Ainsi, on explicite les techniques par l'idée de « transformation d'écriture » plutôt que par l'application de la propriété. Par exemple, on trouve les formulations suivantes « Pour développer une expression, on transforme un produit en une somme » ou bien « Développer une expression, c'est l'écrire comme une somme algébrique ». Celles-ci montrent ce que nous avions prévu à savoir que, même s'il y a référence à la structure des expressions, la propriété de distributivité n'est pas utilisée comme un élément technologique.

Enfin, on peut noter qu'un nombre important d'objets paramathématiques sont introduits et définis : expression littérale, égalité, équations, expressions égales, en fonction de avec des définitions qui peuvent varier d'un manuel à l'autre, voire être contradictoires. Par exemple sur « égalité » on peut trouver « une **égalité** est une affirmation où figure le signe = et qui ne peut être que **vraie** ou **fausse.** » (Transmath 5e 2006, p. 75) ou bien « une **égalité** est constituée de deux membres séparés par un signe =. Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même valeur. » (Phare 5e 2006, p. 33)

En conclusion, la propriété de distributivité n'est pas suffisamment mise en évidence comme un outil théorique permettant d'organiser les calculs, de les justifier et de les valider.

Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et utilisent des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme.

Enfin, s'il y a une plus grande variété dans les types de tâches, celles-ci sont majoritairement isolées et souvent sans finalité.

Etude de revues pour les enseignants et les formateurs

Nous faisons une revue, d'une part, des articles publiés dans les revues de type interface, *Petit x*, *Repères IREM*[6], *APMEP*[7] et, d'autre part, des publications dans les revues des IREM et de l'INRP/IFE. On peut penser que ces revues sont soit consultées par les enseignants, soit utilisées en formation et que les articles peuvent être des ressources pour les enseignants ou les formateurs. Examinons donc de plus près ce qui, dans ces textes, peut être utilisé par les enseignants, par les formateurs. En quoi ces ressources peuvent-elles outiller les enseignants dans leurs pratiques habituelles ?

Les revues Petit x et Repères IREM

Dans les revues de type interface, Petit x et Repères, nous avons recensé les articles sur l'algèbre depuis 1995 (changement de programme précédent). Un premier résultat est qu'il y a peu d'articles sur l'algèbre (certaines années aucun) comme le montre le tableau ci- dessous. En comparaison, les articles sur la géométrie sont très nombreux, parfois tout un numéro de la revue y est consacré. Notons également le faible nombre d'articles sur les TICE et l'algèbre.

Revue	Petit *x*	Repères IREM
Période	du n° 37 (janvier 1995) au n° 94 (janvier 2014)	du n° 18 (janvier 1995) au n° 95 (avril 2014)
Nombre d'articles	174 (3 numéros par an avec environ 3 articles par numéro)	468 (4 numéros par an avec environ 6 articles par numéro)
Articles sur l'algèbre	21 (12%)	28 (6%)
Articles après 2005	11	14

Figure 5 – Les articles sur l'algèbre dans les revues Petit x et Repères IREM

[6] Dans cet article, comme il n'y a pas d'ambiguïté, nous parlons de la revue Repères éditée par les IREM. Dans la suite, nous dirons Repères sans autre indication.

[7] La recherche sur le bulletin de l'APMEP montre un nombre d'articles très faible, nous n'en parlerons pas ici.

Dans un deuxième temps, nous avons classé les articles selon les thèmes abordés.

	Repères	Petit *x*
Généralités	3	1
Support algèbre[8]	0	4
Histoire	7	0
Au delà du collège	4	1
TICE	2	1
Situations de classe	8	0
Difficultés des élèves	2	7
Sémantique / syntaxique	0	4
Pratiques	2	3

Figure 6 – Classement des articles de Petit x et Repères selon les thèmes

Notre étude montre que les deux revues publient des articles dont les thèmes sont différents : des articles sur l'histoire et proposant des situations à mettre en œuvre dans les classes dans Repères et pas dans Petit *x* alors qu'il y a des articles sur les élèves ou sur les pratiques dans Petit *x* et pas dans Repères. Dans Petit *x*, on trouve aussi quatre articles sur des thèmes plus généraux dont le support est l'algèbre. Les thèmes ne sont pas les mêmes suivant les revues, ceci certainement à cause de l'origine institutionnelle des auteurs. On peut donc dire que Petit *x* propose des articles plus généraux, qui peuvent donner des connaissances sur l'enseignement/apprentissage de l'algèbre. Cependant il faut bien noter que l'intégration de ces éléments de connaissances, sans donner d'indications directes sur ce qui peut être mis en place dans les classes, reste à la charge du professeur ou du formateur (la question de la transposition ne se pose d'ailleurs pas de la même façon pour les deux).

Hormis ceux portant sur l'histoire, les articles de Repères sont davantage constitués d'outils pour la pratique plus immédiate. Analysons donc les huit articles de Repères qui proposent des activités pour la classe (voir le tableau en annexe 1). Ils visent à présenter des problèmes riches et robustes concernant les équations ou le calcul littéral.

Conformément à nos hypothèses sur la diffusion, les critères choisis pour l'analyse sont les suivants :

- indications portant sur des éléments historiques,
- indications portant sur des éléments de transposition,
- proposition de problème(s) à mettre en œuvre dans une classe de niveau donné,
- indication d'une thématique particulière (équation, calcul littéral, fonction…),
- définition des objectifs du/des problème(s),
- analyse *a priori* des problèmes notamment en termes de variables didactiques,
- indications sur un déroulement possible dans une classe soit en termes d'organisation didactique soit en termes de phases (nombre de séances, phases, consignes, organisation du travail de la classe, contenu des synthèses ou

[8] Le thème de l'article n'est pas l'algèbre, il est plus général mais les exemples étudiés sont dans le domaine algébrique.

institutionnalisations),

- indications sur une mise en œuvre effectuée (procédures d'élèves, erreurs ou difficultés),
- situation dans une progression qui correspondrait à une organisation mathématique locale.

L'analyse montre que tous ces articles décrivent et analysent un (pour 2 articles) ou des problèmes proposés en termes de choix faits par l'expérimentateur (par exemple focalisation sur une notion pour quatre), quelquefois de variables didactiques. Environ la moitié présente des éléments sur l'histoire ou sur la transposition didactique (par exemple, une analyse de l'évolution des programmes, des nouveautés), ce qui peut donner des éléments explicatifs. Si les objectifs mathématiques ou didactiques sont toujours annoncés, l'analyse a priori du/des problèmes n'est pas réalisée (dans le cas d'un grand nombre de problèmes proposés, cela se comprend car l'article serait difficilement lisible).

Trois d'entre eux donnent des éléments relevant de l'organisation didactique en décrivant une gestion de classe associée (modalités de travail, durée des phases) ainsi que quelques éléments réflexifs sur cette mise en œuvre effective. Mais seulement deux replacent ce/ces problèmes dans une progression d'enseignement qui n'est souvent qu'abordée. Si l'un de ces articles (Groupe Didactique des Mathématiques, Irem d'Aquitaine, équipe AMPERES 2008) développe un Programme d'Etude et de Recherche, les autres ne proposent que des problèmes isolés. S'ils indiquent dans quelle classe le problème peut être posé, les auteurs ne donnent que peu d'informations sur l'avant et l'après, donc sur des éléments concernant une organisation mathématique locale. On peut donc penser que pour être véritablement intégré dans la pratique quotidienne, plusieurs écueils se présentent. Si ce problème est proposé à côté ou en plus d'une organisation mathématique ou didactique, et s'il est trop éloigné des pratiques habituelles, il y a un risque de transformations importantes voire d'abandon par le professeur. Du côté des élèves, si le problème n'est pas resitué dans une progression des apprentissages, il peut ne pas avoir les effets souhaités. On retrouve donc ici encore une fois, le travail important laissé à la charge du professeur, travail qui doit être initié en formation initiale et poursuivi en formation continue.

Etude des publications des IREM

Nous étudions maintenant les usages potentiels des publications de l'IREM par les enseignants et formateurs. Nous organisons l'analyse de ces publications autour de critères généraux (nombre d'articles, acteurs du système éducatif engagés, prise en compte des différents niveaux de co-détermination, présence de compte-rendu des usages) puis sur des critères spécifiques au calcul algébrique qui recouvrent les dimensions proposées par Trgalova et al. (2012).

Le recensement des publications des IREM (cf. liste de la bibliographie) portant sur l'enseignement de « l'algèbre » au collège (calcul littéral) et au lycée (calcul algébrique) de l'enseignement secondaire français met en évidence leur faible nombre (moins de dix publiées à partir de 2005). Ce résultat accentue la tendance en cours par rapport au nombre des publications de l'IREM de 1991 à 2005 (cf. liste de la bibliographie). C'est encore une fois une marque de la péjoration de l'algèbre sur laquelle insiste Chevallard (2012).

Les brochures prennent globalement en compte les évolutions des programmes et des résultats en didactique de l'algèbre. Les collectifs d'auteurs sont constitués d'enseignants de collège, voire de lycée et d'école, auxquels sont associés des enseignants chercheurs en didactique des mathématiques (Lé Quang et Noirfalise 2009, Grugeon-Allys éd. 2006)[9] ou formateurs d'IUFM. Nous faisons l'hypothèse que la composition des équipes va induire des approches différentes tant en ce qui concerne les choix didactiques que la rédaction des brochures. La majorité des brochures mettent en évidence un travail important de transposition didactique des concepts et outils théoriques pour décrire et analyser les situations. Trois brochures (GRt – Irem de Toulouse 2011, Lé Quang et Noirfalise 2009, Grugeon-Allys éd. 2006) mobilisent davantage des concepts et outils didactiques transposés. Les auteurs essaient majoritairement de se situer par rapport aux situations et termes utilisés dans le document d'accompagnement « Du numérique à l'algébrique ».

Les publications se distinguent selon qu'elles privilégient la présentation de situations pour l'enseignement de l'algèbre (Blais et al. 2006, IREM de Bretagne Occidentale – Groupe collège 2007, Berté et al. 2007a) ou des pistes pour une stratégie d'enseignement du calcul littéral (Berté 2007b10, GRt – Irem de Strasbourg, Grugeon-Allys 2006, Lé Quang et Noirfalise 2009).

Les sommaires de deux revues (Figure 7) illustrent ces deux points de vue différents :

Introduction 1. … 2. Calcul mental et factorisation 3. A la rencontre de Fibonacci 4. 5. 6. Quizz numérique 7. 8. 9. 10. Perspectives	Introduction Quelques informations pour une lecture Une progression en algèbre pour la classe de 6e Trois situations-clés en classe de 6e Une progression en algèbre pour la classe de 5e Trois situations-clés pour la classe de 5e.

Figure 7 – Sommaires de l'IREM d'Aix-Marseille (2006) et de l'IREM de Bordeaux (2007 b)

Nous poursuivons l'étude de ces publications à partir des critères définis dans la partie précédente. Les brochures portent majoritairement sur l'introduction du calcul littéral en 5e (expressions littérales ou équations). Pour la moitié, les enjeux didactiques sont présentés mais les analyses *a priori* sont assez partielles. Les déroulements sont le plus souvent descriptifs et laissent souvent à la charge des lecteurs l'analyse du rôle de l'enseignant dans les différentes phases du déroulement. Les comptes-rendus sur la mise en œuvre réelle sont peu ou pas développés, interrogent peu des difficultés que les enseignants ont pu rencontrer lors du déroulement de la séance et ne proposent pas d'alternatives envisageables. Les brochures de l'IREM de Paris 7, de l'IREM de Clermont, de l'IREM d'Aquitaine (Grugeon-Allys éd. 2006, Lé Quang et Noirfalise 2009, Berté et al. 2007), proposent des analyses *a priori* qui permettent davantage d'aborder les questions posées par la diffusion. D'ailleurs dans la préface des brochures, certains auteurs mettent en garde les enseignants sur des interprétations inappropriées en ce qui concerne la reproduction des situations (Artigue 1986) et leur indiquent des difficultés possibles dans l'exploitation et la mise en œuvre de ces ressources. En voici, un exemple à partir de la préface de Matheron de la brochure de l'IREM d'Aquitaine (Berté et al. 2007) :

---

[9] Les auteurs travaillent au sein de l'IREM d'Amiens, même si la brochure a été éditée par l'IREM de Paris 7.

10 Dans une autre version de la brochure, l'entrée par les situations est privilégiée (Berté et al. 2007).

> La première mise en garde relève de contraintes temporelles. […].
> La deuxième mise en garde porte sur l'attitude qui consisterait à vouloir modifier, pour y apporter sa touche personnelle, les activités proposées sans réfléchir attentivement aux conséquences de ces changements. […].

Un bilan portant sur les situations

Certaines publications proposent une reprise de situations à fort potentiel adidactique travaillées dans des recherches de l'INRP (Combier et al. 1996), en particulier « Les carreaux bordés » qui visent à introduire les expressions algébriques. D'autres proposent de nouvelles situations telles que « Les poignées de main » (Berté et al. 2007), « A la rencontre de Fibonacci » (Blais et al. 2006).

La situation « A la rencontre de Fibonacci » vise à initier aux écritures littérales. La motivation de ces écritures repose sur « leur efficacité pour raccourcir les calculs et prédire des résultats » (Blais et al. 2006, p.15). Cette activité s'appuie sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Cette situation, comme d'autres, est présentée de façon isolée et n'est pas inscrite dans une progression, en lien avec l'évolution des enjeux de l'enseignement de l'algèbre, ce qui donne peu d'indications pour les resituer dans une organisation mathématique (locale ou régionale) voire dans une organisation didactique. Elles ne sont pas non plus situées par rapport à des progressions habituelles de manuels pour mettre en évidence les apports de choix didactiques. Les présentations insistent davantage sur « une activité (…) pour expérimenter, poser une conjecture, tester sa validité sur des exemples et la démontrer (ici grâce au calcul littéral) » (Blais et al. 2006, p.15), sur l'importance donnée à la place de la résolution de problèmes et non à des fausses activités. Ces choix peuvent provoquer un déséquilibre dans l'organisation des moments de l'étude, entre les moments de première rencontre et les moments de travail de la technique (Artigue et Houdement 2007). Il y a en effet peu de tâches pour le travail de la technique favorisant un calcul intelligent et contrôlé dans des situations d'entrainement ou de réinvestissement et la convocation de propriétés sur des expressions (ou équations) pour justifier les transformations.

Les publications présentent les énoncés des problèmes suivis d'un dossier pour le professeur. Ce dossier peut proposer des éléments du programme, les intentions des auteurs, un déroulement possible, un compte-rendu d'observation en classe, un bilan, une discussion de certaines modalités, des alternatives et prolongements, des parties étant absentes dans certaines revues.

Des choix variés en ce qui concernent les stratégies d'enseignement

Les potentialités des situations sont spécifiées en lien avec les enjeux didactiques et les emplois de l'algèbre. Lé Quang et Noirfalise (2009) analysent avec soin la situation « Les carreaux bordés » comme Berté et al. (2007) (qui analysent aussi la situation « Des poignées de main ») et ces auteurs concluent des choix différents. Lé Quang et al. indiquent « qu'il ne faut pas se tromper d'enjeu » : celui de la situation des « carreaux bordés » est de comparer plusieurs programmes de calcul pour étudier s'ils donnent toujours le même résultat et aborder ainsi la question de l'équivalence de deux expressions littérales en utilisant la distributivité et pas seulement celle de la traduction des programmes de calcul. Ils indiquent aussi des difficultés à surmonter à savoir, l'introduction des lettres, l'usage de calculs en ligne pour exprimer les résultats des programmes de calcul, la validation de l'égalité des résultats des programmes de calcul en référence à l'équivalence des expressions littérales et non en référence à la situation. « Il importe de faire comprendre que ce sont les programmes de calcul qui sont l'objet d'étude et non ce qu'ils représentent » (*Ibid.*, p.16). Pour conclure, ces auteurs indiquent les raisons d'être de l'algèbre.

> Une première raison d'être de l'algèbre élémentaire est de se donner un moyen de représenter de façon concise et non ambiguë des programmes de calcul. […]
> Une deuxième raison d'être de l'algèbre est de fournir un outil de calcul pour comparer des programmes de calcul. […]
> Une troisième raison d'être de l'algèbre est évidemment sa contribution à la résolution de problèmes par leur mise en équation et la résolution des équations ainsi obtenues.
> […] Ce sont surtout les raisons d'être de l'Algèbre qui nous ont guidées : l'enjeu est de faire comprendre aux élèves les raisons pour lesquelles on s'intéresse aux transformations d'écritures algébriques comme, par exemple, l'usage de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. On peut dire que c'est une AER qui ouvre sur un PER[11], celui de la science des programmes de calcul. […] Le choix de la classe est la classe de cinquième […]. (p.17)

Les situations proposées par Berté et al. (2007) privilégient la production d'expressions littérales en « trouvant l'écriture d'un programme de calcul ».

> Les deux situations, aussi bien celle des « poignées de main » que celles des « carrés bordés » ne montrent pas vraiment aux élèves l'utilité des lettres pour écrire un programme de calcul puisqu'une phrase suffit. […]. Il paraît donc normal qu'en début de sixième, les élèves ne puissent imaginer seuls le langage algébrique comme réponse à un problème. Nous avons donc décidé de ne pas commencer l'enseignement de l'algèbre avec ce type de situations (poignées de main ou carrés bordés), mais de proposer aux élèves dès le début de la sixième, des exercices où ils vont rencontrer des lettres qui auront été introduites par le professeur. Mais dans toutes nos situations il ne s'agira pas d'appliquer une formule mais de trouver l'écriture d'un programme de calcul […]. (p. 12).

Cette réflexion mène les auteurs à privilégier la dimension *objet* de l'algèbre et à proposer des tâches dès la sixième pour produire des expressions littérales dans des tâches de traduction, dans des contextes divers. Ils donnent aussi à voir le contenu de formations continues organisées à l'IREM. Les situations proposées en début de 5^{e} ne motivent pas les raisons d'être des expressions algébriques (échange d'un message traduisant un programme de calcul ou écriture du message le plus court possible). La question épistémologique de la justification de l'équivalence des programmes et de l'usage de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (Ruiz-Munzón et al. 2010, 2012) est convoquée pour motiver les règles d'écritures des expressions algébriques, en fin de séquence en 5^{e}, avec la situation « Programmes de construction conduisant à une égalité vraie pour tout nombre ». Mais la propriété de distributivité n'est pas mobilisée dans la résolution d'exercices de développement par la suite. La faible articulation *outil / objet* privilégie des exercices non finalisés et isolés.

Les auteurs de la publication de l'IREM de Strasbourg optent pour la même stratégie que ceux de l'IREM de Bordeaux : proposition de tâches privilégiant la dimension *objet* dès la sixième, sans finalités et assez isolées. Les activités « Des lettres pour démontrer », « Comparaison d'expressions », « Des programmes de calcul » puis « Tester une égalité » permettent de motiver en classe de 5^{e} la nécessité d'introduire des lettres « pour toutes les valeurs possibles », de justifier qu'une égalité est vraie pour toute valeur de la lettre en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, de justifier qu'une égalité est fausse à l'aide d'un contre-exemple (dialectique algébrique numérique), d'introduire la notion d'équation. La synthèse de cours, en particulier celle portant sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction, est décontextualisée par rapport aux situations proposées. La réduction des expressions ne fait aucunement référence à l'usage de la propriété de la multiplication par rapport à l'addition. Ces situations sont suivies par des exercices de comparaison d'expressions (V/F) puis des

[11] AER : Activité d'Etude et de Recherche ; PER : Parcours d'Etude et de Recherche (Chevallard 2002a, 2002b).

exercices techniques de développement, de réduction, de factorisation illustrant le niveau technologique à mettre en œuvre : propriété de la distributivité présentée dans un point méthode et la dialectique algébrique numérique. Les auteurs insistent :

> Les exercices 45 à 48 sont des exercices techniques qui viennent après un travail sur le sens de la distributivité et sur le sens de l'égalité. Les résultats peuvent être vérifiés en testant par une valeur numérique (Groupe de ressources IREM de Strasbourg, p. 38)

En revanche, les auteurs ne proposent pas de problèmes plus complexes nécessitant de convoquer l'outil algébrique pour leur résolution. La faible articulation *outil* / *objet* conduit à privilégier ainsi des exercices non finalisés et isolés.

Comme nous l'avons évoqué plus haut, la brochure de l'IREM de Clermont-Ferrand (Lé Quang et al. 2007) propose en 5^{e} une AER pour introduire les expressions algébriques (adaptée des carreaux bordés (Combier et al. 1996)). Autant les auteurs décrivent avec soin les variables didactiques attachées aux situations pour faire évoluer les techniques et donner des conditions favorables à l'entrée dans l'algèbre, autant cet aspect reste peu développé dans d'autres brochures. Les auteurs mettent en évidence une volonté d'inscrire les propositions dans une progression (à la fois en termes d'organisation praxéologique et didactique). Ils développent la présentation des différents moments de l'étude et des conditions à mettre en place pour introduire différentes expressions d'un programme de calcul, pour conjecturer que deux programmes de calcul retournent le même résultat (à l'aide d'un tableur) puis, pour justifier leur égalité à partir de l'équivalence des expressions et de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction. Après l'institutionnalisation de la propriété de distributivité, le moment du travail de la technique renvoie à la réalisation d'exercices de développement et de factorisation dans le manuel utilisé par la classe pour convoquer la propriété de distributivité par rapport à l'addition. Mais aucune indication n'est formulée sur la mobilisation de la propriété pour permettre un calcul contrôlé. Il n'y a pas non plus de retour sur des difficultés rencontrées par les enseignants pour gérer les médiations en classe. Cet aspect est davantage développé dans les comptes-rendus des situations présentées dans la brochure de l'IREM de Paris 7 (Grugeon-Allys éd., 2006). Ces comptes-rendus sont descriptifs, ils proposent peu d'analyse didactique des difficultés envisageables au regard de la gestion didactique des situations ou du rôle du professeur en ce qui concerne le processus de dévolution, la hiérarchisation des techniques présentées, la validation des techniques *via* l'usage d'ostensifs ou de propriétés algébriques, l'institutionnalisation et des alternatives possibles.

En conclusion et en perspective des hypothèses sur la diffusion des pratiques, les situations d'introduction des objets et propriétés algébriques ne sont pas toutes inscrites dans des progressions et sont pour certaines introduites de façon isolée. On peut penser que les enseignants éprouveront des difficultés pour les resituer dans une organisation mathématique locale ou régionale. Certains auteurs privilégient la dimension *objet* de l'algèbre dans des tâches en sixième et en cinquième préalablement à l'introduction des objets de l'algèbre à partir de situations développant leur raison d'être. De plus, l'articulation des dimensions *outil-objet* reste faible. On peut se demander si ces choix ne risquent pas d'interroger les enseignants et de laisser planer une tension entre rapport formel à l'algèbre et rapport fonctionnel à l'algèbre visé dans les programmes. Les moments de première rencontre sont davantage présents que les moments de travail de la technique. De plus, les techniques ne sont pas toujours spécifiées en lien avec le niveau technologique visé : les aspects sémantique, syntaxique, sémiotique, du travail algébrique restent souvent implicites (dialectique procédural-structural pour déterminer une stratégie de calcul, dialectique algébrique-numérique pour contrôler, utilisation de la propriété de distributivité dans le calcul algébrique pour prouver). On peut se demander si ce manque d'analyse sur le travail technique ne risque pas de laisser vivre des pratiques de calcul qui privilégient l'aspect syntaxique par rapport au sémantique et ne favorisent pas un calcul intelligent et contrôlé.

Globalement, le rôle du professeur est peu explicite tant dans les phases de recherche, de mise en commun (validation et hiérarchisation des techniques en lien avec le niveau technologique attendu) que d'institutionnalisation. On peut se demander comment les enseignants peuvent être outillés pour faire vivre ces situations, le travail de transposition restant beaucoup à leur charge, à la fois en ce qui concerne l'intégration des situations et tâches diffusées dans une séquence que la gestion didactique en classe.

Conclusion

A travers les différents axes étudiés et les différents documents, nous avons tenté de montrer que la diffusion de résultats de recherche en didactique des mathématiques (ce problème de diffusion n'étant pas spécifique de ce champ, bien sûr) nécessitait des conditions qui semblent peu réalisées actuellement. Nous avons particulièrement analysé les documents institutionnels, puis les manuels dont on pourrait penser qu'ils constituent la première source de documentation des enseignants. Il est intéressant de noter que même ceux-ci ne donnent pas suffisamment d'outils aux enseignants, et ceci pour plusieurs raisons : un défaut de précision sur les raisons d'être des savoirs à enseigner, une atomisation de certaines notions comme l'algèbre et des organisations mathématiques peu explicites. Les manuels ont une structure relativement semblable par un découpage en chapitres très liés au programme (donc pouvant renforcer l'atomisation des savoirs) et par des problèmes (quand il y en a) isolés qui ne permettent pas de faire évoluer les organisations didactiques. Ainsi, une grande partie du travail d'organisation à la fois mathématique et didactique est laissée à la charge des enseignants.

L'analyse des publications amène à un bilan proche de celui réalisé sur les documents institutionnels et les manuels, même si une évolution très récente se dessine : les situations proposées, même si elles sont robustes, sont le plus souvent isolées et peu inscrites dans une organisation mathématique et didactique ou bien celle-ci n'est pas explicite. Au-delà des contenus proposés, les comptes-rendus donnent peu d'indications sur le rôle de l'enseignant qui reste le plus souvent implicite tant en ce qui concerne la gestion du temps que celle des processus de dévolution, de validation et d'institutionnalisation. Nous constatons encore que les publications étudiées n'outillent pas vraiment les enseignants et que pour faire évoluer leur rapport à l'algèbre et à son enseignement, leurs pratiques relatives à l'algèbre, ceux-ci doivent prendre à leur charge le travail d'organisation praxéologique mathématique et didactique.

Les conclusions des différentes parties nous amènent à de nouvelles questions. Ainsi, à partir des ressources finalement assez nombreuses, proposées pour aider les professeurs à s'approprier les changements nécessaires et institutionnellement demandés, faut-il changer les conditions de conception de ces ressources, la forme et le contenu des ressources et/ou faut-il développer la formation à l'utilisation de ces ressources ? Bien sûr, selon nous, ces différentes pistes doivent être étudiées conjointement. Sur le contenu des ressources, il nous semble préférable de proposer des séquences avec des scénarios de classes comprenant des organisations mathématiques au moins locales, explicites et complètes et des organisations didactiques associées plutôt que des situations isolées. Mais nous connaissons bien la difficulté de la rédaction de tels documents puisque cela suppose des textes longs qui risquent de ne pas être lus. Une question de recherche pourrait alors viser l'élaboration de critères pour favoriser l'opérationnalité des ressources à partir de pratiques réelles.

Une autre piste est le développement de travail collaboratif pour l'élaboration des ressources avec une variété du statut des membres des équipes de concepteurs et un vrai travail associant des chercheurs et des professeurs. On pourrait imaginer des dispositifs de formation continuée fondés sur la construction collaborative de ressources pour les enseignants et les formateurs (Georget 2009, Coppé 2013, Grugeon-Allys et al. 2012, Pilet 2012) associant des chercheurs, des professeurs et des acteurs du système avec des apports d'expertise dans des domaines différents et complémentaires. Or d'après Rogalski (2005), les effets d'un travail collaboratif portent à la fois sur les pratiques (par la conception de séquences, par la gestion didactique, par l'analyse des déroulements réels pour la régulation) et sur les conceptualisations (sur les connaissances portant sur les praxéologies, leur épistémologie, sur les apprentissages des élèves).

> Les recherches sur le développement professionnel montrent plutôt que celui-ci consiste en des réorganisations successives des conceptualisations, des manières de penser sa propre activité en rapport avec la situation dans laquelle il est inséré. (Rogalski 2005)

Donc, si l'on suit cette auteure, ce travail de conception devrait permettre de faire évoluer les pratiques mais nous sommes bien conscientes des difficultés de ce travail. Tout d'abord ce type de collaboration n'est pas facile à mettre en place dans les structures de travail actuelles des enseignants (peu de dispositifs favorisent le travail commun). De plus, le nombre de professeurs concernés ne peut être très important. Enfin c'est un travail sur le long terme et il n'est pas sûr que l'institution soit prête à l'organiser. Ces difficultés ont également été pointées par Mangiante Orsala (2014) au sujet d'un groupe de conception et d'utilisation de ressources pour la géométrie à l'école primaire.

Nous savons que la formation initiale en France est encore en construction. Ainsi, nous proposons d'une part d'utiliser les concepts et méthodes utilisés en didactique des mathématiques comme des outils qui pourront être mobilisés par la suite, et non comme des objets, d'autre part d'utiliser des dispositifs articulant différents types de situation de formation. Enfin la recherche doit se développer sur l'analyse des situations de classes ordinaires (Butlen, Pézard, Masselot, 2012, Grugeon-Allys 2008).

Enfin on peut envisager une transposition dans le contexte institutionnel de la France de dispositifs comme les *lessons studies* (Miyakawa et Winslow 2009, Elipane 2012).

Bibliographie

Artigue, M. (1986). Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherche en didactique des mathématiques.* 7, 1**,** 5-62.

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In *Recherche en didactique des mathématiques*. *Hors série. Enseignement de l'algèbre, élémentaire Bilan et perspectives.* Coordonné par Coulange, Drouhard, Dorier & Robert. 41-62. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artigue, M., Houdement, C. (2007). Problem Solving in France: Research and Curricular Perspectives. Zentral Blatt für Didaktik der Mathematik. 39, 5-6, 365-382.

Barallobres G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherche en didactique des mathématiques.* 24, 2-3, 285-328.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). Introduction Approaches to algebra. In : Bednarz et al. (eds). *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dotdrecht : Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, 21, 47-68.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Butlen, D., Pézard, M. & Masselot, P. (2012). Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ? Grenoble : la Pensée sauvage. 277 p.

Chaachoua, H. (2015). Etude comparative des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire : rapports croisés, bilan et perspectives. In D. Butlen et al. (éds) *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chesné, J.F., Pariès, M. Robert, A. (2009). « Partir des pratiques » en formation professionnelle des enseignants de mathématiques des lycées et collèges. *Petit x*, 80, 25-46.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. 119-140. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en didactique des mathématiques.* 19, 2, 221-266.

Chevallard, Y. (2002a), « Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions », *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)*, Grenoble : La Pensée Sauvage. pp. 3-32.

Chevallard, Y. (2002b), « Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation », *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)*, Grenoble : La Pensée Sauvage. pp. 41-56.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éds.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén*, 2007, pp. 705-746.

Chevallard, Y., Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherches en didactique des mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, Hors série*, 19-39.

Combier, G., Guillaume, J.C., Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège*. Paris : INRP.

Coppé, S. (2013). Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : une étude de cas d'une enseignante de mathématiques en collège. In Grangeat. M. (Ed), *Le travail collectif dans les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : formations, pratiques, effets*. Presses universitaires de Grenoble, 115-125.

Coppé, S., Dorier, J. L. (2009). Eléments d'analyse sur la réception par les enseignants du programme de 2000 sur les fonctions en mathématiques en seconde. *Revue Spirale.* 43, 149-169.

Coulange, L., Grugeon-Allys, B. (2008). A l'occasion d'un enseignement de l'algèbre destiné à des élèves en difficulté : à propos des pratiques enseignantes et de la diffusion de situations d'enseignement. *Petit x.* 78, 5-23.

Coulange, L., Drouhard, J.P. (eds.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques. Hors série.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 5-32.

Drouhard, J. P. (1992). Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire. Thèse de l'Université de Paris 7.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 16, 3, 349-382.

Elipane, L. E. (2012). Integrating the essential elements of lesson study in pre-service mathématics teacher education. Thèse de l'Université de Copenhague.

Gascon, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternance à «l'arithmétique généralisée ». *Petit x* 37**,** 43-63.

Georget, J. P. (2009). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. Thèse de l'Université de Paris Diderot.

Grugeon-Allys, B. (2008). Quelques apports de l'analyse multidimensionnelle : activités des élèves et pratiques des professeurs de mathématiques ; Vers une modélisation, Habilitation à diriger des recherches, 4 décembre 2008, Université Paris Denis Diderot – Paris 7

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherches en didactique des mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, Hors série*, 137-162.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education.* P. Nesher et J. Kilpatrick Edits. Cambridge University Press.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulations. In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 707-762. NCTM. Information Age Publishing

Mangiante Orsala, C. (2014). Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie. In S. Coppe et M. Haspekian (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de 2013*. IREM de Paris 7.

Miyakawa, T & Winslow, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Education et didactique*, Presses Universitaires de Rennes 77-90.

Pilet J. (2012). Analyse des expérimentations (chapitre 5). *Parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students` emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, Educational Studies in Mathematics, 42, 3, 237-268.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*. 21, 1-2, 57-80.

Robert, A. (2004). Que cherchons- nous à comprendre des pratiques des enseignants ? Quelles recherches menons-nous ? In M.L Peltier (Ed.) *Dur d'enseigner en ZEP*, Chap 1. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Robert, A. (2008). Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques, in F. Vandebrouck (2008).

La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques des enseignants, Partie 1, 31-59. Toulouse : Octarès

Roditi, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques, activités des élèves et pratiques des enseignants.* pp. 73-94. Toulouse : OCTARES.

Rogalski, J. (2005). Le travail collaboratif dans la réalisation des tâches collectives. In J. Lautrey & J. F. Richard (Éds), L'intelligence. Paris: Hermès 147-159

Ruiz-Munzon, N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarollo hacia la modelización funcional. Thèse de doctorat, Université Autonome de Barcelone.

Ruiz-Munzon N., Matheron Y., Bosch M., Gascon J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, hors série*, 87-106.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36

Sfard, A.& Linchevski, (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 26, 191-228..

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Textes réunis par C. Laborde. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In N. Bednarz et C. Garnier (Eds) *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 33-44). Ottawa : Cirade.

Publications IREM à partir de 2006

BLAIS, C., BOSCHETTI, C., CRUMIERE, A., FLEURY, M.R., MAZUYER, C., RUSSAC, A.M., TANNER, M. (2006). *Des activités pour la classe de 5^e^*. IREM d'Aix-Marseille.

Groupe Math au collège de Quimper (2007). *Fiches du professeur - 4ème*. Publications de l'IREM de Bretagne Occidentale

Groupe recherche premier cycle (2011). *Eléments 1*. Publications de l'IREM de Toulouse.

LE QUANG, G. ET NOIRFALISE, R. (2009). Les débuts de l'algèbre au collège ou introduction au calcul littéral in IREM de Clermont-Ferrand Groupe d'étude situation-problèmes, eds. *Quelques activités qui peuvent donner du sens à notre enseignement. De la sixième à la terminale S.* IREM de Clermont Ferrand.

Groupe Ressources (2007). *Ressources pour la classe de 5^e^*. IREM de Strasbourg.

BERTE, A., CHAGNEAU, J., DESNAVRES, C., LAFOURCADE, J., MAURATILLE, M.C., SAGEAUX, C. (2007). "Des situations pour introduire le calcul littéral en 6^e^ et 5^e^ ». Groupe didactique des mathématiques au collège.

BERTE, A., CHAGNEAU, J., DESNAVRES, C., LAFOURCADE, J., MAURATILLE, M.C., SAGEAUX, C. (2007). *Entrées dans l'algèbre en 6^e^ et 5^e^* . Groupe didactique des mathématiques au collège. Publication IREM de Bordeaux 2007.

GRUGEON-ALLYS, B. Ed. (2006). Le calcul algébrique : des pistes pour une progressivité des apprentissages de l'école au lycée, Editeur IREM Paris 7 (56 p).

Publications IREM de 1991 à 2005

Commission Inter-IREM Premier cycle (1991). *Des chiffres et des lettres au collège*. IREM de Paris Sud.

Commission Inter-IREM Collège (1998). *Des mathématiques au collège. Des mathématiques au Cycle Central. T. 1. Programme du Cycle central – 1997.* IREM des pays de la Loire.

Chauprade C., Coudert A., Millet J.-L., Patureau G. (1999). *Calcul algébrique en seconde : des activités pour la classe*. IREM de Limoges.

IREM de Montpellier Groupe Collège. Grt. (1999) *Activités pour le cycle central : Des nombres et des lettres - De l'observation au raisonne*ment. IREM de Montpellier.

IREM de Poitiers Groupe du premier cycle (1999). *Le calcul littéral au collège*. IREM de Poitiers.

Programmes- Documents ressources

Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège (2008). Du numérique au littéral au collège. (MEN) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège (2009). Raisonnement et démonstration. (MEN).

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf

Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège (2013). Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée. (MEN).

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/17/8/Le_calcul_au_college_et_au_lycee_242178.pdf

Manuels

Audren, H., Cecconi, S., Di Scala, P., Le Goff, E., Lefèvre, M., Letessier, A. G., Riou, E. (2006). Maths 5e ; Editions Bréal.

Boclé, C., Jacob, N., Sitbon, J., Xoual, I. (2006). Math 5 Collection PRISME, Editions Belin.

Boullis, M., Dupé, C., Girmens, Y., Pellequer, S. (2006). Maths 5 Collection BABYLONE, Editions Bordas.

Boullis, M., Meyer, I., Monka, Y., Percot, S., Roy, D. (2010). Mathématiques 5e, collection Myriade, Editions Bordas.

Brault, R., Daro, I., Ferrero, C., Perbos-Raimbourg, C., Telmon, C. (2006). Mathématiques 5e, collection PHARE, Editions Hachette.

Brault, R., Daro, I., Ferrero, C., Perbos-Raimbourg, C., Telmon, C. (2010). Mathématiques 5e, collection PHARE, Editions Hachette.

Brotreaud, L., Fort, M., Fourton, J.-L., Perrinaud, J.- C. (2010). Mathématiques 5e, collection ZENIUS, Editions Magnard.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., Perotin, C. (1997). Mathématiques 5e, collection TRIANGLE, Editions Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., Perotin, C. (2006). Mathématiques 5e, collection TRIANGLE, Editions Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R., Perotin, C. (2010). Mathématiques 5e, collection TRIANGLE, Editions Hatier.

Corrieu, L., Batier, C., Labrousse, M., Lebraud, J. (1997). Mathématiques 5e, Editions Delagrave.

Escalier, E., Filliot, B., Germoni, M., Heller, M.-C., Pupin-Wirth, C., Verrier, C. (1997). Math 5e, Editions Bordas.

Hache, C., Donat, V., Gosset, H., Horoks, J., Rambaud, N. (2006). Math 5e, collection DOMINO, Editions Nathan.

Jacob, N., Sitbon, J., Vissio, J. & Xoual, I. (2010). Math 5e, Collection NOUVEAU PRISME, Editions Belin.

Lanata, F., Le Hir-Jomier, G., Lemetais, B., Vincent, D., Benhedane, H. (2006). Maths 5e, Editions Magnard.

Malaval, J., Jardonnet, M., Moreau, R. (1997). Maths 5e, Collection TRANSMATH, Editions Nathan.

Malaval, J., Courbon, D., Maze, M., Planchat, C., Puigredo, F., Seres, P. (2006). 5e, Collection TRANSMATH, Editions Nathan.

Malaval, J., Courbon, D., Maze, M., Planchat, C., Puigredo, F., Seres, P. (2010). 5e, Collection TRANSMATH, Editions Nathan.

Swiderek, M., Alexander, M., Bonnefille, E., Charmarty, O., Freycenet, P., Rousseau, P. (2006). Maths 5e, Collection DIABOLO, Editions Hachette.

Sesamath (en ligne) (2006 et 2010). http://manuel.sesamath.net/

Annexe 1

Les articles dans la revue REPERES IREM

	19 Les droites d'équation y = ax Muniglia	34 L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège Duperret , Fenice	42 Quelques problèmes pour donner du sens à des règles du calcul littéral Rouger-Moinier	46 Équations et calcul littéral au collège Guichard	54 n, c'est un nombre ou c'est des nombres ? ou Algèbre Modélisation Formalisation Faes, Staïner,	57 Le problème des cinq carrés ou Comment montrer l'intérêt des identités remarquables! Mercier	73 Enseigner les nombres relatifs en cinquième Groupe Didactique des maths, Irem d'Aquitaine	92 Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre en collège Groupe SESAMES
Eléments historiques	Non	Oui	Non	Non	Non	Oui	Oui	Non
Eléments de transposition	Non	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non	Oui
Proposition de problème(s)	Plusieurs	Plusieurs	Plusieurs	Plusieurs	Un seul	Un seul	Plusieurs	Plusieurs
Thème particulier	Equation de droites	Plusieurs	Preuve en algèbre	Equation Calcul littéral	Plusieurs	IR	Relatifs	Programmes de calcul
Objectifs maths ou didactiques	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Analyse a priori	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Oui
Déroulement possible	Non	Non	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Oui
Mise en œuvre effectuée	Non	Non	Non	Non	Peu	Peu	Oui	Oui
Progression	Oui	Non	Non	Peu	Non	Peu	Oui	Oui

Annexe 2

	Des activités pour la classe de 5^e IREM Aix-Mar 2006	*Entrées dans l'algèbre en 6^e et 5^e* IREM Bordeaux2007	*Algèbre 4e : un enchaine-ment* IREM Bordeaux 2009	*Fiches du professeur - 4ème.* IREM Bretagne 2007	Les débuts de l'algèbre au collège IREM Cler-mont 2009	*Ressources pour la classe de 5^e* IREM Strasb. 2007	Eléments 1 IREM Toulouse 2011	Pistes pour une progressivité des… IREP Paris 7 2006
Auteurs	2 univ, 5 ens. Clg	Ens Clg, IUFM, Prép CAPES	Ens Clg, IUFM, Prép CAPES	Ens Clg	1 Did 1 ens Clg	Ens CLG.	Groupe recherche 1^{er} cycle	1 did, Ens école, Clg, Lyc, 2 IPR, IUFM
Situations	Cinq (alg)	Plusieurs	Plusieurs	Plusieurs	Une	Plusieurs	Cinq	Plusieurs
Analyse a priori	Partielle	Partielle	Partielle	Non	Oui	Partielle	Partielle	Partielle
Déroulement possible	Partiel	Partiel - Descriptif	Partiel - Descriptif	Partiel - Descriptif	Oui	Partiel	Partiel	Oui - Descriptif
Retour sur la mise en œuvre réelle	Partiel	Partiel	Partiel	Non	Partiel	Non	Non	Oui
Enjeux didactiques	Oui - Variable	Oui	Oui	Non	Oui	Oui	Oui	Oui
Raisons d'être des objets	Non	Faible	Non	Non	Oui	Non	Partiel	Oui
Progression et inscription des situations	Partielle dans un moment	Oui	Oui	Non	Oui	Non	Oui, moment intro	Partielle

Annexe 3

Progression en classe de 5e : IREM de Bordeaux

Thème 1 – *Organiser les calculs*.

La situation 1 « le 4 x 4 » proposée dans ce thème a pour objectif d'amener « les élèves à distinguer les expressions développées (somme) et factorisées (produit) ». La situation 3 « une seule expression algébrique » vise à amener les élèves « à utiliser une seule expression numérique » écrite en ligne.

Thème 2 – La distributivité sur des exemples numériques

A partir de la résolution de deux problèmes numériques, les auteurs institutionnalisent la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, puis proposent des exercices de calcul dans les cadres numérique et algébrique pour amener les élèves à convoquer la propriété de la distributivité pour comparer des périmètres et des aires (expressions avec lettres). Les raisons d'être de cette propriété ne sont pas introduites à travers la résolution de problèmes de généralisation qui interrogeraient la nécessité d'introduire des lettres et la définition des règles d'écriture et de transformation dans le cadre algébrique. En revanche, les auteurs travaillent la vérité de l'assertion

« Pour tous nombres a, b, k positifs, $k \times (a \times b) = k \times a \times k \times b$ » à partir de raisonnement mobilisant un contre-exemple numérique. Des exercices d'entrainement et de réinvestissement dans le cadre algébrique sont proposés.

Thème 3 – Introduction des lettres

Les auteurs introduisent les lettres à partir d'une situation « échanger des programmes de calcul » qui ne motive pas les raisons d'être de l'écriture d'expressions algébriques : il s'agit d'échanger un message traduisant un programme de calcul ou d'écrire le message le plus court possible, pour introduire des expressions algébriques. La question épistémologique de la justification de l'équivalence des programmes (Munzon et Bosch 2010, 2012) n'est pas convoquée pour motiver les règles d'écritures des expressions algébriques en lien avec leur équivalence et la propriété de la distributivité. Seule la question de l'écriture du signe × est abordée. Les auteurs institutionnalisent que « les lettres permettent d'écrire un programme de calcul. » Le concept de lettre « variable » n'est pas lié au nombre généralisé en lien avec une situation de généralisation.

Thème 6 – Travail sur les égalités

Cette question est abordée dans le thème 6.

Etape 1 : ce thème aborde d'abord la question de la pluralité des écritures d'un même nombre. La situation 2 « Programmes de construction conduisant à une égalité vraie pour tout nombre » permet de convoquer l'équivalence de deux expressions algébriques et la propriété de distributivité. Mais cette propriété reste implicite et n'est pas mobilisée, même si elle est institutionnalisée :

« Une égalité contenant des lettres peut être vraie pour toutes les valeurs données aux lettres : on l'appelle identité $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$ ». Il l'illustre à partir de l'identité.