ENJEUX DE LOGIQUE ET DE RAISONNEMENT AU CROISEMENT DES CADRES ET DES REGISTRES A PROPOS DES EQUATIONS DE DROITES

Véronique Cerclé, Aurélie Chesnais, Emeric Gosselin, Jérôme Leberre, Louise Nyssen

Résumé. Les équations de droites sont un objet emblématique de l'entrée dans la géométrie repérée en seconde, objet charnière entre différents thèmes du programme, à la croisée de différents cadres et registres. L'article présente la réflexion menée au sein du groupe IREM Didactique de Montpellier d'une part sur les articulations possibles des différents contenus en seconde autour de l'objet « équations de droites », d'autre part sur les difficultés des élèves en lien avec cet objet, à partir des résultats d'expérimentations menées dans des classes de seconde.

Introduction

Les équations de droites sont un objet emblématique de l'entrée dans la géométrie repérée en seconde, objet charnière entre différents thèmes du programme (vecteurs, fonctions affines, algèbre, géométrie), à la croisée de différents cadres et registres.

D'un point de vue logique, la définition correcte d'une équation de droite est complexe, mais le travail sur cet objet peut être l'occasion d'enrichir la conception que les élèves ont, non seulement des fonctions affines, mais aussi, d'une part, des équations, d'autre part, des droites et des objets géométriques en général. En faisant le lien entre les deux, il permet de travailler sur les principes de base de la géométrie repérée, notamment la bijection entre l'ensemble des points du plan et R^2.

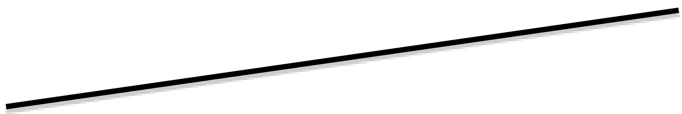
Le travail mené au sein du groupe IREM Didactique de Montpellier concernant les équations de droites nous a amenés à élaborer un certain nombre d'hypothèses explicatives du fait que les équations de droites sont un objet qui semble poser beaucoup de difficultés aux élèves de seconde. En effet, l'association dans la même expression des mots « équation » et « droite » peut être déstabilisante pour des élèves, dans la mesure où ces deux mots renvoient à des domaines des mathématiques (géométrie et algèbre) jusque-là relativement « étanches ». De la même manière, le travail sur les équations de droites nécessite l'articulation de différents registres (graphique, algébrique) et différents cadres (géométrie « classique », géométrie repérée, analyse, algèbre) et différents regards (syntaxique et sémantique). Il s'agit aussi de mobiliser différents objets jusque-là travaillés séparément : vecteurs, équations, fonctions (affines et autres), droites … Notamment, pour une équation de droite donnée, de nombreux objets y sont associés : une fonction, une droite, un/des points, un ensemble de points, des coordonnées, un graphe, un coefficient directeur, une ordonnée à l'origine etc. Enfin, s'associent à ces difficultés liées au fond des difficultés plus formelles – y compris langagières – et techniques. Ces considérations font que les équations de droites constituent selon nous en seconde non seulement une source de difficultés pour les élèves, mais aussi et surtout une occasion d'enrichir les conceptions des élèves en ce qui concerne tant les équations que les droites.

Nous présentons ainsi dans cet article les premiers résultats du travail du groupe IREM Didactique de Montpellier de ces deux dernières années. Dans une première partie, nous exposons les différentes articulations possibles des contenus du programme de seconde (vecteurs, fonctions, fonctions affines, équations et équations de droites) autour de l'objet « équations de droites ». Puis nous exposons les premiers résultats des expérimentations menées dans des classes de seconde à partir d'un questionnaire que nous avons élaboré.

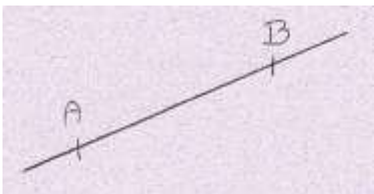
Les organisations des savoirs en seconde autour des équations de droites

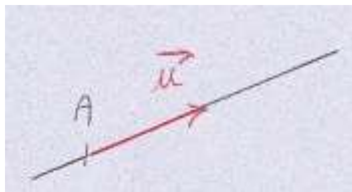
Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, les équations de droites sont liées à plusieurs thèmes du programme de seconde : vecteurs, généralités sur les fonctions, fonctions affines, équations. Nous nous interrogeons ici sur une articulation de ces contenus conciliant la cohérence mathématique (modèle axiomatico déductif) et les choix d'enseignement. Cela nous amène à nous questionner sur la cohérence mathématique sous-jacente aux différents choix de progressions possibles.

Lorsqu'on veut parler de droite, on peut commencer avec une fonction affine, on écrit alors $f(x)=mx+p$ ou avec une équation, qu'on écrira $y=mx+p$. Ce sont deux objets analytiques, et chacun d'entre eux est donné par le couple de nombres (m,p). On peut aussi commencer directement avec l'objet géométrie 'droite'.

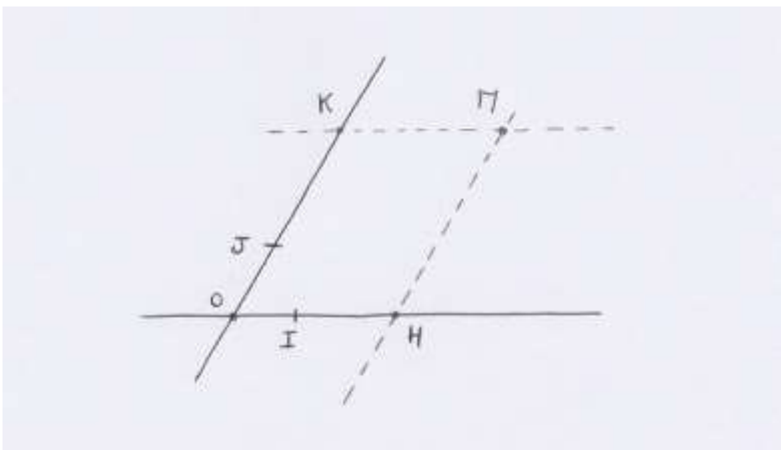


Elle peut être donnée par deux points, ou par un point et un vecteur.





Pour faire le lien entre ces différents objets, on a besoin d'introduire un repère du plan. Cet objet paraît très simple : il suffit de choisir 2 droites sécantes et graduées.



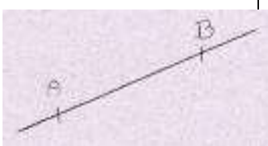
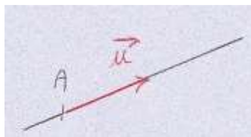
Cet objet si simple fournit deux bijections qui sont essentielles pour faire le lien entre les aspects géométriques et les aspects algébriques : une bijection entre le plan affine (c'est-à-dire le plan vu comme ensemble de points) et $\mathbf{R}^2$, l'autre entre le plan vectoriel (c'est-à-dire le plan vu comme ensemble de vecteurs) et $\mathbf{R}^2$. Plan affine et plan vectoriel sont des structures très riches, on utilise de nombreux axiomes pour les définir. Le repère est-il aussi simple qu'il le paraît ? En réalité, il cache de nombreux concepts et utilise des propriétés importantes : tout d'abord, le repère est fabriqué avec deux *droites, sécantes* et *graduées* : il faut donc savoir ce qu'est une droite et comment la graduer – c'est-à-dire la mettre en bijection avec **R**. Il faut également disposer de la notion de *droites sécantes*. Ensuite, pour repérer un point, on utilise la notion de *droites parallèles* (à définir, en même temps que *droites sécantes*) et les deux propriétés suivantes

- Etant donnés un point A et une droite D, il existe une unique droite issue de A et parallèle à D.
- Etant données deux droites parallèles D1 et D2, une troisième droite est parallèle à D1 si et seulement si elle est parallèle à D2.

Définir une droite, la graduer, s'interroger sur les positions relatives de deux droites, étudier les première propriétés du parallélisme : voilà qui nous rapproche d'une l'axiomatique de la géométrie «à la Euclide». Nous y reviendrons mais, pour le moment, revenons à notre repère du plan. Il permet d'établir un lien entre le plan et $\mathbf{R}^2$: à un point on associe ses coordonnées. En utilisant la propriété de Thalès, ou la caractérisation vectorielle d'une droite, il est possible de démontrer deux propriétés

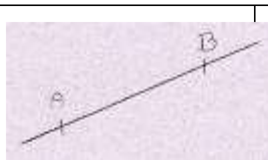
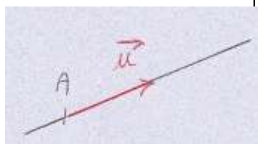
- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite
- Une droite qui n'est pas verticale admet une équation de la forme y=mx+p

On obtient ainsi le lien entre les différents objets à définir. Si on essaie de les ranger en fonction du domaine auquel ils appartiennent, on obtient un tableau comme ceci.

Monde analytique	Choix d'un repère	Monde géométrique : points	Monde géométrique : vecteurs
Fonction affine f(x)=mx+p Equation y=mx+p	Représentation graphique de la fonction $\longrightarrow$ Equation de la droite $\longleftarrow$	Droite donnée par deux points 	Droite donnée par un point et un vecteur 

Pour développer un peu, on peut se demander comment une même propriété se décline dans les différents domaines. Par exemple, comment voit-on que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés ? On obtient un tableau comme celui ci

Monde analytique	Choix d'un repère	Monde géométrique : points	Monde géométrique : vecteurs
Fonction affine f(x)=mx+p	Représentation graphique de la fonction	Droite donnée par deux points	Droite donnée par un point et un vecteur

Equation y=mx+p	Equation de la droite		
Deux droites sont parallèles si elles ont même coefficient directeur		Deux droites sont parallèles si elles ne se rencontrent pas, ou si elles sont confondues	Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
Trois points de coordonnées (x_A,y_A), (x_B,y_B) et (x_C,y_C) sont alignés si $(x_C-x_A)(y_B-y_A)$ $=$ $(x_B-x_A)(y_C-y_A)$		Trois points A,B,C sont alignés si C appartient à la droite (AB)	Trois points A, B, C sont alignés si les vecteurs et sont colinéaires

L'objectif de l'enseignant est d'aborder toutes les cases de ce tableau. Comment organiser un cours cohérent ? Il est important de savoir ce qu'on a choisi comme axiome, ce qu'on a choisi comme définition, ce qu'on peut démontrer et ce qu'on démontre effectivement.

Suivant les choix que l'on fait, certaines cases apparaitront comme des propriétés ou comme des définitions. On peut par exemple affirmer que deux droites sont parallèles parce que

- elles ne se rencontrent pas (point de vue de la géométrie affine)
- elles ont des vecteurs directeurs colinéaires (point de vue algèbre linéaire)
- elles ont même coefficient directeur (point de vue analytique)

Il faut choisir une de ces assertions comme définition et les autres comme propriétés. Le choix est *a priori* arbitraire, mais il faut que les différents choix soient cohérents entre eux. C'est-à-dire qu'il faudrait, dans le tableau, choisir une colonne privilégiée, à partir de laquelle on déduit ce qui se passe dans les autres colonnes. Tout ceci revient à choisir ce qu'Aline Robert (2003) appelle un *niveau de conceptualisation*.

Niveaux de conceptualisation

Dans son article de 2003 paru dans la revue *Petit x*, Aline Robert écrit : «Un niveau de conceptualisation en géométrie caractérise un domaine assez important, relativement auto-consistant, cohérent, enseigné ou pouvant être enseigné, au moins en partie. Il est spécifié par

- des fondements, qui peuvent rester implicite mais qui peuvent être dégagés
- un corps de définitions, théorèmes, propositions
- des modes de raisonnement, des démarches et un niveau de rigueur,
- et enfin un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein.»

Ainsi, chaque niveau a son organisation logique propre : un système d'axiomes et de définitions permet de démontrer les propriétés et les théorèmes, sans en oublier et sans faire de cercle vicieux. Le mélange, généralement implicite, de différents niveaux, est source de confusion : telle propriété deviendra un axiome dans un autre niveau, et on risque fort d'introduire des cercles vicieux.

On peut distinguer ici deux niveaux de conceptualisation :

- La géométrie «à la Euclide», qui est pratiquée au collège : on définit le plan affine par une série d'axiome. Il est possible d'écrire une axiomatique «à la Euclide» du plan qui fournit une base cohérente pour la géométrie de l'enseignement secondaire, surtout au collège. On ne peut pas l'enseigner, mais elle fournit un fil conducteur utile. Par ailleurs, les axiomes correspondent si bien à l'intuition qu'on a des objets qu'ils peuvent rester implicites pour les élèves. Choisissant le niveau de conceptualisation «à la Euclide» on va privilégier, pour les axiomes et les définitions, la colonne du monde géométrique affine.
- La géométrie «affine-euclidienne» qui est pratiquée dans le supérieur mais qui fait des incursions au niveau du lycée sous forme de géométrie analytique. On privilégie l'approche par les espaces vectoriels, et les aspects algébriques de la géométrie.

Le programme officiel demande que les élèves sachent choisir une méthode adaptée pour résoudre un exercice : géométrique, analytique, algébrique …. Il est donc important qu'ils soient conscients de cette multiplicité de points de vue et qu'ils sachent s'y retrouver.

Résultats d'un questionnaire proposé à des élèves de seconde sur les équations de droites

Une équation d'une droite est une caractérisation algébrique des coordonnées des points appartenant à la droite. Autrement dit, les solutions de l'équation sont les couples de nombres qui sont les coordonnées des points de la droite.

Cela repose sur des conceptions :

- D'une équation comme pouvant avoir plusieurs inconnues et une infinité – ce qui ne signifie pas pour autant tous les nombres – de solutions, ainsi que comme une relation algébrique caractérisant un ensemble de nombres / de points.
- Des notions d'inconnues, variables et paramètres qui vont entrer en jeu.
- De la droite comme un ensemble de points
- Du point comme pouvant être assimilé à un couple de coordonnées
- De nombres comme pouvant être représentés graphiquement (sur une droite graduée, sur un repère).

Nous avons donc élaboré un questionnaire[1] afin d'explorer les conceptions des élèves en lien d'une part avec la notion d'équation (incluant la notion d'inconnue, variable et paramètre), d'autre part celles liées aux notions de droites et points, enfin celles qui nous semblent spécifiques de l'articulation de différents cadres et registres. Nous présentons ici les premiers résultats de l'expérimentation du questionnaire dans quelques classes d'un lycée du centre-ville de Nîmes, dans le courant de l'année 2014-2015. Il s'agit d'un établissement à dominante technologique, offrant en formation les filières STI2D et S exclusivement, et fréquenté ultra-majoritairement par des garçons.

Les conceptions des élèves en lien avec la notion d'équation

La notion d' « équation » en jeu lorsque l'on considère des équations de droites est-elle compatible avec la conception que les élèves ont des équations à l'entrée en seconde ? Nous

[1] Pour certaines questions, nous nous sommes inspirés de tâches proposées dans Irem de Strasbourg (1990) et dans le mémoire professionnel de De Saint Julien (2002).

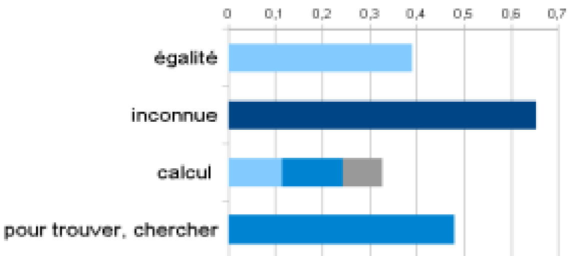
avons cherché à préciser en quoi les conceptions des élèves à propos de la notion d'équation pouvaient faire obstacle à la notion d'équation de droite.

L'équation de droite, une équation « qu'on ne résout pas »

Une équation de droite n'est pas une équation qu'on « résout », au sens que cela peut prendre au collège. Il faut donc pouvoir envisager l'équation comme un objet et non comme une procédure.

- équation comme objet : l'élève peut décrire la forme que présente cet objet (une égalité comportant une ou plusieurs indéterminées). Le nombre de solution est indifférent (aucune, une, plusieurs, une infinité, tous).
- équation comme procédure : l'élève associe l'équation à l'action de la résoudre.

Afin d'évaluer cette capacité, nous avons proposé la question suivante : « Qu'est-ce qu'une équation ? Tu peux expliquer à partir d'un exemple. » Nous avons dépouillé les réponses des élèves en recensant les mots utilisés. Les résultats sont représentés dans le diagramme suivant (les nombres correspondent aux proportions, parmi les 186 élèves ayant répondu à la question).



La référence à une égalité donnée par environ 40% des élèves indique clairement la forme attendue de l'objet. Inversement, les expressions « pour trouver » ou « chercher » présentes dans 50% des réponses évoquent clairement la procédure, l'action à réaliser sur une équation. En revanche le mot « inconnue » (2/3 des réponses) peut renvoyer soit à l'objet (dans le sens d' « indéterminée », de « variable ») soit à la procédure (« nombre à trouver à l'issue de la résolution ») ; il est donc difficile à interpréter. De même le mot calcul n'est pas utilisé dans le même sens par tous les élèves : 10% l'emploient pour évoquer la forme (2x+3 est un « calcul »), 10% l'emploient en tant que procédure (la résolution est un « calcul »), pour les autres 10% il est difficile de trancher.

La synthèse des réponses à cette première question fait finalement apparaitre que la moitié seulement des élèves a pu définir l'équation comme un objet dont ils décrivent la forme ; pour l'autre moitié, seul le côté « procédure » est évoqué.

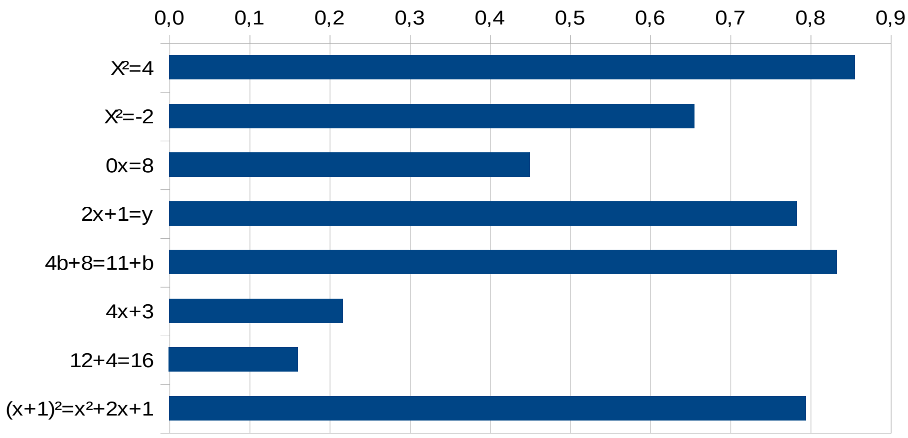
L'équation de droite, une équation à plusieurs inconnues et plusieurs solutions

Une deuxième difficulté peut venir du fait que les équations rencontrées au collège ont en général une seule inconnue, x le plus souvent, et une ou deux solutions (équations du premier ne conduisant pas à $0x$=k ou équations du second degré de type x^2=k ou produit-nul). Or ces caractéristiques ne sont pas pertinentes face aux équations de droites. La deuxième question du questionnaire vise à étudier ce problème :

Dans le tableau suivant : coche la case si tu penses que la phrase est vraie, ou réponds à la question.

	C'est une équation	Ce n'est pas une équation	Il y a une seule solution	Il y a plusieurs solutions	Je ne trouve pas ses solutions	Il n'y a pas de solutions	Si tu penses que ce n'est pas une équation, justi la réponse
$x^2=4$							
$x^2=-2$							
$0x=8$							
$2x+1=y$							
$4b+8=11+b$							
$4x+3$							
$12+4=16$							
$(x+1)^2=x^2+2x+1$							

Voici les résultats, en proportion de réponse « oui » pour chaque question :



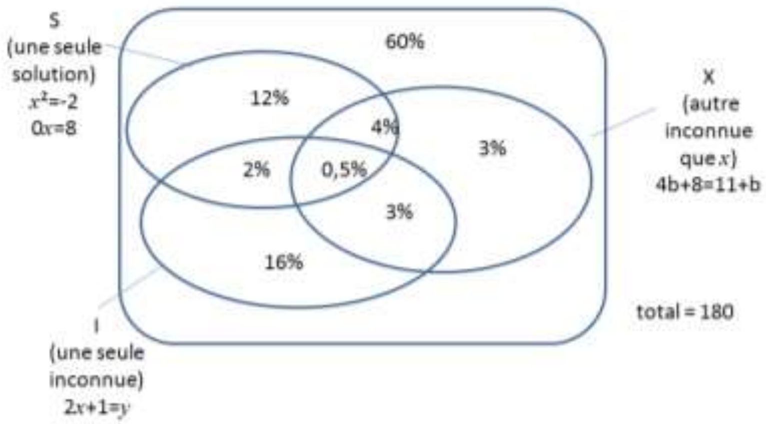
Etrangement, pour quelques élèves l'absence du signe « = » ne semble pas rédhibitoire : 20% acceptent $4x+3$ comme équation. L'absence d'inconnue est un critère plus sensible ; elle est pertinente pour 12+4=16, mais est également convoquée par 55% des élèves pour rejeter $0x=8$ (« il n'y a plus d'inconnue »). En revanche chacune des autres équations n'est rejetée que par moins d'un tiers des élèves. Autrement dit, d'une part le fait qu'il y ait deux inconnues ($2x+1=y$), le fait que l'inconnue ne s'appelle pas x (4b+8=11+b) n'empêche pas la grande majorité des élèves d'identifier une équation. L'égalité $(x+1)^2=x^2+2x+1$ visait à tester si les élèves acceptaient une identité (c'est-à-dire une équation admettant tout nombre comme solution) comme une équation ; cela semble être le cas, toutefois, rien ne permet d'affirmer que les élèves aient reconnu une identité et leur réponse n'est peut-être liée qu'à la forme (égalité avec x).

A partir de leurs réponses nous avons alors répertorié différents types d'élèves en regardant en quoi leur conception des équations peut faire obstacle à la notion d'équation de droite :

S : les élèves pour qui une équation doit avoir une (seule) solution, et qui rejettent à ce titre $x^2=-2$ ou $0x=8$

X : les élèves pour qui l'inconnue de l'équation doit se nommer x, et qui rejettent à ce titre *4b+8=11+b*

I : les élèves pour qui une équation doit avoir une seule inconnue, et qui rejettent à ce titre *2x+1=y*



Il apparaît que les conceptions de l'objet équation les plus éloignées de celles qui permettent de s'approprier les équations de droites ne sont pas si fréquentes. En particulier, très peu d'élèves ont une conception des équations se limitant aux égalités contenant *x* et admettant aucune ou une seule solution. Toutefois, 40 % des élèves ont une conception restreinte des équations.

Un nouveau regard sur les équations

L' « équation de droite » doit amener l'élève – et nous-mêmes – à re-questionner la notion d' « équation ». Or la notion de phrase ouverte, développée par Durand-Guerrier (1996) et appliquée par Kouki (2006) à la notion d'équation, nous parait pertinente :

Une **équation** est une phrase ouverte. Une phrase ouverte est une proposition qui met en jeu une (ou des) variables (indéterminée). Elle n'a donc pas *a priori* de valeur de vérité, elle peut être vraie pour certaines valeurs de la variable, fausse pour d'autres : la phrase ouverte « *x* est pair » où *x* est une variable libre est vraie pour 4, mais pas pour 3. Autrement dit, pour reprendre l'adjectif mis en avant par les travaux de Durand-Guerrier, une équation est une égalité contingente. Une **solution** d'une équation est un élément qui satisfait cette phrase ouverte. Étant donné un domaine d'objets, un élément de ce domaine satisfait la phrase ouverte lorsque la proposition obtenue en assignant cet objet à la variable devient une proposition vraie dans le domaine considéré. Etant donné un domaine d'interprétation, une phrase ouverte peut être satisfaite par certains éléments et pas par d'autre ; ou éventuellement satisfaite par tous les éléments du domaine, ou par aucun. Ainsi l'équation « $2x+1=3x$ » est vue comme la phrase ouverte «$2x+1=3x$ » où *x* est une variable libre, qui n'a pas de valeur de vérité ; elle est satisfaite par 1, mais pas par 3. Dans le cas d'une équation, une solution est bien une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité proposée est vraie. **Résoudre une équation** (dans un domaine donné), c'est en déterminer les solutions, autrement dit déterminer les valeurs qui satisfont la phrase ouverte.

La résolution convoque deux points de vue : le point de vue sémantique et le point de vue syntaxique qui portent deux types d'équivalence :

- une équivalence sémantique : deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments ;

- une équivalence syntaxique caractérisée par des règles de transformation algébriques.

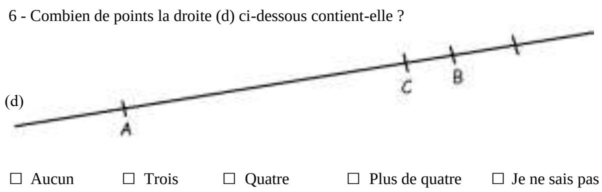
Le regard sémantique, centré sur les solutions, est particulièrement important pour comprendre la notion d'équation de droite, alors que la pratique du collège autour des équations privilégie le regard syntaxique, centré sur la « résolution algébrique » (Kouki 2006).

Regarder les équations comme une phrase ouverte a l'avantage d'articuler ces deux regards, articulation qui nous semble nécessaire à la compréhension de la notion d'équation de droite.

Les conceptions des élèves en lien avec les notions de droites et de points

Lorsqu'on considère une équation de droite, la droite est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation. Comprendre cela suppose de considérer une droite comme un ensemble de points. Mais est-ce une évidence pour les élèves de seconde ? Cette question nous amène également à tester la conception que les élèves de seconde ont du point ainsi que le rapport entre point et ligne.

La question 6 du questionnaire (cf. image ci-dessous) permet de tester si, pour les élèves, la droite est constituée d'une infinité de points, y compris lorsque ceux-ci ne sont pas « identifiés » par un trait sur la droite, voire s'ils ne sont pas nommés.

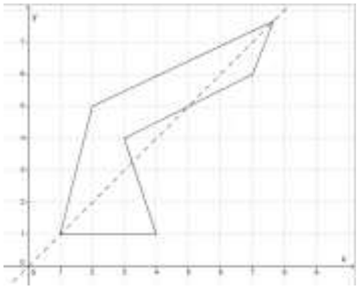


En proportion, sur les 180 élèves ayant répondu à la question, environ 39 % répondent « 3 points », 33 % répondent « 4 points » et 28 % répondent « plus de quatre », aucun ne répond « aucun » ou « je ne sais pas ». Selon les classes, la proportion d'élèves répondant qu'il y a plus de 4 points varie de 13 % à 42 %. Il existe une proportion importante des élèves pour qui seuls les points nommés sont considérés (jusqu'à 60 %).

Pour la majorité des élèves, un point « n'existe » que s'il est marqué, voire seulement s'il est nommé.

La question 11 (cf. image ci-dessous) vise à tester si les élèves sont capables d'identifier sur un repère cartésien des points ayant une ordonnée supérieure à 3 et notamment s'ils identifient correctement abscisse et ordonnée (les enseignants de seconde déplorent en général de nombreuses confusions). Mais il s'agit également de questionner à nouveau si les élèves considèrent qu'une ligne contient des points, même si ceux-ci ne sont pas « identifiés ». Notons que cela permet aussi de questionner leur conception d'un polygone : s'agit-il pour eux d'une surface ou seulement de la ligne constituant son contour, ou encore des deux ?

11 - Mets en rouge les points appartenant au polygone qui ont une ordonnée supérieure à 3.



Cette question n'a été proposée que dans 4 classes (113 élèves). Le taux de réussite varie de 25 % à 43 % selon les classes. Pour presque tous les élèves (de 89 % à 100 % selon les classes), le polygone est associé à la ligne, sans inclure l'intérieur. Quant au fait que la ligne est constituée de points, en moyenne sur les 4 classes, environ 36 % des élèves seulement repassent en rouge au moins une partie de la ligne, au-delà de points singuliers. Entre 43 % et 57 % des élèves ayant répondu à la question selon les classes ne considèrent que les sommets et environ 1 élève sur 10 ajoute aux sommets les points représentant des nœuds du quadrillage. Aucun ne marque en rouge des points « anonymes » de la ligne (sauf ceux ayant repassé la ligne en rouge).

La question 12 vise à identifier si les élèves sont capables d'identifier les points dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales dans un repère cartésien. Il s'agit non seulement là encore de tester leur connaissance des notions d'abscisse et d'ordonnée mais aussi la perception du point comme élément quelconque du plan et comme correspondant à un couple de nombres.

12 - Mets en rouge les points qui ont leur abscisse égale à leur ordonnée.

Cette question n'a également été proposée que dans 4 classes. Le taux de réussite varie de 14 % à 27 % selon les classes. Si l'échec est dû pour 10 à 33 % des élèves selon les classes au fait de ne considérer que des abscisses positives ou à ajouter des points ne satisfaisant pas la condition (notamment ceux situés sur la deuxième bissectrice), il est plus souvent lié à la difficulté à identifier des points autres que les points explicitement marqués. En effet, entre 46 % et 68 % des élèves ne repassent en rouge que des nœuds du quadrillage.

Nous sommes conscients que la manière dont les questions sont posées a pu avoir une influence sur les réponses des élèves, au-delà de leur maîtrise du contenu et l'effet d'un certain nombre de paramètre pourrait être tester (par exemple le fait que le quadrillage soit apparent en pointillés sur la question 12 ou le fait de ne pas proposer la réponse « une infinité » pour la question 6).

Les résultats permettent néanmoins de mettre en évidence une difficulté importante en proportion parmi les élèves de seconde à considérer des points autres que des points explicitement identifiés sur un dessin, ainsi qu'à considérer qu'une ligne est constituée de points. On peut penser que ces conceptions font obstacle à la compréhension de la notion d'équation de droite.

Les conceptions des élèves en lien avec l'articulation des cadres et registres

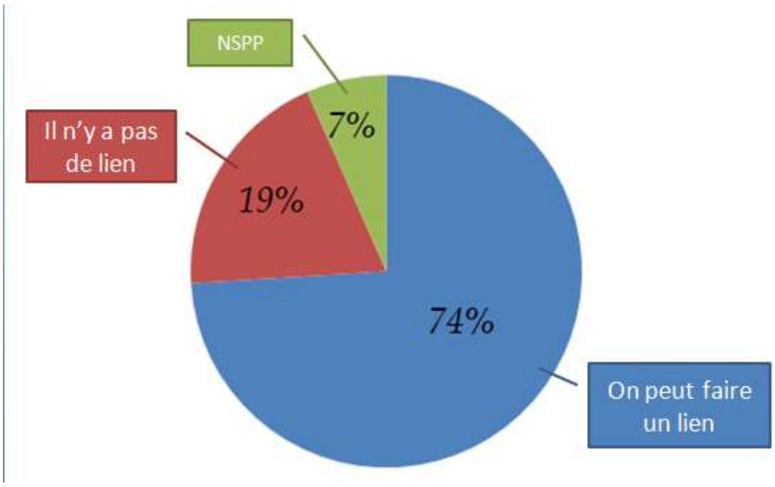
Si les questions 11 et 12 ont permis d'explorer déjà un peu l'articulation entre registres numérique et graphique, les questions 3 et 13 apportent des compléments de manière plus spécifique :

La question 3 interroge explicitement sur l'existence d'une relation entre les cadres. Nous avons choisi une formulation telle qu'il est assez engageant pour l'élève d'affirmer qu'il n'y a pas de relation exploitable entre droite et fonction. Par ailleurs, même s'il ne sait pas effectivement mener le raisonnement, il peut se ranger derrière l'avis d'un élève fictif.

En voici l'énoncé

> 3 - Lors d'une activité en équipe, un groupe d'élèves travaille sur les fonctions affines.
>
> Albert dit : "En fait, il faudrait qu'on arrive à savoir si le point A(4 ; 6) appartient à la droite représentative de la fonction définie par $f(x) = 2x+1$!".
>
> Béatrice affirme : "A mon avis, c'est faisable."
>
> Constance réagit : "Mais non, un point et une fonction ça n'a rien à voir !"
>
> Tu es plutôt d'accord avec :

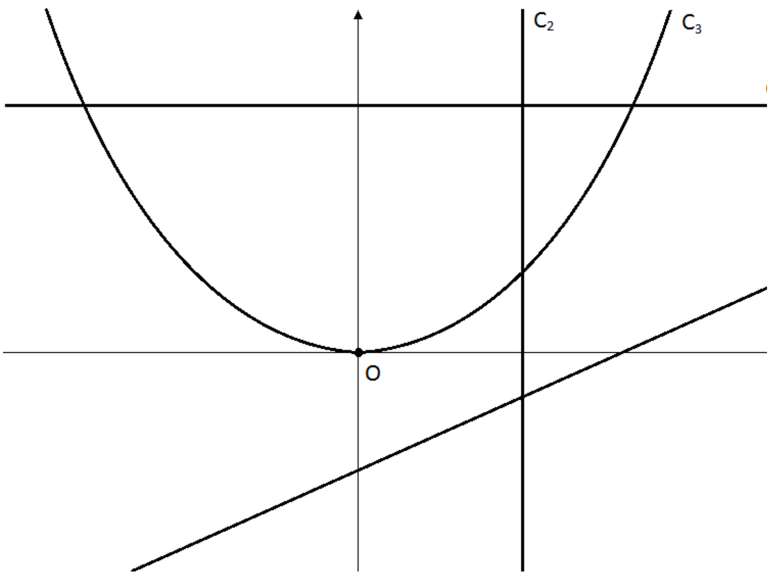
Voici les résultats, à partir des réponses de 180 élèves :



On peut donc penser que pour au moins 19% des élèves, les différents cadres sont hermétiques les uns par rapport aux autres. Une articulation entre les cadres, en particulier fonctionnel et géométrique devra donc être mise en évidence préalablement à la construction de la notion d'équation de droite.

La question 13, quant à elle, vise à tester une relation qui devrait être théoriquement déjà bien établie en fin de collège entre deux registres algébrique et graphique : La courbe d'une fonction affine est-elle une droite ? Par ailleurs, elle vise a sonder si, pour les élèves, la réciproque (toute droite est la représentation graphique d'une fonction affine) est fausse.

13 - Pour chacune des 4 courbes ci-dessous, dire si elle représente une fonction affine.



C_1 : □ Oui □ Non

C_2 : □ Oui □ Non

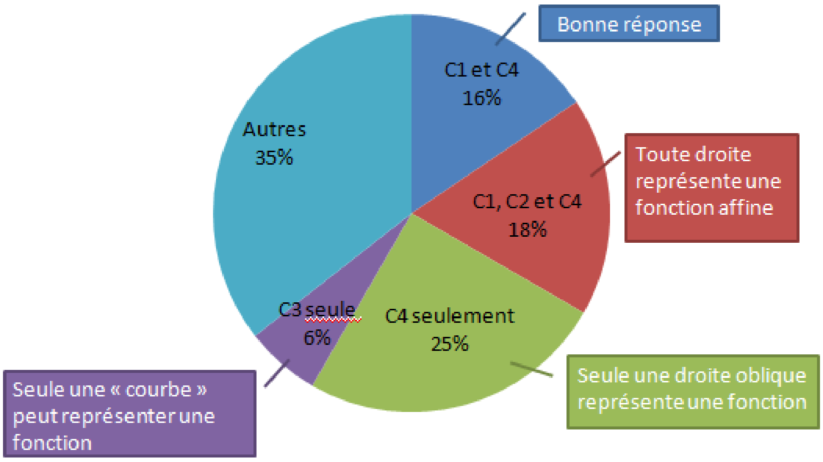
C_3 : □ Oui □ Non

C_4 : □ Oui □ Non

Nous avons choisi de tracer une parabole pour soumettre un choix où il est flagrant qu'il ne s'agit pas d'une fonction affine. Il ne nous a pas semblé très pertinent de tester la disjonction ou non entre les fonctions affines et les fonctions linéaires.

Par ailleurs, nous avons préféré poser une liste de questions oui/non pour chaque courbe, plutôt que de demander de cocher les courbes représentant des fonctions affines afin d'éviter les stratégies d'élimination.

Les résultats sont très partagés. Le diagramme ci-dessous indique les proportions d'élèves ayant répondu oui pour les courbes listées dans chaque secteur.



Difficile de dégager une catégorie majoritaire de réponses. Il est par ailleurs frappant de constater la diversité des réponses fournies, car à peu près toutes les combinaisons sont représentées.

Ce que l'on remarque, c'est que l'association droite/fonction affine n'est pas assise pour plus de 40% des élèves.

Conclusion

Travailler sur l'objet « équations de droites » en seconde nous permet d'aborder des questions vives pour l'enseignement des mathématiques, qu'il s'agisse de l'entrée dans la géométrie analytique au lycée ou dans l'analyse, ou encore de façon plus large le travail sur l'articulation des registres et les questions langagières en général.

Le travail mené sur l'organisation des savoirs en seconde nous a notamment permis de mettre en évidence que les équations de droites sont une thématique qui permet d'articuler et de mettre en cohérence différents contenus entre eux (notamment en reliant les notions de vecteurs, de fonctions, et la géométrie), mais que l'élaboration d'une progression est complexe si l'on veut garantir une certaine cohérence du point de vue mathématique.

Par ailleurs, les résultats de l'expérimentation d'un questionnaire dans des classes de seconde, montrent que les connaissances des élèves peuvent faire obstacle à la compréhension des équations de droites : par exemple, la moitié des élèves ne considèrent pas encore une équation comme un objet en soi, indépendamment d'une procédure automatisée de résolution ; à propos des objets géométriques, on a pu constater que très peu d'élèves considèrent une droite comme constituée de points ; enfin, il apparaît que, dans le registre graphique, les difficultés ne sont pas tant liées à certaines erreurs souvent pointées par les enseignants (notamment la distinction entre abscisse et ordonnée qui semble en fait plutôt bien maîtrisée par les élèves), que l'interprétation des objets qui y sont représentés. En particulier, il peut sembler étonnant que pour plus de 40 % des élèves, l'association entre fonctions affines et droites ne soit pas encore solide. Pointons toutefois qu'il ne s'agit là que d'une première expérimentation qui nécessite d'être étendue.

Si cette étude a permis de mettre en évidence un certain nombre de difficultés à la compréhension de la notion d'équation de droite, elle pointe également des pistes pour s'appuyer que le travail sur cette notion soit l'occasion d'enrichir les conception d'équations, de droites, de fonctions (affines), de courbes et de représentations graphiques qu'ont les élèves.

Bibliographie

De Saint Julien, A. (2002). Acquisition du concept d'équation pour un objet géométrique, mémoire de PLC2, IUFM de Montpellier.

Durand-Guerrier, V (1999) . L'élève, le professeur et le labyrinthe. «petit x» n° 50, pp. 57 à 79

IREM de Strasbourg. (1990). Changement de registre, L'ouvert, n°60, pp. 35-44.

Kouki, R. (2006). Equations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique *Petit x n*°71, pp. *7-28,2006*

Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du traval géométrique des élèves à parti de la classe de quatrième : l'organisation de la connaissance en niveaux de conceptualisation, Petit x, n°63, pp. 7-29.