LA QUANTIFICATION AU CŒUR DES RELATIONS ENTRE LANGAGE, RAISONNEMENT ET APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES

Thomas Barrier, Viviane Durand-Guerrier

Résumé. Dans cet article, nous montrons comment une prise en charge explicite des questions de logique, et en particulier de quantification, est susceptible de contribuer aux analyses didactiques. Nous nous intéressons d'abord aux processus de conceptualisation au sens de Vergnaud, avant de nous focaliser plus spécifiquement sur les énoncés et leur signification, et sur les situations de validation. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur divers travaux francophones, dont les nôtres. Nous avons cherché à les mettre en perspective les uns par rapport à autres de manière à mieux en saisir la cohérence d'ensemble. Les analyses sont illustrées dans le contexte de l'enseignement secondaire, incluant les transitions école-collège et lycée-université.

La réapparition de contenus de logique dans les derniers programmes de mathématiques du lycée français a contribué à redonner de la vigueur à la question des relations entre le développement des compétences logiques des élèves, leurs pratiques langagières, le raisonnement et les apprentissages mathématiques. Cette question est d'autant plus vive du point de vue professionnel que les professeurs de mathématiques ne disposent généralement que de peu de connaissances théoriques dans le domaine, la logique étant souvent absente des cursus conduisant au métier de professeur de mathématiques. Pour autant, la logique est bien présente dans l'activité mathématique, tant dans les contextes scolaires que dans la pratique experte que ce soit au niveau de l'action et de la conceptualisation, au niveau de la verbalisation et plus généralement au niveau du raisonnement mathématique, notamment déductif. Nous chercherons dans ce texte à identifier le rôle des compétences logiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en nous appuyant sur des illustrations relevant de l'enseignement secondaire, incluant les transitions école/collège et lycée/université. Plus précisément, notre objectif sera de mettre en évidence la manière dont les analyses logiques peuvent contribuer aux analyses didactiques. Du point de vue de la méthode, nous nous appuyons sur nos propres travaux et sur d’autres travaux francophones de didactique des mathématiques se préoccupant de questions de logique, notamment ceux d'Aurélie Chesnais, Christophe Hache et Zoé Mesnil. Nous ne proposons pas d'éléments empiriques originaux, l'apport de ce texte consiste plutôt en une mise en perspective de ces différents travaux, en la construction d'une cohérence. Ce texte est organisé en trois parties, chacune d'entre elle correspondant à une des trois catégories de travaux de recherche que nous avons dégagées.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la dimension logique de la conceptualisation. *L'analyse logique des concepts* mathématiques pose la question du nombre et de la nature des objets mathématiques qui sont mis en jeu en situation, aussi bien sur le plan matériel que verbal, et des éventuelles variations et ruptures associées qui peuvent apparaître au cours des apprentissages. Par ailleurs, la communauté des mathématicien-ne-s a développé des pratiques discursives qui lui sont propres et qui s'écartent parfois des pratiques langagières non mathématiques. Ces pratiques reposent sur de nombreux implicites qui sont parfois naturalisés au point d'être difficilement identifiables par les locuteurs/trices, y compris (ou en particulier) par les « locuteurs/trices compétent-e-s ». Il s'agit pourtant d'enjeux d'apprentissage, la transparence en classe ne garantissant d'aucune manière l'absence de difficultés ou d'obstacles dans le processus d'acculturation. En prenant appui sur un registre formel et/ou symbolique au sein duquel les énoncés mathématiques sont susceptibles d'être reformulés, *l'analyse logique des énoncés* permet de contribuer à l'étude des spécificités de ces pratiques, à l'identification de leur complexité. Enfin, la dimension logique et langagière de l'activité mathématique ne se réduit pas à la description des relations entre objets, à la représentation verbale d'un état de choses mathématiques. Le discours mathématiques relève aussi du raisonnement, notamment du raisonnement déductif. L'analyse des pratiques langagières ne peut se faire indépendamment d'une prise en charge de l'intention stratégique de l'énonciateur et de la structure des jeux de langage dans lesquels elles se situent. *L'analyse logique de la validation* permet là aussi une prise de distance par rapport aux usages. A l'image de ce qu'il se passe concernant la dimension descriptive du langage mathématique, voire à plus forte raison, les pratiques déductives reposent sur des implicites quant aux règles qui codifient l'élaboration d'un nouvel énoncé à partir de prémisses connues. Nous insistons sur le fait que notre propos n'est pas de « dénoncer » ces implicites ou d'alimenter l'illusion selon laquelle le discours mathématique serait, pourrait, ou devrait être parfaitement univoque. Ces implicites sont souvent tout autant nécessaires au raisonnement et à la communication qu'ils peuvent être problématiques dans un contexte d'enseignement.

Nous terminons cette introduction en donnant quelques précisions sur notre approche des questions de logique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le terme de « logique » est utilisé dans divers contextes : on dira par exemple qu'un argument élaboré dans le langage naturel est « logique » lorsqu'il paraît suffisamment consensuel ou évident ; dans d'autres circonstances, ce sont des théories mathématiques (théorie des modèles, théorie de la démonstration, *etc*.) ou d'autres disciplines (informatique, linguistique, …) qui sont ainsi désignées ; dans les programmes scolaires actuels et les documents qui les accompagnent, le terme « logique » semble désigner des compétences mathématiques transversales relatives à la verbalisation et au raisonnement mathématique, mais sans qu'aucune théorie sous-jacente ne soit avancée. Pour notre part, nous désignons par « logique » la portion des mathématiques s'intéressant à la syntaxe permettant d'élaborer les énoncés, à la notion de vérité d'un énoncé dans une structure d'interprétation et à celle de validité logique et de démonstration. A la suite de divers travaux de didactique des mathématiques, nous considérons que le calcul des propositions, c'est à dire une approche de la logique centrée sur les seuls propositions et connecteurs propositionnels (« et », « ou », « implique », « non ») offre un cadre trop étroit pour rendre compte de l'activité mathématique (*cf*. Durand-Guerrier et Arsac 2003). Notre travail se situe dans le contexte du calcul des prédicats, c'est à dire que nous considérons nécessaire d'entrer « à l'intérieur » des propositions. Les propositions, c'est-à-dire les unités linguistiques auxquelles il est possible d'attribuer une valeur de vérité, au moins potentiellement, sont alors analysées à partir des catégories logiques fondamentales de propriété, de relation, de variable, de nom d'objet et de quantificateur. Signalons que c'est à ce contexte que renvoient implicitement les programmes de lycée lorsqu'il est question notamment des quantificateurs existentiel et universel ou de la quantification implicite des énoncés conditionnels. Du point de vue de l'analyse didactique, l'intérêt est de se doter de moyens pour rendre compte de la manière dont les objets et les moyens de les désigner (lettre de variable, nom d'objet) sont manipulés dans la pratique mathématique. Nous considérons que c'est à ce niveau que la logique est particulièrement féconde pour l'analyse des pratiques mathématiques. Ce cadre donne notamment la possibilité de prendre en considération des formules (dites ouvertes) comme « n est un nombre pair » qui ne sont pas des propositions au sens où elles n'ont pas de valeur de vérité, et d'aborder la question de la satisfaction d'une telle formule par divers objets d'un domaine d'interprétation (Durand-Guerrier 2005, pp. 18-19). Dans ce texte, nous désignerons l'ensemble des formules (ouvertes ou fermées) par le terme

« énoncé », au sens de la production verbale d'un-e locuteur/trice dans une situation d'énonciation, pour insister sur la dimension pragmatique de notre approche même si l'usage en logique semble plutôt être de réserver cette étiquette aux formules fermées (sans variable qui ne soit sous la portée d'un quantificateur).

Analyse logique des concepts

Les catégories de la connaissance explicite[1]

La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990) définit la notion de concept à partir de trois ensembles. Le premier comprend les *situations* dans lesquelles le concept est susceptible être utilisé, le second comprend les *invariants* sur lesquels reposent l'action des sujets et le troisième les *représentations* permettant les manipulations symboliques. Du côté de la description du comportement des sujets et de la conceptualisation, la notion centrale est celle de schème. Il s'agit de rendre compte d'une forme de régularité dans la conduite des sujets pour une classe de situations données. Au cœur des schèmes se trouvent ce que Vergnaud appelle les *invariants opératoires* :

> « Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments » (Vergnaud 1990, p. 145)

Le système des invariants opératoires est ce qui permet de penser le réel, il est au fondement des schèmes au sens où il ne peut y avoir d'organisation de l'action sans découpages (quels objets ?) et points de vue sur la situation (quelles relations entre ces objets ?), autrement dit sans énoncés tenus pour vrais par le sujet, au moins en acte (des jugements). Ces invariants opératoires sont selon Vergnaud de trois types logiques fondamentaux : des propositions – les formules fermées possédant une valeur de vérité – qui sont implicitement universellement quantifiées puisque portant sur des classes de situations et qui permettent de décrire les théorèmes-en-acte ; des fonctions propositionnelles – les formules ouvertes susceptibles d'être ou non satisfaites par divers objets – qui permettent de décrire les concepts-en-acte ; des arguments, c'est à dire les objets susceptibles d'être caractérisés (propriétés) ou d'être mis en relation via les fonctions propositionnelles. Pour ce qui nous intéresse ici, c'est à dire les relations entre logique, langage, raisonnement et apprentissage, nous retenons le fait que la conceptualisation mathématique repose sur une appréhension du monde que Vergnaud suggère de décrire par le langage des prédicats, y compris lorsque cette appréhension est plutôt opératoire que verbalement explicite. Précisons néanmoins que si Vergnaud souligne l'importance des invariants opératoires, celui-ci insiste également sur le fait que les objectifs que se donne le sujet, les règles d'action, les inférences jouent aussi un rôle essentiel dans le fonctionnement des schèmes. Ceci nous semble aussi important pour ce qui est des aspects opératoires de la connaissance – les points de vue constituant la réalité organisée par le sujet sont toujours subordonnés à un but, à une action – que pour les aspects prédicatifs que nous aborderons dans les deuxième et troisième parties de ce texte. Ceci explique pourquoi nous nous intéresserons au langage aussi bien comme outil de construction et de description de la réalité mathématique (partie 2) que comme mode de raisonnement (partie 3).

Le processus de conceptualisation est un processus long, qui peut s'étendre sur plusieurs années, de part la variété des situations, des invariants et des signes qui peuvent être rencontrés. Le recours au langage des prédicats, à l'analyse « interne » des propositions en

---

1 Pour des développements complémentaires, voir Durand-Guerrier 2013.

termes de relation entre objets, est un moyen d'envisager les ruptures potentielles dans les invariants opératoires et dans la manière dont la culture scolaire envisage d'organiser la réalité. Vergnaud (2002) signale le cas du concept de symétrie axiale qui fonctionne à l'école élémentaire tout d'abord comme une relation. Il s'agit par exemple de se demander si deux figures sont ou non symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite donnée. Ici, les objets sont les figures et la droite et le concept de symétrie fonctionne comme une relation ternaire. Plus tard, au collège notamment, le concept va être abordé comme un objet, par l'intermédiaire d'un processus de nominalisation. On affirmera par exemple que la symétrie conserve les angles, qu'elle est une isométrie. Ces variations dans le système des invariants opératoires occasionnent des ruptures qu'il nous semble important de saisir pour la recherche en didactique comme pour la formation des enseignants :

> « On peut aisément imaginer ce que l'accumulation de ruptures dans les formes opératoires et dans les formes prédicatives des connaissances mathématiques peut engendrer de difficultés pour les élèves. Les enseignants sont trop faiblement avertis de ces ruptures. » (Vergnaud 2002, p. 11)

Nous proposons dans les deux paragraphes qui suivent une illustration de ces enjeux à partir d'un développement autour de l'exemple de la symétrie et d'une illustration en classe de 6^{e}.

Ruptures dans le processus de conceptualisation : l'exemple de la symétrie

Le contexte de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie est particulièrement sensible à cette thématique des ruptures dans le processus de conceptualisation. Nous allons en rendre compte en analysant la formation des élèves en géométrie comme une éducation à la perception des figures. Duval (2005) insiste sur l'importance de mettre en place des modes spécifiques d'appréhension des figures, et notamment sur le processus de déconstruction dimensionnelle : les figures géométriques doivent être reconstruites à partir d'unités figurales de dimension inférieure (typiquement des points et des droites). Là aussi, c'est l'objectif défini par la situation qui commande la perception, le système d'objets qui doit être considéré et les figures qui pourront en être extraites :

> « Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n’est plus qu’une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d’un réseau ou d’une organisation plus complexe, le détachement d’une figure particulière étant commandé par l’énoncé du problème. » (Duval, 2005, p. 26).

Que les connaissances en jeu soient plutôt de nature prédicative ou plutôt de nature opératoire, la question du nombre et de la nature des objets en jeu est essentielle dès lors que l'on cherche à décrire les comportements des élèves. Par exemple, le tracé du milieu d'un segment ne conduira pas aux mêmes procédures selon que les invariants opératoires sur lesquels reposent les schèmes des élèves mobilisent les sommets dudit segment en tant qu'objets et l'alignement comme relation ternaire plutôt que le segment dans sa globalité et l'appartenance comme relation binaire (Barrier, Mathé & de Vittori 2012). La perception est donc, tout autant que l'action matérielle, déterminée par les invariants opératoires qui sont mis en jeu. Perception et action (matérielle) entretiennent des relations similaires à la conceptualisation :

> « On peut penser autrement, et prendre acte du fait que si les schèmes sont produits par le corps en situation, cela signifie que la perception et la pensée s'organisent mutuellement : pour parler comme James, la perception est « *de la pensée et de la sensation qui ont fusionné* ». On pourrait donc dire « au fond de la perception, la conceptualisation »[2], ce qui ne serait pas une façon de

2 Il s'agit d'un clin d’œil à la formule de Vergnaud : « au fond de l'action, la conceptualisation ».

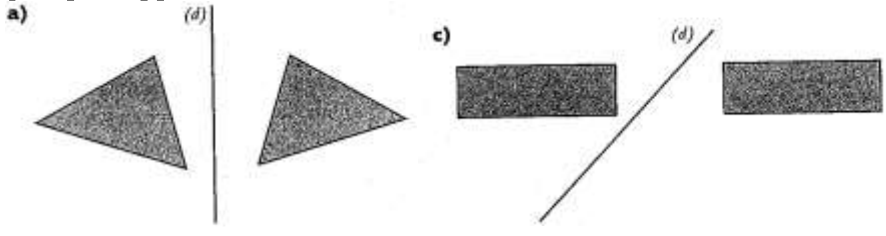
revenir au kantisme, puisque la perception dont il s'agit ici n'est pas une perception-interface, mais une perception liée à la fois au monde et au concept. » (Sensevy 2007, p. 27)

Dans l'exemple qui va suivre, nous chercherons à montrer la manière dont l'analyse logique des concepts peut être un outil pour mieux appréhender les invariants opératoires en lien avec l'activité des sujets dans chacune de ces facettes : opératoire, prédicative et perceptive. Signalons que dans cet exemple, nous nous intéresserons à la fois à l'activité des élèves, mais aussi à son articulation avec celle de l'enseignante. La communication réussie entre élèves et enseignante suppose en effet que les systèmes d'objets considérés soient cohérents entre les différents acteurs.

Commençons par dégager un certain nombre de configurations possibles pour le système des invariants opératoires associé au concept de symétrie. La symétrie axiale peut se définir comme une une relation ternaire entre deux figures (ou deux points) et un axe de symétrie (S1). Elle peut aussi se définir comme une relation binaire entre une figure et un axe (S2), ou comme une relation binaire entre deux figures (caractérisation S1 avec quantification existentielle de l'axe de symétrie – S3). La symétrie peut aussi être définie comme propriété d'une figure (caractérisation S2 avec quantification existentielle sur l'axe de symétrie – S4). Elle peut aussi être appréhendée comme un objet dont les propriétés et relations avec d'autres objets pourront être étudiées (S5). Le concept de symétrie axiale peut donc mobiliser des arrière-plans logiques différents, selon l'arité des relations en jeu et selon la nature des objets concernés (points et/ou figures et/ou droites). Chacun de ces systèmes d'invariants opératoires peut être associé, à un moment ou à un autre de la scolarité des élèves, à des enjeux d'apprentissage propres (Perrin-Glorian 2012). Il s'agit non seulement de percevoir les figures d'une manière spécifique, mais aussi de se familiariser avec des pratiques instrumentées et langagières qui sont propres à chacune de ces facettes du concept de symétrie. Pour ce qui est des connaissances prédicatives, il est intéressant de remarquer qu'une même expression peut prendre des significations différentes selon la caractérisation qui est mobilisée par le contexte. Prenons l'exemple de l'énoncé « *F* et *G* ne sont pas symétriques ». Sans plus de précisions, il est possible de le lire d'au moins trois manières : *F* n'est pas symétrique et *G* n'est pas symétrique (caractérisation S4, *et*-propositionnel au sens de Mesnil 2014, *cf.* partie 2) ; il est impossible de trouver une droite *d* telle que *F* et *G* soient symétriques l'une de l'autre par rapport à *d* (caractérisation S3, *et*-couple au sens de Mesnil 2014, cf. partie 2)[3]; *F* et *G* ne sont pas symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite *d* (caractérisation S1, la droite *d* étant donnée par la situation d'énonciation).

*Rôle de l'analyse logique des concepts : une illustration en 6^e^*

Nous nous intéressons ici à une séance autour du concept de symétrie dans une classe de 6[e]. L'illustration est empruntée à Barrier, Chesnais & Hache (2014). On trouvera dans cet article des analyses plus développées que celles que nous proposons ci-dessous. La consigne de l'exercice proposé aux élèves est la suivante : « préciser, dans chaque cas, si les deux figures sont symétriques par rapport à la droite d ».



3 On pourra remarquer que cette interprétation est possible du fait du caractère symétrique de la relation de symétrie (au sens de S1 ou S3).

L'objectif de ces cas a) et b) semble être de travailler la caractérisation ternaire de la symétrie (S1) en revenant sur la définition de la symétrie par pliage, à l'aide d'un calque pour les séances auxquelles nous nous intéressons, déjà abordée à l'école primaire (deux figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite *d* si elles se superposent par pliage le long de cette droite *d*), tout en précisant certains aspects de cette relation puisque les triangles, comme les deux rectangles, sont bien symétriques entre eux, mais pas par rapport à la droite *d* considérée. On peut s'attendre à ce que les élèves produisent une réponse positive (i.e. erronée), soit parce qu'ils ne prennent pas en compte l'axe (à l'image de S3 ou S4) ou soit parce qu'ils n'en identifient pas clairement le rôle (équidistance des sommets à l'axe, direction orthogonale).
L'exercice est traité en classe : travail individuel, interventions ponctuelles de l'enseignante, puis correction collective. Beaucoup d'élèves produisent une réponse erronée. Pour le cas a), plusieurs élèves déclarent par exemple que « les figures sont symétriques ». Pourtant l'enseignante avait quelques minutes auparavant insisté sur l'importance de *par rapport à* dans l'expression « symétrique par rapport à la droite *d* » mais les élèves semblent en difficulté pour s'approprier cette remarque. Tout se passe comme s'ils ne prenaient pas particulièrement en compte l'axe de symétrie (que ce soit du point de vue perceptif, instrumental ou verbal), conformément à un schème dont le domaine de validité comprend les couples de figures qui ne sont pas symétriques (au sens de S3) et les couples de figure symétriques et leur axe de symétrie (au sens de S1). Cette difficulté porte notamment sur les aspects instrumentaux, plusieurs élèves s'interrogeant sur la nécessité de décalquer la droite[4]. Face à ces difficultés, l'enseignante prend en charge l'articulation des différents aspects de l'activité des élèves. La superposition par pliage ayant été évoquée, elle rappelle alors que « par rapport à la droite *d* » indique « l'endroit où l'on plie », faisant ainsi le lien entre le verbal et le matériel. D'une manière générale, on observe dans la séance une évolution dans le système des invariants opératoires structurant les schèmes des élèves, vers une prise en considération des trois objets (les deux figures et la droite). Les échanges entre l'enseignante et Lucien, élève en difficulté au début de la séance, en sont une bonne illustration :

> Enseignante : le petit c, Lucien, est-ce que tu peux répondre, maintenant ?
> Lucien : euh les deux rectangles sont pas symétriques
> Enseignante : ne sont pas symétriques [intonation ascendante – phrase suspendue]
> Lucien : par rapport à la droite *d*
> Enseignante : oui, en revanche, c'est ce que tu disais tout à l'heure, tu avais bien l'impression qu'ils étaient symétriques, mais pas – je vois bien que quand je plie sur d, mes deux rectangles ne se ?
> E : superposent pas.
> Enseignante : superposent pas, vous le voyez. En revanche est-ce que tu pourrais plier différemment pour qu'ils se superposent ?
> Lucien : euh, droit, comme ça [Lucien indique par des gestes la direction verticale].
> Enseignante : voilà, verticalement, on voit bien que si on plie verticalement – donc [elle écrit] les rectangles ne sont pas symétriques par rapport à *d*.

Dans cet extrait, on peut relever que grâce à la reprise par l'enseignante de la négation incomplète de Lucien, celui-ci parvient à préciser sa verbalisation, et peu après, toujours sous son étayage, à faire le lien avec les connaissances opératoires en jeu. Barrier, Chesnais, & Hache (2014) analysent également une autre mise en œuvre de cette même tâche, dans une autre classe. La comparaison met en évidence des prises en compte différentes des enjeux de

4 Ce n'est bien sûr pas une nécessité impérative mais ces interrogations montrent l'embarras des élèves quant à la prise en charge de cet objet.

savoir liés à l'axe de symétrie, la deuxième enseignante ayant recours plus fortement aux implicites, avec de possibles malentendus. Un exemple :

> Enseignante : Donc les figures a) et c) qu'est-ce qu'on peut dire ?
> E : ne sont pas symétriques
> P : ne sont pas symétriques [intonation descendante – fin de phrase]

Dans cette partie, nous avons cherché à montrer la manière dont l'analyse logique des concepts pouvait permettre de décrire les systèmes d'invariants opératoires qui sont au cœur des schèmes. Cela nous semble susceptible de contribuer aux analyses didactiques de l'activité des élèves (voire de l'enseignant), aussi bien dans ses aspects perceptifs, opératoires et langagiers. Dans la suite de ce texte, nous nous concentrons en particulier sur les aspects langagiers de la conceptualisation et des apprentissages :

> « La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans le processus de conceptualisation » (Vergnaud 2002, p. 9)

Analyse logique des énoncés

Commençons par considérer l'énoncé « si un nombre entier est divisible par 4 alors il se termine par 4 ». Cet énoncé a été proposé dans le cadre d'une enquête de la commission Inter-IREM Université à des étudiant-e-s entrant dans l'enseignement supérieur. La consigne était d'en donner la négation. Parmi les 340 réponses analysées par la commission, seul-e-s 10% des étudiant-e-s donnent une réponse correcte, c'est-à-dire synonyme de « il existe un nombre entier divisible par 4 et qui ne se termine pas par 4 ». Les réponses erronées prennent majoritairement la forme d'une implication. Ce résultat pourrait paraître à priori surprenant dans la mesure où, au lycée, les élèves utilisent régulièrement la règle du contre-exemple pour prouver qu'un énoncé universel est faux. Autrement dit, les étudiants entrant à l'université maîtrisent dans une certaine mesure la règle du contre exemple, qui est une connaissance opératoire, mais ne maîtrisent pas la connaissance prédicative correspondante, à savoir que la négation d'une implication universellement quantifiée est l'énoncé qui affirme l'existence d'un contre-exemple. Cet exemple montre la complexité propre de l'énonciation dans le contexte de la conceptualisation mathématique. Nous développons cet aspect dans cette deuxième partie.

Langage mathématique

La pratique mathématique experte, celle des mathématicien-ne-s, reposent sur des allers-retours entre un langage plus ou moins formalisé, voire symbolique, et un langage plus proche du langage naturel. Le degré de formalisation des énoncés dépend alors de la situation d'énonciation, des objectifs que le mathématicien ou la mathématicienne se donne (rédiger une démonstration, communiquer un énoncé, prendre des notes dans une conférence *etc*.), de sa familiarité avec les concepts en jeu comme de celle des personnes auxquelles il ou elle s'adresse (le cas échéant). Le plus souvent, les énoncés du langage mathématique empruntent aux deux registres, celui de la langue naturelle et celui du symbolisme logico-mathématique. Sa complexité dépasse néanmoins celle de la seule juxtaposition de celle de ces deux registres : le travail inaugural de Laborde (1982) en didactique sur le langage mathématique montre que le langage mathématique résulte d'une interaction entre le langage naturel et un langage plus symbolique, ceci lui conférant une complexité propre. Mesnil (2014) a récemment prolongé ce travail en s'intéressant aux reformulations des énoncés entre différents registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1993). La dimension langagière de la pratique mathématique experte se caractérise non pas seulement par la maîtrise des usages propres à un registre sémiotique donné (le fonctionnement de la négation dans le langage des prédicats par exemple) mais aussi par l'aptitude à passer d'un registre à l'autre, en fonction des objectifs que l'on se donne. Pour démontrer qu'une fonction réelle dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (formulation de l'énoncé dans le registre de la langue naturelle), mieux vaut être en mesure d'expliciter formellement les définitions des notions en jeu (notamment la quantification « cachée » derrière des mots comme *continue* ou *dérivable*). Mesnil distingue les quatre registres suivants :

- registre de la langue naturelle : « tout entier naturel divisible par 4 est pair » [on pourra néanmoins remarquer que si le registre relève de la langue naturelle le traitement des énoncés au sein de ce registre est spécifique au contexte mathématique]
- registre intermédiaire : « si n est divisible par 4 alors n est pair » [l'énoncé est classé dans le registre intermédiaire plutôt que formalisé car la quantification universelle sur n reste implicite ; on pourra remarquer la répétition de la variable n, cette tournure syntaxique étant spécifique des mathématiques]
- registre formalisé : « pour tout entier n, si n est divisible par 4 alors n est pair » [ici la structure logique est explicite ; on considère que les prédicats « être divisible par 4 » et « être pair » font partie du langage] ou « pour tout entier n, s'il existe un entier k tel que $n = 4k$ alors il existe k' tel que n = $2k'$ »
- registre symbolique : « $\forall n \in \mathrm{N}\ d_4(n) \rightarrow p(n)$ » [d_4 et p sont dans ce cas deux symboles appartenant au langage symbolique ; les ressources sémiotiques sont toutes symboliques] ou « $\forall n \in \mathrm{N}\ (\exists k \in \mathrm{N}\ n=4k) \rightarrow (\exists k' \in \mathrm{N}\ n=2k)$ »

Cette classification en différents registres permet de penser les potentielles difficultés qui pourraient se poser aux élèves au cours du travail de reformulation. Par exemple, certains mots du langage naturel masquent parfois une structure logique complexe (on peut penser par exemple à une formulation du type « la suite u_n est croissante » ou « il existe un unique … tel que ... »), la structure syntaxique de la version formalisée d'un énoncé est parfois éloignée de certaines versions en langue naturelle (la variable n est répétée trois fois pour les formulations dans le registre formalisé ci-dessus). Par ailleurs, il y a du point de vue du langage des prédicats des implicites dans les énoncés mathématiques exprimés en langage naturel ou dans le registre intermédiaire. Certaines tournures de phrase et certains termes contribuent parfois à orienter la lecture des énoncés d'une manière qui peut en même temps être transparente pour un-e « locuteur/trice compétent-e » et problématique pour un-e élève en cours d'apprentissage. Il faut ici signaler qu'un même terme peut, selon les contextes d'énonciation, jouer différents rôles du point de vue de la formalisation logique. Le langage des prédicats procure alors une référence pour analyser les énoncés mathématiques, qui sont le plus souvent exprimés dans le registre intermédiaire, pour en préciser le sens, relever les cas de polysémie et anticiper les possibles malentendus entre enseignant-e-s et élèves.

Des usages subtils et situés

Cette méthode de travail a par exemple été récemment mise en œuvre par Hache (2015). Celui-ci s'est intéressé aux usages du mot « avec » dans des manuels de mathématiques du collège :

> « On constate donc une variété (sans doute ici non exhaustive) d'usages de « avec » en lien avec les variables : quantification universelle, quantification existentielle, quantification universelle et existentielle, condition de sens d'une expression, affectation de valeur, *etc*. » (Hache 2015)

Ces résultats sont convergents avec ceux, plus anciens, de la thèse de Rakotovoavy (1983), laquelle s'est intéressée à l'utilisation des marqueurs de variance dans les manuels (« quelconque », « arbitraire », « donné », « fixé », « fixe », « choisi » et « variable »). Celle-ci dégage quatre principaux rôles pour ces marqueurs :

- indicateur/renforceur de mutification : dans l'énoncé « deux éléments quelconques de *D* sont comparables pour la relation ≤ », le terme « quelconque » est un indicateur de mutification universelle (sans lui, et hors contexte, la quantification portant sur les éléments de *D* serait ambigüe)
- indicateur/renforceur d'ordre de mutification : dans l'énoncé « il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné », le terme « donné » clarifie le fait que la quantification universelle est antérieure à la quantification existentielle
- annulateur de restriction : dans l'énoncé « Soit a un réel quelconque et b un réel positif, $a/\sqrt{b} = a\sqrt{b}/b$ », le terme « quelconque » s'oppose à la restriction opérée sur b.

Il serait certainement intéressant d'actualiser cette étude dans le contexte des manuels actuels mais nous faisons l'hypothèse que la situation n'a pas fondamentalement changé. Nous retenons notamment l'idée que l'interprétation d'un énoncé écrit dans un registre intermédiaire fait appel, de manière irréductible, à une connivence mathématique entre locuteurs/trices. Il n'y a pas de moyen systématique reposant sur la seule syntaxe pour procéder aux conversions entre les registres intermédiaire et formalisé dès lors que les marqueurs de variance jouent le rôle d'indicateur/renforceur de mutification :

> Par contre, dans le rôle de renforceur/indicateur de mutification, il est beaucoup plus difficile de s'y retrouver (un même marqueur peut être renforceur/indicateur de mutifications différentes. Il n'y a pas de moyen sûr à l'avance qui nous indique à quelle mutification on a affaire ; seul le contexte peut le dire. Un élève pourra-t-il toujours s'en sortir seul ? (Rakotovoavy 1983, p. 139)

Considérons par exemple l'énoncé d'exercice suivant repéré par Rakotovoavy (1983, p. 100) :

> « Soient quatre points distincts tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Quel est le nombre des droites qui passent par deux quelconques de ces points ? »

Le premier quelconque joue le rôle d'indicateur de mutification universelle. Par contre, rien ne signale, hormis l'expertise mathématique, qu'il faut comprendre qu'il faut choisir des points distincts les uns des autres. Considérons maintenant le deuxième usage du terme dans ce même énoncé. Une manière d'interpréter le problème est de considérer qu'il faut rechercher quel est le cardinal d'un ensemble dont les éléments sont les droites pour lesquelles *il existe* deux éléments *distincts* de l'ensemble initial qui en soient des points. Cette fois, il faudrait lire le terme « quelconque » en relation avec une quantification existentielle, qui plus est une quantification existentielle un peu particulière puisqu'il est clair que les éléments sélectionnés doivent être distincts, sans quoi l'exercice ne présenterait pas beaucoup d'intérêt. Nous avons donc affaire à deux usages du terme « quelconque » avec des finalités différentes, dans deux phrases consécutives d'un manuel scolaire, sans qu'aucun élément syntaxique ne vienne avertir le lecteur de la variation de signification.

Poursuivons avec une nouvelle illustration. Nous nous intéressons ici aux variations de signification entre les deux marqueurs « donné » et « quelconque ». Ces deux marqueurs semblent parfois substituables. Dans l'énoncé « Soit a, b et c trois nombres entiers quelconques/donnés. Si c divise a et c divise b alors c divise $a + b$ », ces deux marqueurs semblent pouvoir jouer le même rôle de renforceur de mutification universelle. Il existe néanmoins d'autres situations dans lesquelles la substitution semble discutable. C'est le cas pour un énoncé déjà utilisé plus haut : « Deux éléments quelconques/donnés de *D* sont comparables pour la relation ≤ ». Même si nous n'avons pas réalisé d'étude empirique permettant de l'attester, il nous semble que la formulation avec le marqueur « quelconque » est moins ambigüe que celle avec le marqueur « donné », le lecteur étant potentiellement susceptible d'hésiter entre une interprétation universelle ou existentielle dans le deuxième cas. Par contre, dans le contexte de la fonction d'indicateur/renforceur d'ordre de mutification, les usages sont clairement différenciés et incompatibles. Empruntons un nouvel exemple à Rakotovoavy (on pourrait très bien adapter la formulation ci-dessous pour la rendre plus actuelle, sans toucher au fond de l'argument) :

> « Soit (A,B) un bipoint donné/quelconque. Nous supposerons $A \neq B$. Cherchons s'il existe un point C de la droite (AB) tel que vect(CA) = k vect(CB), k étant un nombre réel donné/quelconque. »

Pour ce qui est de leur première occurrence, les marqueurs « donné » et « quelconque » paraissent interchangeables, sans grande conséquence sur le sens de l'énoncé. Par contre, ce n'est pas le cas pour la deuxième occurrence. Le marqueur « donné » joue le rôle d'indicateur d'antériorité de mutification (la quantification sur k est antérieure à la quantification sur C). Le marqueur « quelconque » ne peut pas jouer un tel rôle. Cet exemple montre quelle peut être la complexité de la tâche des élèves dans l'identification de la structure logique des énoncés mathématiques, et partant dans leur interprétation, lorsque ceux-ci sont formulés dans le registre intermédiaire. La reformulation de ces énoncés dans le registre formalisé ou symbolique est pourtant souvent une nécessité lorsqu'il s'agit par exemple de s'engager dans une démonstration (Selden & Selden 1995). Dans ce paragraphe, nous nous sommes focalisés sur la thématique de la quantification des variables. Nous poursuivons en analysant les usages de deux constantes logiques, la conjonction et l'implication.

Conjonction, implication : quels usages ?

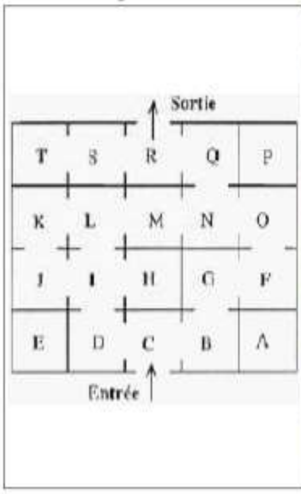
Dans sa thèse, Mesnil (2014) s'est intéressée à ce qu'elle appelle la logique des mathématiques, c'est à dire à la logique mise en œuvre dans la pratique des mathématiciens. Sa perspective est notamment d'en dégager les principales caractéristiques afin de contribuer à la constitution d'une référence qui puisse servir de support à la partie externe de la transposition didactique, ceci étant rendu d'actualité par la réapparition de notions de logique dans les programmes du lycée. Elle décrit en particulier les usages en lien avec les diverses constantes logiques (conjonction, disjonction, implication, etc.). Nous nous appuyons ici sur ses résultats pour aborder le cas de la conjonction. A nouveau, le langage de la logique des prédicats sert de langage d'arrière-plan pour essayer de saisir la variété des usages.

Un premier usage est à rapprocher de la conjonction des propositions (au sens du calcul propositionnel). Ex : « les nombres entiers n et m sont premiers ». Sur le plan logique, nous avons ici affaire à la conjonction des deux propositions « le nombre entier n est premier » avec « le nombre entier m est premier ». Dans le registre intermédiaire, la partie prédicative des deux énoncés est mise en commun, ce qui permet une économie dans la manière de dire.

Un second usage correspond à la formation d'un couple dont les éléments sont mis en relation. Ex : « les nombres entiers n et m sont premiers *entre eux* ». Ici, il est énoncé que la relation binaire « être premier avec » s'applique au couple d'entier n et m. Si dans cet énoncé, la présence de « entre eux » est un indicateur de la présence d'une relation entre plusieurs éléments, on ne retrouve pas toujours d'indicateur syntaxique orientant la lecture. On dira par exemple parfois que « les figures a) et c) sont symétriques par rapport à la droite (d) » plutôt que « les figures a) et c) sont symétriques *l'une de l'autre* par rapport à la droite (d) » ou « la figure a) est le symétrique de la figure b) par rapport à la droite (d) » pour reprendre un exemple déjà présenté plus haut. En l'absence d'indicateur, ce sont donc les connaissances mathématiques de celui ou celle qui interprète qui sont déterminantes. Remarquons enfin que cette pratique semble réservée au cas de relations pour lesquelles l'ordre des arguments n'a pas d'importance. Prenons le cas de la relation binaire non symétrique « divise ». On dira que « le nombre entier n divise le nombre entier m », les deux arguments étant placés de part et d'autre du signe de relation. L'utilisation du « et » semble réservée aux contextes « symétriques ». Mesnil signale un cas pour lequel une même occurrence du mot « et » dans un énoncé du registre intermédiaire recouvre les deux usages signalés ci-dessus : « les ensembles *A* et *B* sont non vides et disjoints ». Le premier « et » joue deux rôles, celui en lien avec la conjonction de propositions pour le prédicat « être vide », et celui en lien avec les relations symétriques pour la relation « être disjoint de ».

Un troisième usage correspond à l'énumération des éléments d'un ensemble. Dans ce cas, le mot « et » est utilisé avec l'article défini « les » : « -1 et 1 sont les solutions réelles de l'équation $x^4 -1 = 0$ ». L'utilisation de l'article indéfini « des » dans la même phrase appellerait une toute autre interprétation (conjonction de deux propositions). L'utilisation de la forme rigide « … et … sont les ... » doit s'interpréter comme la conjonction de trois propositions, une d'entre elle exprimant le fait que tous les éléments de l'ensemble considéré ont bien été énumérés. Ceci montre la complexité propre à l'utilisation mathématique du langage naturel au sein du registre intermédiaire. Dès lors, se pose la question des malentendus possibles entre l'intention de l'énonciateur/trice et l'interprétation de celui ou celle qui reconstruit la signification de l'énoncé. Nous proposons maintenant d'illustrer ce phénomène à l'aide de l'exemple de l'interprétation des implications implicitement universellement quantifiées par les élèves.

La notion d'implication est une notion polysémique (Durand-Guerrier 2003). Commençons par distinguer les signes tels que « si..., (alors)... » ou « → » des propositions qu'ils permettent de construire. L'implication fonctionne alors comme un opérateur syntaxique qui, au sein du calcul des propositions, permet de construire une nouvelle proposition à partir de deux propositions. La proposition $A \rightarrow B$ est équivalente à la proposition non *A* ou *B*. Les valeurs de vérité de ces deux énoncés sont le faux lorsque *A* est vrai et *B* est faux, et le vrai dans chacune des trois autres configurations pour les distributions de valeurs de vérité de *A* et de *B*. Le langage des prédicats, que nous utilisons comme ressource dans ce texte, permet par ailleurs de considérer des implications « ouvertes », c'est-à-dire des énoncés de la forme $P(x) \rightarrow Q(x)$ dans lesquels la variable *x* est libre. Ces énoncés ne sont pas des propositions au sens où ils n'ont pas de valeur de vérité. On dira qu'ils sont satisfaits par des éléments *a* d'un domaine d'interprétation lorsque l'implication entre propositions $P(a) \rightarrow Q(a)$ est vraie. Cette notion de satisfaction permet d'étendre l'application de la notion de vérité aux implications universellement quantifiées (notamment) : on affirme que l'énoncé $\forall x \in E\ P(x) \rightarrow Q(x)$ est vrai lorsque chaque élément du domaine d'interprétation E satisfait l'implication ouverte associée. Ces distinctions vont nous permettre d'analyser les écarts d'interprétation entre des élèves et des enseignant-e-s concernant la tâche ci-dessous (Durand-Guerrier 1999).



Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte. Les pièces sont nommées A, B, C… comme il est indiqué sur la figure. Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).
Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE. En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.
Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.
Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

Cette tâche a été proposée par des enseignants volontaires à des élèves de seconde dans le cadre d'une évaluation à l'échelon national organisée par l'Association des Professeurs de

Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP). Lors de l'analyse des résultats, les auteurs font part de leur étonnement quant aux réponses apportées par les élèves relativement à le phrase n°6 en particulier. Les élèves répondent majoritairement ON NE PEUT PAS SAVOIR, la tendance étant encore accentuée pour celles et ceux qui sont à l'aise en mathématiques, alors que les auteurs considèrent que la bonne réponse est la réponse FAUSSE. Durand-Guerrier (1999) montre que cet écart peut s'analyser comme le produit d'une divergence d'interprétation de la phrase 6. Il est en effet possible de lire cette phrase comme une instance d'une implication ouverte d'une part (la lettre X désignant un individu singulier), ou comme une implication universellement quantifiée (sur l'ensemble des parcours par exemple) d'autre part. Dans le premier cas, il est raisonnable de dire que l'on ne peut pas savoir si la phrase est vraie ou non (satisfaite ou non par le parcours de X) alors que la phrase est fausse selon la deuxième lecture. Les deux réponses sont tout aussi rationnelles l'une que l'autre du point de vue strictement logique. Notons cependant que dans la plupart des cas, ceux qui répondent que la phrase 6 est fausse proposent la réponse « on ne peut pas savoir » pour la phrase n°3, ce qui conduit à changer le statut logique de la lettre X entre la phrase n°3 et la phrase n°6, ce qui ne peut se comprendre que d'un point de vue pragmatique (Durand-Guerrier 2005). Cette observation, renouvelée par ailleurs dans d'autres contextes depuis lors, atteste de divergences importantes dans l'interprétation des énoncés donnés sous forme d'implication. La pratique de la quantification implicite des implications n'est pas partagée par des nombreux élèves du lycée, alors qu'elle semble assez largement l'être au sein de la communauté mathématique.

Venons-en maintenant au point de vue déductif sur l'implication. Cela nous servira de transition vers l'analyse logique de la validation qui sera l'objet de la troisième et dernière partie du texte. Deux règles de raisonnement sont directement liées à l'implication. Le *modus ponens* permet de déduire la proposition B à partir des données A et $A \rightarrow B$. Cette règle est au cœur de l'élaboration de très nombreuses démonstrations mathématiques, celles qui utilisent des théorèmes formulés sous forme d'implication. Si l'on souhaite démontrer une implication $A \rightarrow B$, la démarche consiste souvent à construire une preuve de B sous l'hypothèse A. Nous ne détaillerons pas plus en avant le fonctionnement de ces règles. Néanmoins, il nous semble intéressant de relever le fait que pour chacun des objectifs (utiliser ou démontrer une implication) la démarche déductive est élaborée dans un contexte où A est très souvent l'objet d'une énonciation de celle ou celui qui engage la démarche déductive (en tant que donnée ou hypothèse). Du point de vue de la déduction logique, tout se passe donc le plus souvent comme si l'antécédent était vrai puisque cet antécédent est énoncé. Ce constat peut être rapproché d'autres (nous nous inspirons à nouveau de Mesnil 2014). Tout d'abord, de nombreux élèves et étudiant-e-s (y compris avancé-e-s) sont en difficulté lorsqu'il s'agit d'évaluer la vérité d'une implication à prémisse fausse. Par ailleurs, la conception selon laquelle lorsqu'une implication est en jeu son antécédent est nécessairement vrai peut mener à des difficultés lorsqu'il s'agit par exemple d'utiliser un *modus tollens* (déduction de non A à partir de $A \rightarrow B$ et non B, Deloustal-Jorrand 2001, Durand-Guerrier 2005). Par ailleurs le fait que la démonstration d'une implication $A \rightarrow B$ consiste le plus souvent en l'élaboration d'une démonstration de B sous l'hypothèse A contribue certainement à expliquer pourquoi un mathématicien ne dirait pas « si racine de 2 est irrationnel, alors 6 est un nombre parfait » quand bien même l'énoncé est vrai. Ce serait une curiosité pragmatique (mais pas une erreur de logique) que d'énoncer $A \rightarrow B$ si la preuve de B pouvait être produite indépendamment de A. Ces usages contribuent à une lecture des implications en terme de dépendance entre antécédent et conclusion.

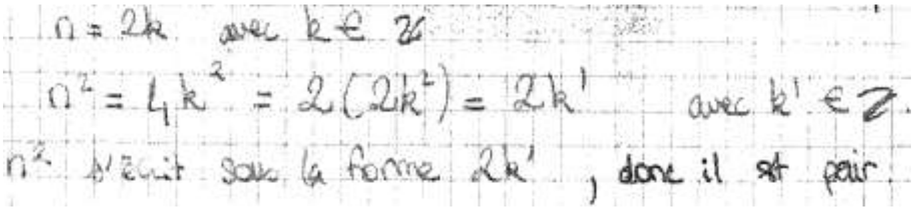
Ce paragraphe avait pour objectif de défendre l'idée selon laquelle la manière dont nous interprétons les énoncés, ce qu'ils nous disent de l'état de choses qu'ils décrivent, n'est pas indépendante de la manière dont nous les utilisons, notamment dans les contextes déductifs. En mathématiques, les énoncés ne sont pas seulement utilisés pour décrire les objets dont ils parlent (propriétés, relations, *etc.*) mais aussi pour élaborer des preuves. Il s'agit d'une dimension essentielle de leur signification sur laquelle nous nous penchons dans la suite du texte.

Analyse logique de la validation

Une approche complémentaire pour saisir la signification des énoncés

Nous reprenons ici certaines analyses de Hache (2015), conduites dans le paradigme de l'analyse logique des énoncés présenté dans la partie précédente, pour montrer en quoi le point de vue que nous adoptons dans cette partie est complémentaire. Hache s'intéresse notamment à l'énoncé « quel que soit l'entier naturel n, si n s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec k entier, alors n est un entier impair ». Il s'appuie notamment sur cet exemple pour montrer que deux interprétations sont envisageables pour ce qui est de la quantification portant sur la variable k. Conformément à la méthode décrite précédemment, l'argument s'appuie sur l'identification des possibilités de reformulation de l'énoncé en question au sein de la logique des prédicats. Une première reformulation dans le registre symbolique est la suivante « $\forall n \in \mathrm{N}\ [(\exists k \in \mathrm{N}\ n=2k+1) \rightarrow I(n)]$ » (I symbolisant le prédicat être impair), un autre consiste à faire sortir la quantification sur k de l'antécédent de l'implication pour la placer en tête d'énoncé : « $\forall n \in \mathrm{N}\ \forall k \in \mathrm{N}\ (n=2k+1 \rightarrow I(n))$ » (les deux formulations sont logiquement équivalentes). Ce constat conduit alors l'auteur à souligner le caractère non univoque de l'interprétation qui peut être faite de l'expression « avec k entier ». Nous proposons ici d'opérer un changement de perspective pour s'intéresser à l'usage qui peut être fait de l'énoncé. Imaginons par exemple que l'on souhaite utiliser l'énoncé pour montrer que le nombre 17 est un nombre impair. Bien que deux reformulations dans le registre symbolique soient envisageables, la stratégie d'usage de l'énoncé est bien univoque, y compris pour ce qui est en rapport avec la manipulation de la variable k : c'est à celle ou celui qui utilise l'énoncé d'être en mesure de trouver un entier k qui vérifie la relation $17 = 2k+1$. Nous proposerons plus loin un cadre logique qui nous permettra de préciser cette remarque en montrant que malgré les différences de forme, les stratégies d'usage de chacune des reformulations symboliques sont « essentiellement » les mêmes, dans un sens que nous expliciterons. En somme, les points de vue logiques syntaxique et pragmatique offrent des regards complémentaires.

Nous poursuivons l'argument en montrant cette fois que deux formulations proches peuvent jouer des rôles différents, avoir des significations pragmatiques différentes. Nous empruntons à nouveau un exemple aux travaux de Hache (2015). Il s'agit d'un extrait d'une preuve du fait qu'un nombre entier et son carré ont même parité par un étudiant de première année de Licence.


$n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.
n^2 s'écrit sous la forme $2k'$, donc il est pair.

Les deux énoncés « $n=2k$ avec $k \in \mathrm{Z}$ » et « $n^2 = \ldots = 2k'$ avec $k' \in \mathrm{Z}$ » écrits sur deux lignes consécutives ont des formes syntaxiques très proches. L'utilisation de la variable k (ou k') semble dans les deux cas pouvoir être rapprochée d'une quantification existentielle. Pour autant, si l'on s'intéresse à la signification pragmatique de ces énoncés, on peut remarquer que les fonctions des expressions « avec $k \in \mathrm{Z}$ » et « avec $k' \in \mathrm{Z}$ » sont différentes. On pourra s'en convaincre en essayant de substituer « or » à « avec » dans chacune des deux phrases. Ceci ne semble acceptable que pour la deuxième occurrence de « avec ». Le mode d'analyse présenté dans la partie précédente échoue à rendre compte de cette distinction. Nous préciserons cette analyse par la suite. L'enjeu de cette partie va maintenant être de présenter (succinctement) des outils logiques qui puissent contribuer à l'analyse didactique de la dynamique du discours de validation, notamment en rendant disponible un cadre théorique pour appréhender la manipulation des lettres et des objets dans la pratique mathématique.

Quels outils ? La déduction naturelle

Un premier outil logique susceptible de contribuer à l'analyse didactique du processus de validation est la déduction naturelle. Durand-Guerrier & Arsac (2003) utilisent la formalisation proposée par Copi (1954), Hache & Mesnil (*cf*. leur contribution dans ces actes) la version due à Gentzen (1955) et dont celle de Copi est une reprise articulant les points de vue syntaxique (règle de déduction) et sémantique (introduction d'un domaine générique d'interprétation pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs). La déduction naturelle propose un ensemble de règles formant un système dans lequel formaliser les démonstrations mathématiques. Elle cherche par ailleurs à ce que les formalisations produites restent aussi proches que possible des pratiques effectives des mathématicien-ne-s. Pour chaque connecteur et quantificateur, la déduction naturelle propose deux règles codifiant la manière dont le connecteur (ou le quantificateur) peut être introduit ou éliminé au cours d'une démonstration. Nous allons décrire succinctement et à la manière de Copi les règles relatives aux quantificateurs de manière à être en mesure de proposer une analyse de l'extrait précédent (production d'un étudiant de Licence).

1. Règle d'élimination du quantificateur universel : $\dfrac{\forall\ xfx}{fa}$

a est une lettre de constante d'objet et *fa* résulte de *fx* par la substitution de *a* à *x* dans toutes les occurrences libres de *x* dans *fx*.

2. Règle d'introduction du quantificateur universel : $\dfrac{fa}{\forall\ xfx}$

a dénote un élément sélectionné de manière arbitraire, sans aucune hypothèse autre que son appartenance au domaine considéré.

3. Règle d'introduction du quantificateur existentiel : $\dfrac{fa}{\exists\, xfx}$

a est n'importe quelle constante d'objet.

4. Règle d'élimination du quantificateur existentiel : $\dfrac{\exists\, xfx}{fw}$

w est n'importe quelle constante d'objet qui n'a pas d'occurrence préalable dans ce contexte. Elle est utilisée pour dénoter l'individu ou un des individus dont l'existence est affirmée par la quantification existentielle.

Nous sommes maintenant en mesure de rendre compte plus précisément de l'extrait précédent concernant les expressions « avec $k \in Z$ » et « avec $k' \in Z$ ». La formulation de la première ligne correspond à un usage de la règle d'élimination du quantificateur existentiel à partir de l'hypothèse « $\exists k \in N\ \ n=2k$ ». L'expression « avec $k \in Z$ » rend compte du fait qu'il faut interpréter *k* comme une constante d'objet représentant un entier relatif. Moyennant quelques manipulations algébriques (que l'on pourrait formaliser en introduisant les hypothèses ad hoc dans la preuve si l'on voulait produire une modélisation complète), le rédacteur parvient à la relation $n^2 = 2k'$. L'expression « avec $k' \in Z$ » a cette fois une fonction différente. Du point de vue de la déduction naturelle, il s'agit de signaler que $k'=2k^2$ est bien une constante d'objet (un terme) représentant un entier relatif, et qu'il est en conséquence possible d'utiliser la règle d'introduction du quantificateur existentiel en substituant une variable à ce terme qui soit sous la portée du quantificateur. En somme, bien que les expressions considérées soient syntaxiquement identiques, et toutes deux en relation avec une quantification existentielle, leurs fonctions divergent : « avec $k \in Z$ » résulte de l'utilisation de la règle d'élimination du quantificateur existentiel portant sur un énoncé la précédant dans l'ordre de la démonstration ; « avec $k' \in Z$ » exprime une condition pour l'utilisation de la règle d'introduction du quantificateur existentiel, l'énoncé existentiel (implicitement) produit lui succède dans l'ordre de la démonstration. La déduction naturelle procure donc un cadre théorique pour interpréter le fait que seule la deuxième occurrence de « avec » puisse être remplacé par un « or » dans l'extrait analysé. Ce « avec/or » a une fonction similaire à celle d'un « or » dans le schéma de déduction mieux connu qu'est le modus ponens (« je sais que A → B ; or A ; donc B ») : il s'agit de montrer que l'on est bien dans les conditions d'application d'une règle d'inférence.

Le type d'analyse proposé ici n'est envisageable que si l'on se donne les moyens de penser que l'activité mathématique déductive repose de manière très importante sur le recours à énoncés qui ne sont pas des formules closes, des propositions susceptibles d'être vraies ou fausses. Il faut également signaler que le plus souvent, seuls les énoncés sont explicitement écrits, les règles qui permettent de progresser dans le processus de démonstration ne faisant l'objet que de peu de verbalisations explicites, y compris dans l'enseignement, mis à part peut être dans certaines situations pour les utilisations du modus ponens. Dans ce contexte, la charge de reconstruire la dynamique logique de l'argument produit, l'identification des raisons pour lesquelles une collection ordonnée d'énoncés constitue ou non une démonstration est implicitement confiée aux élèves (et étudiants), sans que les connaissances en jeu ne fassent le plus souvent l'objet d'un enseignement organisé. La complexité de cette tâche augmente avec la complexité logique des énoncés. Les recherches portant sur cette question se sont notamment focalisées sur la transition entre l'enseignement secondaire et supérieur, et sur le cas des énoncés comportant au moins deux variables en particulier. Dans ce cas, une nouvelle précision doit être apportée concernant l'utilisation des quatre règles décrites ci-dessus. Dans le cas où f est un relation binaire, ternaires (ou plus encore) : l'introduction du quantificateur universel ne peut se faire que dans la mesure où fa ne contient aucune lettre de constante préalablement introduite par la règle d'élimination du quantificateur existentiel. En conséquence, si w a été introduite par une application de la règle d'élimination du quantificateur existentiel après que a ait été introduite par une application de la règle d'élimination du quantificateur universel, alors la règle d'introduction du quantificateur universel ne peut pas être appliquée à faw ; il est tout d'abord nécessaire d'utiliser la règle d'introduction du quantificateur existentiel. Barrier & Durand-Guerrier (2013) donne l'exemple d'un exercice d'algèbre linéaire proposé à des étudiants de première année du premier cycle d'une école ingénieur recrutant à la sortie de l'enseignement secondaire (INSA de Lyon) :

> Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et $f \in L(E)$ telle que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est lié.
> Montrer que $\exists \lambda \in \mathbf{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$.

Cet exercice est un « classique » du début de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Les étudiants produisent fréquemment un argument que l'on peut résumer de la manière suivante :

> Puisque pour tout x, $(x, f(x))$ est lié on a alors deux réels α et β non tous deux nuls tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. Si $\beta \neq 0$, on peut écrire $f(x) = -\alpha/\beta x$. Si $\beta = 0$, on a $\alpha x = 0$, donc $x = 0$ (α et β ne sont pas tous les deux nuls) et finalement $f(x) = 0 = x$. Dans les deux cas, il existe un λ tel que $f(x) = \lambda x$.

Ils s'arrêtent alors là, convaincus d'être parvenus à construire la démonstration attendue. Nous proposons maintenant une rapide analyse de cet argument à l'aide de la déduction naturelle. La démonstration avancée repose sur l'hypothèse $\forall x \exists \alpha \exists \beta [(\alpha,\beta) \neq (0,0) \wedge \alpha x + \beta f(x) = 0]$. La première étape consiste en une élimination du quantificateur universel portant sur la lettre x, la seconde consiste à éliminer les existentiels portant sur les lettres α et β. Moyennant quelques manipulations algébriques que nous ne détaillons pas, ceci aboutit à écrire la relation $f(x) = \lambda x$. Il reste alors à réintroduire la quantification sur les lettres x et λ afin d'obtenir un énoncé clos (sans variable libre) dans la conclusion de l'argument. Le texte de la preuve (reconstruction fictive) permet de supposer qu'une introduction d'un quantificateur existentiel est faite en rapport avec λ. La situation est moins explicite concernant la lettre x. Il semble raisonnable de faire l'hypothèse que celle-ci va être liée par l'introduction d'un quantificateur universel. Par contre, l'ordre d'introduction entre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel n'est pas clair. Démontrer l'énoncé $\exists\lambda\in\mathbf{R}\forall x\in E\ f(x)=\lambda x$ supposerait que l'introduction du quantificateur universel soit première par rapport celle de l'existentiel, mais cette pratique contreviendrait à la restriction formulée ci-dessus dans l'usage des règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs. Les difficultés récurrentes rencontrées par les étudiant-e-s dans l'élaboration de la preuve de l'énoncé considéré peuvent donc s'interpréter comme des difficultés dans la gestion de la réintroduction des quantificateurs. Plus précisément, le fait de ne pas réintroduire les quantificateurs à la fin de la preuve cache le fait que ce qui a été démontré est un énonce de la forme « Pour tout x, il existe λ $P(x, \lambda)$ », alors que l'énoncé visé est de la forme « Il existe λ tel que pour tout x, $P(x, \lambda)$ ». La déduction naturelle avec les règles de restriction pour la réintroduction des quantificateurs permet d'identifier le fait que la preuve est incomplète ; elle oriente également vers ce qu'il faut faire pour poursuivre la preuve, à savoir montrer que le réel λ dont l'existence est établie « ne dépend pas de x ». Les difficultés rencontrées par les étudiants pour gérer les énoncés comportant une alternance de quantificateurs universels et existentiels sont attestées dans la littérature et sont renforcées par les pratiques de quantification implicites des énoncés universels discutées plus haut dans le cas de la tâche du Labyrinthe (Durand-Guerrier et Arsac 2003, Chellougui 2003).

Côté enseignement, la déduction naturelle contribue à donner des outils pour penser et analyser la gestion de la dynamique des démonstrations par les enseignants, et notamment la thématique de la réintroduction des quantificateurs, cet aspect ne faisant que très rarement l'objet d'un travail explicite (la quantification des propositions démontrées reste souvent implicite).

Quels outils ? La logique dialogique

Dans ce paragraphe, nous présentons un autre outil susceptible de contribuer à l'analyse logique de la validation, la logique dialogique. Une présentation plus complète est disponible dans Redmond et Fontaine (2011). Nous mobiliserons ce cadre logique pour préciser l'analyse déjà esquissée à propos de l'énoncé portant sur les nombres impairs. Dans les approches dialogiques, la validation d'une proposition prend la forme d'un dialogue opposant deux joueurs selon un ensemble de règles du jeu. Le joueur qui propose l'énoncé à valider est appelé Proposant, son adversaire est l'Opposant. Certaines règles, associées aux constantes logiques, régissent le déroulement pas à pas du dialogue dans le respect d'autres règles plus globales qui sont appelées règles structurelles. Dans le contexte des jeux de validation formelle, chaque joueur réalise chacun à son tour une action : une assertion, une question, un choix de lettre ou d'objet d'une structure d'interprétation. Le jeu commence par l'assertion de la thèse, il se termine après un nombre fini de coups par la victoire d'un des deux joueurs. Une proposition sera dite formellement valide s'il existe une stratégie gagnante pour le Proposant dans le jeu face à l'Opposant.

- *Règles pour les constantes logiques*

R-ET : Lorsqu'un énoncé de la forme $A\wedge B$ est en jeu, une attaque consiste à choisir l'un des deux membres de la conjonction, une défense consiste à faire l'assertion du membre choisi.

R-OU : Lorsqu'un énoncé de la forme $A\vee B$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir l'un des deux membres de la disjonction, une défense consiste à choisir ce membre et à en faire l'assertion.

R-IMPLIQUE : Lorsqu'un énoncé de la forme $A\rightarrow B$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion A, une défense à faire l'assertion B.

R-NON : Lorsqu'un énoncé de la forme $\neg$A est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion de A, et il n'y a pas de défense possible.

R-UNIV : Lorsqu'un énoncé de la forme $\forall x P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à choisir un nom d'objet a, une défense consiste à faire l'assertion $P(a)$.

R-EXIST : Lorsqu'un énoncé de la forme $\exists x P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir un nom d'objet, une défense consiste à réaliser ce choix d'un certain a et à faire l'assertion de $P(a)$.

- *Règles structurelles*

R-Lancement du jeu : Le jeu commence par l'assertion par le Proposant de la proposition qui fait l'objet de la validation. Les joueurs jouent ensuite chacun à leur tour.

R-Fin de partie : Le jeu se termine lorsqu'un joueur ne peut plus produire de coup. L'autre joueur a alors gagné la partie.

R-Jeu formel : Le Proposant ne peut pas faire l'assertion de proposition atomique, à moins que la proposition ait été préalablement avancée par l'Opposant.[5]

R-Classique : Chaque joueur peut soit attaquer toute assertion (non élémentaire) faite par son adversaire, soit se défendre contre toute attaque de son adversaire.

Nous retournons ici à l'exemple introduit plus haut concernant les nombres impairs. Il s'agit à la fois d'illustrer l'utilisation des règles précédentes et de montrer en quoi l'analyse dialogique permet de préciser les questions de quantifications relatives à l'énoncé « quel que soit l'entier naturel n, si n s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec k entier, alors n est un entier impair » (α). Imaginons que pour valider (formellement) un énoncé quelconque (noté ci-dessous E), le Proposant ait besoin de recourir à l'énoncé « 17 est impair » sous les hypothèses (α) et « 17=2*8+1 ». Le jeu de validation prendrait alors l'une des formes suivantes, selon l'interprétation formelle de (α) :

	Opposant			Proposant	
-2	∀n ∀k (n = 2k+1 → n est impair)				
-1	17 = 2*8+1				
				E	0
	[...]			[...]	
n+1	∀k (17 = 2k+1 → 17 est impair)		-2	?–∀ [17]	n
n+3	17 = 2*8+1 → 17 est impair		n+1	?–∀ [8]	n+2
n+5	17 est impair		n+3	17 = 2*8+1	n+4
	[...]			[...]	

Cas n°1 - Interprétation de (α) comme $\forall n\ \forall k\ (n = 2k+1 \rightarrow n$ est impair)

Commentaires de lecture : Les coups -1 et -2 sont des concessions initiales de l'Opposant[6]. Ils représentent les hypothèses à partir desquelles le Proposant peut travailler. Après avoir avancé sa thèse (E) au coup n°0 (R-Lancement de jeu) et, après un début de dialogue portant sur E ([...]), le Proposant souhaite pouvoir utiliser l'assertion « 17 est impair ». Il commence alors à attaquer l'hypothèse -2 lors de son n-ième coup en faisant le choix du nom d'objet 17 (R-UNIV). L'Opposant se défend par le coup n+1 (R-UNIV). Le Proposant poursuit en attaquant

5 Cette règle dit que l'on ne peut soutenir un énoncé élémentaire que dans le cas où cet énoncé est une hypothèse (on peut voir les assertions de l'Opposant comme des hypothèses pour le Proposant)

6 Les nombres figurant dans les colonnes extérieurs servant à repérer l'ordre des coups dans le jeu.

cette défense *n*+1 au coup *n*+2 avec le nom d'objet 8 (R-UNIV) et l'Opposant se défend (coup *n*+3, R-UNIV). Le Proposant attaque à nouveau la défense de l'Opposant (coup *n*+4, R-IMPLIQUE, R-Jeu formel). Le coup *n*+5 est une défense de l'Opposant face à cette nouvelle attaque. Celui-ci concède l'énoncé « 17 est impair » qui est dorénavant susceptible d'être utilisé par le Proposant (R-Jeu formel). L'argumentation peut alors se poursuivre ([…]).

	Opposant			Proposant	
-2	$\forall n\ [(\exists k\ /\ n = 2k+1) \rightarrow n$ est impair$]$				
-1	$17 = 2*8+1$				
				E	0
	[...]			[...]	
n+1	$(\exists k\ /\ 17 = 2k+1) \rightarrow 17$ est impair		-2	$?\!-\!\forall$ [17]	n
n+5	17 est impair		n+1	$\exists k\ /\ 17 = 2k+1$	n+2
n+3	$?\text{-}\exists$	n+2		$17 = 2*8+1$ [8]	n+4
	[...]			[...]	

Cas n°2 - Interprétation de (α) comme $\forall n\ [(\exists k\ /\ n=2k+1) \rightarrow n$ est impair$]$

Commentaires de lecture : Le début du jeu est identique au précédent moyennant une variation dans la concession initiale -2. Le *n*-ième coup est une attaque par le Proposant de la concession initiale -2 associée. C'est le Proposant qui choisit le nom d'objet 17 (R-UNIV). L'Opposant se défend en *n*+1 (R-UNIV). En *n*+2, le Proposant attaque le coup *n*+1 de l'Opposant (R-IMPLIQUE). Plutôt que de répondre tout de suite et de concéder l'énoncé « 17 est impair », l'Opposant (contre-)attaque le coup *n*+2 en sollicitant le choix de nom d'objet (coup *n*+3, R-IMPLIQUE, R-Classique). Le Proposant se défend : il choisit le nom d'objet 8 (coup *n*+4, R-EXIST, R-Jeu formel). Au coup suivant, l'Opposant n'a plus d'autre choix que de se défendre de l'attaque du Proposant qui était restée en suspend (coup *n*+2), il concède l'énoncé « 17 est impair » (coup n+5, R-IMPLIQUE) qui pourra alors être utilisé par son adversaire (R-Jeu formel).

Nous allons maintenant nous intéresser à la dimension stratégique des choix opérés par les joueurs pour chacune des deux modélisations, notamment ceux relatifs à la lettre *k*. Cette dimension s'analyse en observant quels noms d'objets ont été choisis, par qui et dans quel ordre. En l'occurrence, dans chacun des deux cas, ce sont les mêmes objets qui sont choisis, et par le même joueur (le Proposant). Du point de vue de la dimension stratégique du jeu, c'est à dire celle qui est liée à la notion de validité, le fait qu'il y ait trois coups intercalés (*n*+1, *n*+2 et *n*+3) entre ces choix dans le deuxième tableau alors qu'il n'y en a qu'un seul (*n*+1) dans le premier n'est pas significatif puisque le choix du nom d'objet 8 est avant tout lié à l'hypothèse -1 (R-Jeu formel), et non à d'éventuelles indications portées par ces coups intermédiaires. Les modélisations prenant appui sur la logique dialogique permettent de préciser en quoi la dimension stratégique de la signification de (α) n'est pas particulièrement affectée par l'existence de deux reformulations de cet énoncé dans le registre formel ou symbolique.

Les approches dialogiques de la logique ont jusqu'ici été utilisées pour essentiellement deux raisons. Cette formalisation offre d'une part un cadre formel pour rendre compte du concept de stratégie, et ainsi contribuer notamment à l'analyse des situations de validation (Barrier 2011 ; Barrier & Durand-Guerrier 2013). En effet, ce qui importe dans la communication d'un discours déductif est d'en saisir la dynamique, l'organisation stratégique. Comprendre chacun des énoncés d'une démonstration ne garantit en rien d'en percevoir le fonctionnement pas plus qu'être en mesure de suivre pas à pas une partie d'échec ne peut s'identifier à en comprendre la dynamique. La notion de stratégie, la distinction entre le niveau de la partie et celui de la stratégie, est au cœur de la modélisation des démonstrations que propose la logique dialogique (la validité formelle se définit comme l'existence d'une stratégie gagnante dans un jeu). D'autre part, certaines variations sur les règles du jeu de validation permettent aussi de se doter d'un cadre théorique pour aborder la notion sémantique de satisfaction d'un énoncé par un élément d'un domaine d'interprétation, et plus généralement celle de vérité d'un énoncé relativement à un domaine d'interprétation (Durand-Guerrier 2005). Les approches dialogiques de la logique constituent ainsi un cadre englobant permettant d'aborder conjointement les dimensions sémantique (actions sur les objets, recherche d'exemples) et syntaxique (manipulation des énoncés) du processus d'élaboration des démonstrations (Barrier 2008).

Conclusion

Dans un ouvrage destiné aux futurs enseignants de mathématiques, Glaeser (1973) considère que la formalisation de la grammaire du calcul des prédicats est trop complexe pour être entreprise dans son ouvrage. Il ne la traite donc pas, se concentrant sur le calcul propositionnel. Néanmoins, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, il nous semble illusoire de vouloir faire l'économie des questions de quantification pour une analyse logique de la conceptualisation, des énoncés et des preuves mathématiques, ce qui justifie le recours au calcul des prédicats comme théorie de référence explicite pour une étude didactique de l'activité mathématique.

Nous avons tout d'abord illustré, sur le cas de la symétrie, le point de vue défendu par Gérard Vergnaud de la pertinence des catégories explicites de la connaissance, modélisées dans le calcul des prédicats, pour étudier les processus de conceptualisation. Nous avons ensuite mis en valeur la complexité et la subtilité des usages de la quantification tant dans l'interprétation des énoncés verbalisés que dans les situations de validation. Nous avons proposé des outils pragmatiques pour conduire les analyses didactiques de ces questions, outils dont la pertinence a été éprouvée dans plusieurs recherches et dont nous faisons l'hypothèse qu'ils peuvent être utiles pour penser les situations de formation en nous permettant de prendre de la distance avec les implicites que nous véhiculons nous mêmes de part notre propre pratique mathématique.

Références

Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique*, 2(3), 35-58.

Barrier, T. (2011). Les pratiques langagières des étudiants en analyse réelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 31(3), 259-290.

Barrier T., Chesnais A. & Hache C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale – Revue de recherches en éducation*, 54, 175-193.

Barrier, T. & Durand-Guerrier, V. (2013). Modélisations logiques en situation de validation. In A. Bronner & *al*. (Ed.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Barrier, T., Mathé, A.-C. & de Vittori, T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ? *Petit x*, 81, 5-33.

Chellougui, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, 61, 11-34.

Copi, I. M. (1954). *Symbolic Logic (2nd ed., 1965)*. New York : Macmillan Company.

Deloustal-Jorrand, V. (2001). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves professeurs. *Petit x*, 55, 35-70.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, 50, 57-79.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 5-34.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les recherches, Université Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In A. Bronner & al. (Ed.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295-342.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, 31, 37-61.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Gentzen, G. (1955). *Recherches sur la déduction logique* (traduit de l'allemand par R.Freys & J. Ladriere). Paris : Presses Universitaires de France.

Glaeser, G. (1973). *Mathématiques pour l'élève professeur*. Paris : Hermann

Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique.* Thèse d'état, Université de Grenoble.

Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Perrin-Glorian, M.-J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? Les mathématiques en marche au long de la scolarité obligatoire : L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin Vert de l'APMEP*, 499, 325-332.

Rakotovoavy, F. (1983). *Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance*. Thèse de troisième cycle, Université Paris 7.

Redmond, J. & Fontaine, M. (2011). *How to play dialogues. An introduction to dialogical logic*. Londres : College Publications.

Selden, A. & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 123–151.

Sensevy, G. (2007). Vergnaud, un pragmatiste ? In M. Merry (Ed.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (pp. 23-30). Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (2002). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (Ed.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation* (pp. 6-27). Montréal : Université de Montréal.