INTUITION PROFONDE DE RESULTATS MATHEMATIQUES DU SECONDAIRE, UNE QUESTION D'ENSEIGNEMENT

Christian SILVY CRREF ESPE Guadeloupe

Résumé. L'article introduit la notion d'intuition profonde d'une propriété ou d'un théorème aux programmes du secondaire dans les savoirs professionnels à acquérir par les étudiants de Master 2. Il montre sur un exemple que détenir cette intuition profonde permet à la fois d'acquérir une position réflexive et une vision stratégique sur la propriété traitée. La méthodologie employée déjà expérimentée en Guadeloupe pour approcher l'intuition profonde consiste à construire un site local d'une question.

Introduction

Emblème des mathématiciens, la démonstration en France reste une pratique de professeurs de mathématiques du secondaire. Associée à une démarche déductive cette pratique relie les différents objets mathématiques du théorème et les techniques associées. Le métier de mathématiciens ne se résume pas à cela. Avant de construire la démonstration, les mathématiciens émettent une conjecture et s'interrogent sur la validité de cette conjecture. En accord avec Thom (1970) *« c'est dans l'intuition que réside l'ultime ratio de notre foi en la vérité d'un théorème — un théorème étant avant tout, selon une étymologie aujourd'hui bien oubliée, l'objet d'une vision ».* Dans le cadre de l'atelier, nous cherchons à définir cette faculté en l'interrogeant au travers d'écrits de mathématiciens. Nous affirmons alors à la suite de Polya parlant d'heuristique (Polya, 1965 ; Lakatos, 2004 [1984])) que l'intuition doit devenir un objectif d'enseignement. Pour l'atteindre, nous postulons que construire un site local d'un théorème permet de s'interroger à la fois sur l'enseignement de la démonstration dans une logique déductive et sur celui de l'intuition qui porte le théorème. En particulier, cette analyse a priori d'une démonstration décortique les techniques en les reliant à d'autres concepts les englobant par une logique ascendante et dévoile certains éléments moteurs de l'intuition. Dans un second temps, les participants ont construit un site local du théorème de seconde sur la probabilité de l'intersection et de la réunion de deux événements. La discussion finale porte sur les apports du site local à la formation initiale par retour d'expériences.

Intuition et logique

Avant de chercher à prouver une assertion, il faut la concevoir par l'intuition. Comme le dit Thom il faut la voir. Mais cette intuition s'élabore à partir de nos connaissances en l'étayant par la logique (Hadamard cité par Bouligand, 1966). Elle guide le regard du mathématicien sur le théorème. Dans « la valeur de la science », Poincaré articule la faculté de l'intuition à celle d'une logique déductive :

« Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraisemblablement bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'une livre de mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est tout autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire

mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. À plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur. »

Cette citation de Poincaré est pour nous centrale, car elle rappelle que comprendre tous les pas d'une démonstration et reconnaitre la logique des différentes articulations ne suffit pas, il faut aussi avoir l'intuition de ce théorème et de sa démonstration. Nous transposons ce discours à l'enseignement de la démonstration en rajoutant la mémoire à ces deux piliers que sont la logique et l'intuition. Pour enseigner une démonstration il faut à la fois « connaitre la démonstration » c'est-à-dire pouvoir donner les différents pas de démonstration, « comprendre la démonstration » c'est-à-dire être capable de montrer la logique de ces différents pas et enfin « savoir la démonstration » (Conne, 1991) c'est-à-dire en saisir le sens profond (Legrand et al, 2006) de cette démonstration. Nous reconnaissons que la mémoire de la démonstration est située aussi dans l'acte qui permet la compréhension de la démonstration, mais nous ne rentrons pas dans ce débat. Le sens profond d'un savoir est un vecteur d'organisation. Il permet dans un premier temps au découvreur comme le dit Poincaré de construire le plan de la démonstration du savoir, mais aussi *« forge une représentation suffisamment pertinente de ce que représente ce savoir pour en faire un outil intellectuel personnel dont il va pouvoir se servir ultérieurement »* (Legrand et al., 2006). Ainsi les compétences pour enseigner une démonstration sont de trois ordres. Les professeurs sont capables de refaire la démonstration, d'expliquer la démonstration, mais aussi de faire comprendre la démonstration. Ces compétences se confondent, se meuvent et se délient dans un mouvement qui construit un point de vue réflexif sur ses connaissances ainsi qu'une vision stratégique. Nous postulons que ces connaissances sont acquises dans la construction d'un site local d'une propriété ou d'un théorème.

Dans cet atelier, les participants ont construit un site local (Silvy, Delcroix & Mercier, 2013) sur le résultat suivant :

Formule de l'union et de l'intersection de deux événements : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

Présentation du site

Nous présentons succinctement le site local. Le site local peut être exhibé sous la forme d'un tableau composé de trois parties (tableau 1). Les objets mathématiques présents dans le théorème constituent la partie centrale. À droite de cette partie, nous trouvons la partie mathématique construite par Duchet et Erdogan (2005). À gauche se trouvent les éléments préconstruits, paramathématiques ou protomathématiques (Chevallard, 1985), communs à plusieurs disciplines, ceux qui permettent d'organiser la démonstration ou de déclencher la démonstration (stratégie...)
Remarques
La formule choisie par le programme montre davantage le rôle symétrique de l'union et l'intersection.
Pour aider à la construction du site, nous mettons en *italique* les concepts ou objets présents dans le tableau.
Dans l'élaboration du site, il faut se mettre à la place du professeur pour construire la partie mathématique et à la place de l'élève pour faire émerger la partie anthropologique. Ainsi nous pouvons mettre le même objet à la fois dans la partie mathématique et dans celle qui est anthropologique. Par exemple, le concept d'aire a sa place dans la partie mathématique, mais il n'est défini pas en seconde c'est donc un préconstruit, membre de la partie anthropologique.

Partie anthropologique		**Objets particuliers**	**Partie mathématique**		
Substrat 2 **habiletés : Heuristique**	**Substrat 1**		**Techniques**	**Concepts (2)**	**Concepts (3)**
habiletés protomathématiques stratégies locales	**objets para mathématiques ostensifs culturels**				
Habileté épistémologique et cognitive **Os de cuvier pré mathématiques et obstacle épistémologique**	**Choses pré mathématiques**				

Tableau 1 : site local non rempli

Construction du site

La démarche pour construire le site local consiste à réaliser dans un premier temps une investigation dans les manuels anciens et nouveaux, puis de l'élargir à internet et aux articles de didactique. Cette recherche ne pouvant se faire dans le temps imparti à l'atelier, les participants avaient à leur disposition un document (annexe 1) composé de photocopies de pages de manuels anciens et actuels.

Pour remplir la colonne centrale des objets nous effectuons une lecture du texte du théorème en recherchant les différents objets ou choses présentes : *union, intersection, événement, nombre, addition, égalité, le code de la majuscule A* mentionnant un événement. Le mot *formule* indique un langage symbolique que l'on retrouve dans l'égalité avec la notation de l'union et de l'intersection. Ces objets en classe de seconde sont d'ordre culturel. Ils ne sont pas associés à la logique, notons que les *quantificateurs* sont absents de la formule. Nous les plaçons dans substrat 1.

Ce document présente deux démonstrations de manuels de seconde s'appuyant sur les diagrammes de Venn (dernière page de l'annexe). La première démonstration ne part pas de la formule, mais s'axe sur une égalité équivalente dont le premier membre est la probabilité de la réunion. Cette démonstration traite en premier lieu du cas où les deux événements sont incompatibles, pour ensuite passer au cas général. C'est un *raisonnement exhaustif* dénommé en mathématiques *méthode de disjonction des cas*. En poussant l'analyse, le traitement du premier cas sert de technique pour le second cas. Nous parlons alors de *raisonnements emboités* : le raisonnement emboitant utilise les conclusions du raisonnement emboité. Nous ajoutons à la colonne substrat 2 stratégies locales ces deux raisonnements. Lors de la démonstration de la deuxième partie, on utilise d'abord un côté de l'égalité, mais pour revenir dans la fin lors du calcul de p(A) à l'autre côté de l'égalité c'est donc un *raisonnement par chainage mixte*. La deuxième démonstration contourne la difficulté par un habile choix des notations des issues. Elle construit une partition de la réunion des deux événements A et B permettant d'exhiber chaque élément de la formule pour arriver à la démontrer. Elle justifie dans un cas particulier dans la première question l'axiome des probabilités totales pour le réutiliser plusieurs fois. Mais dans le calcul de p (AUB) elle le généralise. Utilisant les deux côtés de l'égalité, elle emploie un raisonnement par chainage mixte. La technique utilisée dans ces deux démonstrations se compose du sens intrinsèque de la probabilité d'un événement et des propriétés de l'addition et de l'égalité. Ces deux démonstrations passent sous silence la notion de cardinal. Elles s'établissent sur le résultat suivant donné pour évident : pour tout couple (A, B) d'ensembles finis avec $A=\{x_1 ;\ldots ; x_p\}$ et $B= \{y_1 ;\ldots ; y_n\}$ sans élément commun, leur réunion est l'ensemble fini $\{x_1 ;\ldots ; x_p ; y_1 ;\ldots ; y_n\}$. Elle introduit la notion de *différence* $A\backslash B$ de l'ensemble A et de l'ensemble B (ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B) sans la définir.

Que faut-il retenir comme amorce de la démonstration ? Nous reprenons alors le concept de l'os de Cuvier. Cuvier étant un célèbre paléontologue qui à partir d'un os d'un mastodonte recomposa le squelette entier. Le texte du théorème peut déclencher l'intuition de la démonstration, une vision qui permet l'organisation. L'organisation d'une des démonstrations se réalise par le biais d'analyse du *diagramme de Venn* ainsi que pour la première démonstration par un raisonnement utilisant à la fois la disjonction des cas et l'emboitement. La deuxième s'appuie sur le calcul de chaque élément présent dans l'égalité.

Le manuel Cluzel et Vissio (1970) rappelle que la probabilité est une *mesure* en montrant que l'axiome des probabilités totales est vrai. Cela induit que la première démonstration se généralise à une mesure. Nous écrivons dans le concept 3 (ou théorie) la *théorie de la mesure* dans le tableau 2. La deuxième démonstration reste plus particulière.

Partie anthropologique		**Objets particuliers**	**Partie mathématique**		
Substrat 2 habiletés : Heuristique	**Substrat 1**		**Techniques**	**Concepts (2)**	**Concepts (3)**
Habiletés protomathématiques, stratégie locale **Décomposer** en une partition **Particulariser** en prenant deux événements incompatibles **Raisonnement exhaustif (Disjonction des cas)**	**Objets para mathématiques ostensifs, culturels** Diagramme de Venn et de Caroll Formule Code des lettres du langage ensembliste et probabiliste ou inclusif	*Nombres* *Addition* Égalité	Propriétés de l'égalité Equivalence Partition Ensemble disjoint	Corps des nombres réels	Axiomatique des nombres
Habileté épistémologique et cognitive **Os de cuvier pré mathématiques et obstacle** **Utiliser un changement de cadre** : probabilité ensemble **Changement de registre :** diagramme de Venn **Bricoler** : raisonnement par chaînage mixte, raisonnements emboités	**Choses pré mathématiques** Partition quantificateur cardinal Notation : union intersection Différence A\B	**Probabilité** **Evénement** **Réunion** **Intersection**	Probabilité de deux événements incompatibles Réunion de deux événements incompatibles Définition de la probabilité Conjonction « ou » et « et »	Axiomatique de Kolmogorov Mesure	Théorie de la mesure

Tableau 2 : Site local

Discussion

Pour clôturer notre atelier nous pointons alors les différents apports de l'activité construction du site local d'un théorème à la formation initiale des professeurs par retour d'expériences. Nous suivons l'ordre de la construction du site local effectuée dans le paragraphe précédent.

Pourquoi « le site » ?

Erdogan a choisi l'appellation site en référence au site archéologique. De nouvelles fouilles sur un site archéologique apportent son lot de surprises renouvelant les connaissances antérieures. Par analogie, tout site peut être remodelé dans une analyse plus fine. Le rapport des étudiants à leur production de site est marqué par cette caractéristique. Ils peuvent considérer que leur production est acceptable à un certain degré d'analyse.

Quel rôle attribuer aux objets ?

La recherche d'objets permet de poser la question de la définition des mots du théorème. C'est ce que retient un des étudiants interrogés, ce mot est-il défini pour les élèves ou est-il préconstruit ? Selon lui, la décomposition des termes qui composent le théorème permet de comprendre son sens.

Quel rôle attribuer à la construction de la partie mathématique du site ?

La construction de la partie mathématique du site permet de comprendre une démonstration en la validant par une justification ascendante dans l'univers mathématique du secondaire, de licence et de master un. Ainsi elle relie la formation universitaire à celle du secondaire. Acteurs de la démonstration, les différents concepts sont recherchés. Cette recherche permet aux futurs professeurs de s'interroger sur la démonstration en pointant les objets mathématiques visibles ainsi que ceux cachés. Au cours d'entretiens filmés avec les étudiants ils émettent l'hypothèse suivante l'activité construction du site d'un objet du programme de secondaire devrait être une activité présente dans une préparation du CAPES. Nous précisons : cette construction permet de revisiter les mathématiques de licence et de secondaire en apprenant quelque chose de nouveau.

Quel obstacle à l'utilisation du site ?

L'investigation dans les manuels et dans les articles de didactique est une pratique retenue par certains étudiants ayant le CAPES pour enrichir leur préparation de cours lors de leur stage. En contrepartie, cette recherche est chronophage et peut alors représenter un obstacle à l'utilisation du site.

Quels apports à la formation des professeurs de la construction de la partie anthropologique ?

La construction de la partie anthropologique interroge en premier lieu l'élaboration de la conjecture, phase précédente à la démonstration. Dans ce cadre, elle fait appel à la ruse, à la métis moteur de l'intuition. Les étudiants de master de l'ESPE de Guadeloupe ont découvert qu'ils doivent faire un choix d'énoncé du théorème visé. Nous illustrons ce fait par l'exemple du théorème de Pythagore dont l'énoncé s'est épuré (Silvy & Mercier, 2015) aujourd'hui de toute référence à l'aire de carré. Or l'aire est la technique utilisée dans la démonstration de ce théorème. Le théorème analysé dans cet article répète ce cheminement. Deux questions en ressortent : faut-il donner des éléments heuristiques appartenant à la phase conjecture dans une démarche introductive au concept de mesure ? Ou faut-il choisir un texte plus symétrique comme celui des programmes et favoriser un raisonnement axé sur un calcul ? Les étudiants se questionnent sur le choix du texte du théorème. Ils apprennent que le texte d'un théorème varie selon les époques, que l'aspect heuristique pris au sens d'apport à l'intuition dépend de la formulation d'un théorème. Ainsi, les deux textes présentés dans la dernière page de l'annexe n'ont pas la même épaisseur heuristique. Du côté de l'enseignant, cette compétence associée au choix de formulation doit être travaillée en formation initiale. Après ou pendant l'écriture du théorème se pose la question du choix de la stratégie de démonstration. Ce choix permet de discuter sur la question des méthodes : sont-elles disciplinaires ou interdisciplinaires ? Les réponses permettent de rappeler que les mathématiques sont au carrefour d'autres disciplines. Si nous la dénommons recherche exhaustive ou démarche exhaustive, elle devient alors commune à plusieurs disciplines. Dans les démonstrations de l'annexe, le schéma de la disjonction des cas n'apparait pas clairement. Par exemple dans la dernière page de l'annexe après avoir démontré l'égalité pour deux événements incompatibles on parle de « cas général ». Ici, la méthode est pensée comme particularisation puis généralisation. Cette méthode heuristique reste chère à Polya. Cette partie interroge aussi des choses pour les élèves qui deviendront des objets mathématiques dans un avenir proche : des concepts en devenir, par exemple la notion de partition. Certains étudiants rappellent que se mettre à la place des élèves est une nouvelle pratique qui leur semble intéressante.

Conclusion

En conclusion,, la demande est toujours forte de délivrer des recettes, modèle « prêt à l'emploi ». La question revient souvent autour de la « correction » du site comme s'il existait une réponse exhaustive et unique. Or nous avançons le postulat que c'est l'engagement dans la démarche de construction du site qui révèle, transforme, élabore, les compétences de l'enseignant. Il s'agit quelque part pour le professeur de travailler sur son propre site archéologique personnel et pour reprendre Erdogan, par la surprise de nouvelles connaissances, renouveler les antécédentes. Par là même, nous touchons directement à « l'autonomie d'enseigner ». Chère à toute la profession dans la mesure où le vécu l'expérience, la mémoire et le potentiel de chacun se révèlent uniques en son genre à un moment donné, se révéleront sans doute différents à un autre moment, la construction de l'enseignant est en marche.

Bibliographie

Bouligand, G. (1966). Introduction à la pensée créatrice de Jacques Hadamard (1865-1963). Le qualitatif et le global dans son œuvre géométrique. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 19(3), 247-265.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée Sauvage (2éme édition augmentée : 1991).

Conne F. (1992). *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 12/2.3, p. 221-271. La Pensée sauvage : Grenoble.

Duchet, P. & Erdogan, A. (2005). *Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis*. In Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (Ed. Bosch), 663-674. Publication électronique 2006.

Lakatos, I., Zahar, E., & Worall, J. (2004 [1984]). *Preuves et Réfutations : Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann.

Legrand M., Lecorre, T., Leroux L & Parreau, A. (2006) *Le principe du « Débat Scientifique »*, IREM de Grenoble. Publication électronique. Disponible à l'adresse suivante : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/debat_s_prinb08a.pdf (Consulté le 01/10/2014).

Poincarre, H. (1905 [1902]). *La Science et l'Hypothèse*. Paris : Flammarion.

Polya, G. (1965). *Poser et résoudre un problème*. Paris : Dunod.

Silvy C., Delcroix A. & Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de « pedagogical content knowledge », interrogée à partir du « site local d'une question ». *Éducation et didactique*, 7.1, 33-58.

Silvy C. & Mercier, A. (2015). *Sens profond des notions présentes au secondaire une question pour la formation initiale du professeur*. Soumis.

Thom, R. (1970) Les mathématiques modernes une erreur pédagogique et philosophique ? *L'âge de la science*. Publication électronique. Disponible à l'adresse suivante : http://gaogoa.free.fr/HTML/Textes/Les%20Mathematiques%20Modernes%20par%20R.THOM.pdf (consulté le 28/10/2015)

Annexe 1 : intuition profonde

Programme BO n30 du 23 juillet 2009

Probabilité sur un ensemble fini
Probabilité d'un événement.
Réunion et intersections de deux événement, formule : $p(A\cup B)+ p(A\cap B)=p(A)+p(B)$

Ressource pour la classe de seconde. Notations et raisonnement :

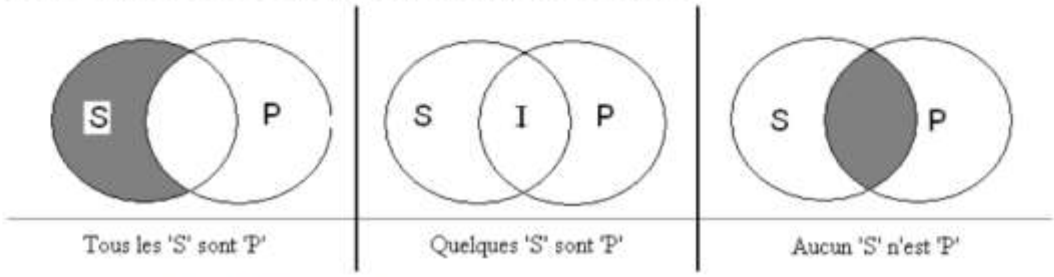
Les symboles d'union et intersection sont introduits en liaison avec les conjonctions « ou » et « et », en comparant leur sens mathématique avec leur usage dans la langue courante.
On pourra utiliser des diagrammes de Venn qui permettent de mieux visualiser les ensembles.
La formule pourra être illustrée par un diagramme de Venn

Diagrammes de Venn [modifier | modifier le code]

Un siècle plus tard, John Venn (1834-1923) opéra plusieurs modifications importantes dans la représentation eulérienne des attributs :

- remplacement des cercles par des courbes fermées *simples* (sans points doubles, par exemple des ellipses) ;
- utilisation dans tous les cas d'une unique représentation pour chaque ensemble de *n* attributs, dans laquelle toutes les conjonctions possibles *p* à *p* des attributs existent ;
- coloration (grisé ou hachures) des régions connues comme « vides » (conjonctions qu'on sait impossibles) ;
- indication par un signe graphique des régions connues comme « non vides » (conjonctions qu'on sait possibles).

Ainsi les trois configurations d'Euler pour le cas de deux attributs deviennent :



Venn pouvait représenter toutes les configurations associées à quatre attributs, voire cinq en trichant quelque peu avec ses principes (une zone centrale devait être considérée comme « extérieure »). Sa méthode fut étendue un siècle plus tard à six attributs par A. W. F. Edwards dans son livre *Cogwheels of the Mind*. Les diagrammes qui suivent sont créés à partir de ses travaux :

Figure 1 : http://fr.wikipedia.org/wiki/Diagrammes_d%27Euler,_de_Venn_et_de_Carroll

Lien entre la probabilité de l'union et celle de l'intersection de deux événements

Enoncé du théorème

$$\forall A,\ \forall B,\ P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$$

Démonstration $A \bigcup (B \bigcap \overline{A}) = A \bigcup B$ et $A \bigcap (B \bigcap \overline{A}) = \emptyset$,

donc $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B \bigcap \overline{A})$.

Or $P(B) = P(B \bigcap A) + P(B \bigcap \overline{A})$, donc, directement,

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$. **Remarque** On pourra constater cette propriété sur les exercices 2.5.4. et 2.5.5.

Figure 2:http://vekemans.free.fr/Proba/node24.html

2

2. PROBABILITÉS ET ESPACES PROBABILISÉS

Définition d'une probabilité

Soit Ω un univers, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et p une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}_+$ (ensemble des réels positifs) (fig. 1).

On dit que l'**application p est une probabilité sur Ω si les deux conditions suivantes** (axiomes) **sont vérifiées :**

1° **l'image de Ω est** 1; c'est-à-dire $p(\Omega) = 1$;

2° **quels que soient deux événements de Ω, incompatibles, la probabilité de leur réunion est égale à la somme des probabilités des deux événements,** c'est-à-dire :

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $[A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)]$ est vraie

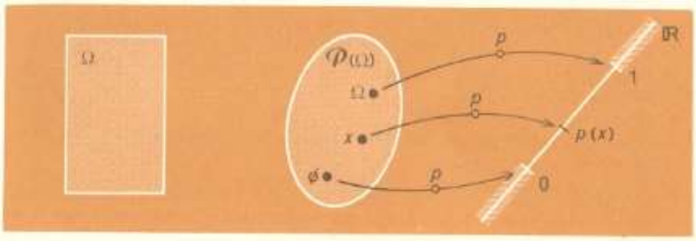


Fig. 1.

REMARQUES

1° Il faut remarquer l'emploi, dans deux acceptions différentes; du mot **« probabilité »**. D'une part, il s'agit de l'application p ; d'autre part, la probabilité de l'événement A est $p(A)$, c'est-à-dire **l'image de A par l'application p.** Le contexte permet, en général, de distinguer ces deux acceptions.

2° Nous avons mis en forme les conditions trouvées intuitivement dans le paragraphe précédent, à savoir :

a) *la probabilité d'un événement est un nombre positif ou nul;*

b) *la probabilité du certain est 1;*

c) *la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est la somme des probabilités de ces deux événements.*

Cette dernière condition porte le nom d'**axiome des probabilités totales.**

3° L'axiome des probabilités totales peut aussi se noter :

$\forall A \subset \Omega, \forall B \subset \Omega,$ $[A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)]$ est vraie

4° **Probabilité et mesure.**

— Il se trouve que de nombreuses applications d'une famille d'ensembles vers $\mathbb{R}_+$ vérifient la condition précédente.

Par exemple, si E est un ensemble fini, l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$, qui à tout sous-ensemble de E fait correspondre son nombre cardinal (le nombre de ses éléments), vérifie :

$A \subset E,\ B \subset E,\ A \cap B = \emptyset$ $\vdash$ $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$

— Par définition, toute application m d'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles, dans $\mathbb{R}_+$ est une *mesure sur* $\mathcal{F}$ si :

- $\forall A \in \mathcal{F},\ \forall B \in \mathcal{F},\ A \cup B \in \mathcal{F}$
- $(A \cap B = \emptyset) \vdash [m(A \cup B) = m(A) + m(B)]$

Ainsi, sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini, l'application $A \longmapsto \mathrm{Card}\,(A)$ est une mesure.

— Entrent, dans cette catégorie d'applications, les longueurs, les aires, les volumes.

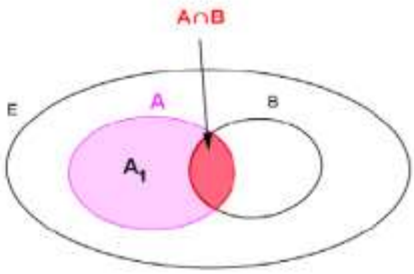
— L'axiome des probabilités totales est donc l'affirmation qu'une probabilité est une mesure sur l'ensemble Ω des événements. Et c'est parce que la probabilité est une mesure que nous retrouverons (cf. § 3) certaines des propriétés communes à toutes les mesures, en particulier à *Card*.

Figure 3 : Cluzel, R. & Vissio P. (1970) Statistique et probabilités. Paris : Delagrave.

Démonstration :

On note A_1 l'événement formé des issues réalisant A qui ne sont pas dans B.
A_1 et B sont incompatibles et
$A_1 \cup B = A \cup B$ donc :
$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A_1) + p(B)}$

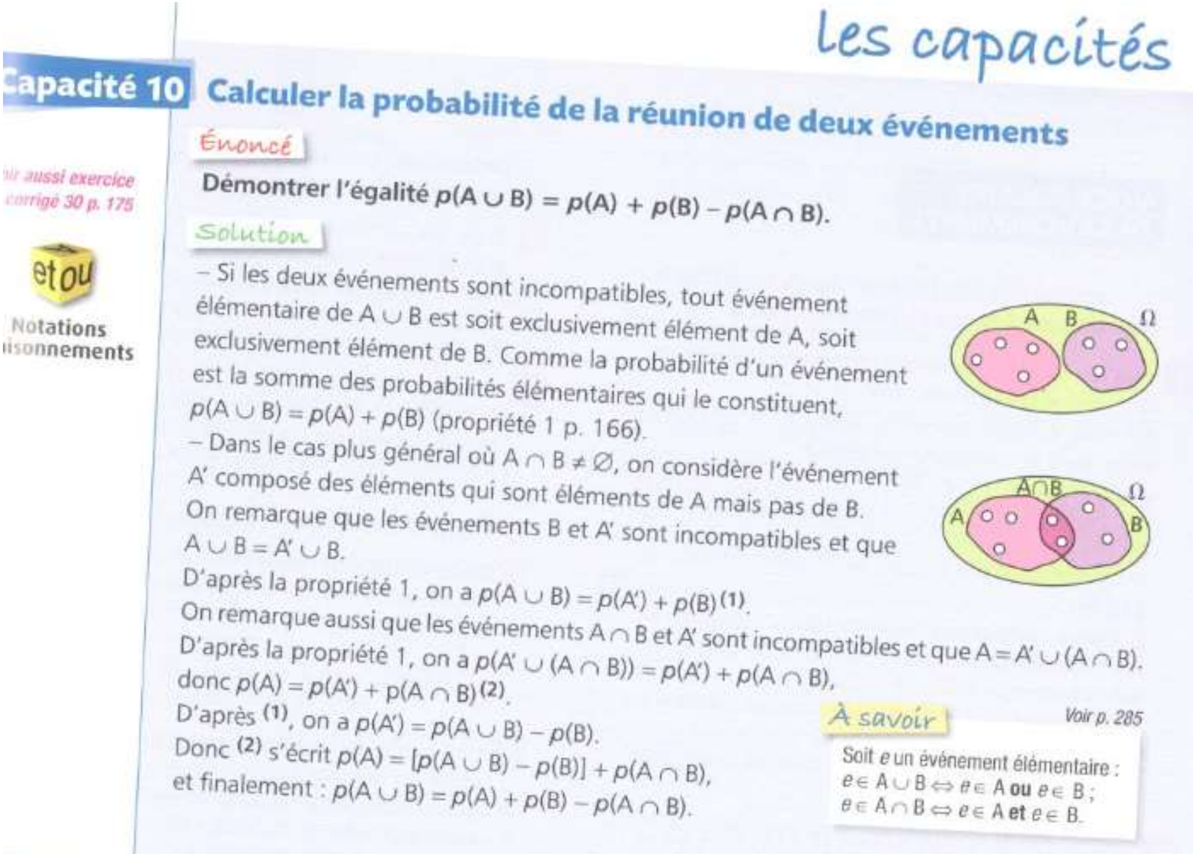
A_1 et $A \cap B$ sont incompatibles et
$A_1 \cup (A \cap B) = A$ donc :
$\boldsymbol{p(A) = p(A_1) + p(A \cap B)}$



Avec les deux égalités notées en gras on obtient :
$\boldsymbol{p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(B) + p(A \cap B)}$
$\boldsymbol{p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(A \cap B) + p(B)}$
d'où:
$\boldsymbol{p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)}$

Figure 4 : http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB4QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.parfenoff.org%2Fpdf%2Fseconde%2Fstatistiques%2F2de_C

alcul_probabilites.pdf&ei=8XlwVaq8A4yUNsqxgMAI&usg=AFQjCNHIGCUSBA2s1dpun0MAbeqtG2YRdA&sig2=3NfkDeJqFDp7


les capacités

Capacité 10 Calculer la probabilité de la réunion de deux événements

Voir aussi exercice corrigé 30 p. 175

et ou Notations raisonnements

Énoncé

Démontrer l'égalité $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Solution

– Si les deux événements sont incompatibles, tout événement élémentaire de $A \cup B$ est soit exclusivement élément de A, soit exclusivement élément de B. Comme la probabilité d'un événement est la somme des probabilités élémentaires qui le constituent, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (propriété 1 p. 166).

– Dans le cas plus général où $A \cap B \neq \varnothing$, on considère l'événement A' composé des éléments qui sont éléments de A mais pas de B. On remarque que les événements B et A' sont incompatibles et que $A \cup B = A' \cup B$.

D'après la propriété 1, on a $p(A \cup B) = p(A') + p(B)$ (1).

On remarque aussi que les événements $A \cap B$ et A' sont incompatibles et que $A = A' \cup (A \cap B)$.

D'après la propriété 1, on a $p(A' \cup (A \cap B)) = p(A') + p(A \cap B)$,

donc $p(A) = p(A') + p(A \cap B)$ (2).

D'après (1), on a $p(A') = p(A \cup B) - p(B)$.

Donc (2) s'écrit $p(A) = [p(A \cup B) - p(B)] + p(A \cap B)$,

et finalement : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

À savoir Voir p. 285

Soit e un événement élémentaire :

$e \in A \cup B \Leftrightarrow e \in A$ **ou** $e \in B$;

$e \in A \cap B \Leftrightarrow e \in A$ **et** $e \in B$.

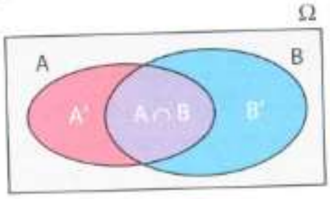
Figure 5:Deschamps et al (2009). Maths 2°. Paris Belin p171

Propriété Soit A et B deux événements alors p$(\bar{A}) = 1 - p(A)$ et $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Si A et B ne peuvent être réalisés en même temps, A et B sont incompatibles. Dans ce cas $p(A \cap B) = 0$ d'où $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

41 $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
A et B sont deux événements.



On désigne par **A'** l'ensemble des issues $x_1, \dots, x_p$ de A qui ne sont pas dans B et par B' l'ensemble des issues $z_1, \dots, z_n$ de B qui ne sont pas dans A.
On note $y_1, \dots, y_q$ les issues qui réalisent **A∩B**.

1. Expliquer pourquoi
$p(A) = p(x_1) + \dots + p(x_p) + p(y_1) + \dots + p(y_q)$

2. Écrire de même $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

3. Comparer les sommes :
$p(A) + p(B)$ et $p(A \cup B) + p(A \cap B)$.
Conclure.

Figure 6 : Chesné et al (2010). Math'x. Paris : Didier. P 21