QUELLE(S) EXTENSION(S) D'UN SYSTEME DE NUMERATION DES NOMBRES ENTIERS AUX NOMBRES DECIMAUX ?

Lalina COULANGE, Grégory TRAIN

Résumé.
Nous menons depuis plusieurs années une recherche, en collaboration avec des enseignants du primaire et du secondaire, sur l'enseignement et l'apprentissage de la numération au cycle 3 (CM1, CM2 et 6e), dans le cadre du Liéu d'éducation Associé Carle Vernet (Bordeaux). Ces observations nous conduisent à nous interroger sur les possibles extensions du système de numération des nombres entiers aux nombres décimaux dans la transition école-collège. Nous commencerons par présenter très brièvement des résultats de recherche sur les *unités de numération* (Chambris 2008, Tempier 2013) que nous illustrerons par quelques exemples. Nous proposerons ensuite aux participants de l'atelier d'analyser un ensemble de tâches et de ressources visant à faire vivre de manière explicite les conversions entre unités de numération dans l'étude des décimaux, conformément aux attentes des nouveaux programmes du cycle 3, qui nous permettront de questionner plus avant ce projet. Dans un troisième temps, il s'agira de mettre à l'étude des extraits filmiques liés à des observations menés dans plusieurs classes de CM1 au sein du LéA qui nous semblent illustrer des aspects spécifiques des usage des unités de numération dans l'étude des décimaux et leur possible rapprochement avec les unités de mesure.

Le rôle des unités de numération dans l'enseignement et l'apprentissage de la numération décimale

Des recherches conduites en didactique des mathématiques (Chambris 2008, Tempier 2013) sur l'enseignement de la numération décimale montrent que des ostensifs *écritures avec des unités de numération* (centaines, dizaines, unités, etc.) ont perdu de leur importance et ce, depuis la réforme des mathématiques modernes. Considérant que la double valence instrumentale et sémiotique de ces ostensifs (Bosch & Chevallard 1999) dépasse celle d'un autre type d'ostensifs ayant pris le pas sur les unités de numération - les écritures symboliques sous forme de puissance de dix (10,100,1000, etc.) - ces mêmes auteurs donnent à voir un système de désignation d'un nombre en unités de numération aux faibles besoins trophiques (Chevallard 2006) particulièrement adapté pour travailler l'aspect décimal de la numération et pour la mise en lien qu'il offre entre numération et système métrique (Chambris 2008, 2010).

Tout en prenant appui sur ces travaux à la fois récents et précurseurs sur l'enseignement de la numération décimale, nous choisissons plutôt de parler de registres de représentation sémiotique (Duval 1993), symboliques ou discursifs. Il s'agit ainsi de caractériser la façon dont des ostensifs liés à l'enseignement et à l'apprentissage de la numération font système et constituent dès lors un registre de représentation. Il s'agit également de considérer en quoi et comment des représentations ou des désignations discursives (à l'oral comme à l'écrit – quand on écrit ou on lit « un centième ») s'articulent ou s'associent avec des représentations symboliques écrites (« un centième » peut aussi s'écrire $\frac{1}{100}$ - on peut lire $\frac{1}{100}$ comme « un centième »[1]), ce que nous considérons comme des conversions (parfois transparentes, parfois non) entre des registres de représentation sémiotique.

Un exemple : Un algorithme en prise d'appui sur les unités de numération

Ainsi, concernant les calculs posés, les relations entre unités de numération sont une prise d'appui traditionnelle pour la tenue d'un discours justificatif de différents algorithmes à l'œuvre. Il en va par exemple de la conversion d'une unité de numération d'ordre n+1 à l'ordre n pour travailler à l'ordre n dans l'algorithme par emprunt de la soustraction posée en colonne. Reste que ces algorithmes s'ouvrent possiblement à un réexamen en lien avec les potentialités du système de désignation des nombres en unités de numération et des conversions entre registres de représentation.

Dans la soustraction posée en colonne de 4003 et 2248, la conversion du registre symbolique 4003 à une représentation sémiotique du type « 400 dizaines et 3 unités » permettrait de piloter les transformations données ci-après, économisant ainsi une gestion coûteuse des « retenues » en cascade (à l'œuvre dans la technique par « emprunt »)

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 0 & 0 & 3 \\ - & \underline{2} & \underline{2} & \underline{4} & \underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} & 3 & 9 & 9\ d & 1 & 3\ u \\ - & \underline{2} & \underline{2} & \underline{4\ d} & & \underline{8\ u} \end{array}$$

Dans le même ordre d'idées, le calcul en colonne de la différence de 1004 et 222, pilotés par le même type de conversions/transformations, permettrait d'assurer un avenir scolaire à l'apprentissage des compléments à 100.

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 0 & 4 \\ - & & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0\ d & 4\ u \\ - & & \underline{2} & \underline{2\ d} & \underline{2\ u} \end{array}$$

Si d'autres exemples pourraient aisément venir fournir cette première liste, ils n'auraient nullement comme objet de prétendre à la construction d'une quelconque algorithmisation d'une technique de calcul. En revanche, ils donnent plus volontiers à voir qu'à l'instar du calcul mental, le calcul posé et les possibilités de conversions/transformations de registres à l'œuvre possiblement dans une réflexion sur les techniques, offre un espace pour la compréhension des objets mathématiques qu'il engage directement ou indirectement.

Vers un nouveau rôle des unités de numération dans l'enseignement des décimaux ?

Le questionnement développé dans cet article concerne le possible nouveau rôle des unités de numération dans l'enseignement des nombres décimaux. Deux raisons principales à cela peuvent être avancées. D'abord, parce que les travaux de Chambris (2008) et Tempier (2013) ont majoritairement porté sur les nombres entiers. Ensuite, et à plus forte raison, parce que ces travaux ont néanmoins d'ores et déjà trouvé une forme d'écho dans la récente réécriture curriculaire et son organisation en cycle, y compris en ce qui concerne les savoirs à enseigner sur les décimaux, dans une forme d'extension des résultats capitalisés sur les nombres entiers. On peut lire ainsi dans les programmes les recommandations suivantes – mêmes si elles semblent co-exister s'agissant des décimaux avec des écritures de fractions décimales et l'écriture à virgule :

[1] Notons qu'il n'en est pas tout à fait de même pour 100 qu'on lit souvent plus volontiers « cent » que comme « une centaine ». C'est d'ailleurs bien ce qui nous intéresse !

> Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes… Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales.. (programmes 2016 – cycle 3)

Notre réflexion se centre sur l'extension des résultats de recherche établis préalablement sur des nombres entiers aux nombres décimaux, dans un contexte institutionnel qui prévoit d'ores et déjà cette extension (sans prise d'appui sur de nouveaux travaux sur les nombres décimaux à ce jour[2]).

Unités de numération, de mesure et nombres décimaux ?

Une extension du rôle des unités de numération des entiers aux décimaux : une perspective aussi symétrique qu'il n'y paraît ?

Les tâches de conversion entre registres sémiotiques de représentations des nombres laissent poindre une certaine diversité que donne à voir par exemple les différentes tâches suivantes :

- T_1 : écrire en chiffres « 18 centaines et 353 unités »
- T_2 : écrire en chiffres « 182 dizaines et 53 centaines »
- T_3 : écrire en chiffres « 3,5 dizaines »
- T_4 : écrire en chiffre « 6,25 dixièmes »
- T_5 : convertir « 3,5 millions » en centaines
- T_6 : convertir « 3 dm » en mm et « 31,4 dm » en dam.

L'examen de ces différentes tâches et des techniques associées permet dès lors de questionner le recours au registre des unités de numération étendu aux décimaux. Dans le détail, l'étude des deux premières tâches (T_1 & T_2) permettent de revenir sur les techniques largement décrites dans les travaux antérieurs sur les entiers en prenant appui sur le registre de représentation des unités de numération. Ainsi, concernant la tâche T_1, « 18 centaines et 353 unités » peut également s'écrire (ou se dire) « 18 centaines et 3 centaines et 53 unités » en transformant 300 unités en 3 centaines (en prise d'appui sur la relation entre unités de numération 100 unités = 1 centaine), puis « 21 centaines et 53 unités » (en sommant les unités de l'ordre des centaines). Une transformation du même type (20 centaines en 2 milliers) permet alors d'obtenir l'écriture chiffrée 2153 en prise d'appui sur le principe de position de la numération écrite. La tâche T_2 entretenant une proximité certaine avec T_1 permet par ailleurs d'illustrer la possibilité dans de telles tâches, de mettre en jeu des représentations sémiotiques en unités de numération moins *congruentes,* c'est à dire ordonnées différemment que ce que suggère le principe positionnel de l'écriture chiffrée. Dans les deux cas, les justifications des techniques associées, largement étudiées par Chambris (2008) prennent appui sur les différentes relations entre unités de numération (100 unités = 1 centaine, 10 centaines = 1 millier, etc.)

Les deux tâches suivantes (T_3 & T_4) visent à interroger une perspective symétrique de telles techniques dans une possible extension aux nombres décimaux, en faisant apparaître des nombres décimaux non entiers (sous leur forme d'écriture décimale) d'unités de numération.

---

[2] Signalons toutefois que la conférence de Allard, Chambris et Tempier à ce même colloque de la CORFEM apporte précisément des compléments sur l'enseignement des fractions et des décimaux au cycle 3, situés en continuité de leurs travaux antérieurs.

Dans les différents manuels que nous avons pu consulter, anciens[3] et plus récents, ce type de tâche ne semble pas trouver place. Du point de vue des techniques, ces deux tâches convoquent la mise en œuvre de relations *nouvelles* entre unités de numération : il en va ainsi dans T_3 du *dixième de dizaine* ou encore du *centième de dixième* dans T_4. Ce caractère de nouveauté des relations entre unités de numération réside à la fois dans les relations entre unités de numération d'ordre $-n$ (en prolongeant la désignation utilisée précédemment d'unités d'ordre $n \geq 0$[4]) mais également des relations entre unités d'ordre n et $-n$. Ceci pose alors la question de la construction de ces relations et de sa prise en charge dans l'enseignement. Par ailleurs, comme le montre la tâche T_5, ce phénomène est déjà l'œuvre mais de manière quelque peu isolée dans le cas des grands nombres. Ainsi, « 3,5 millions » est une désignation dans le registre des unités de numération rencontrée de manière quelque peu anachronique dans les manuels contemporains (dans la mesure où cette rencontre s'opère en milieu de cycle 3 et, en tout état de cause, avant même d'avoir envisagé une quelconque extension possible des unités de numération aux décimaux. La conversion envisagée dans T_5 met alors en jeu des relations du type *dixième de million,* relations dont la construction et la prise en charge en appui sur le seul registre des unités de numération se pose à ce stade. La dernière tâche envisagée T_6 permet quant à elle de questionner la proposition formulée dans les programmes (reproduite ci-dessous) d'un rapprochement possible des unités de numération et des unités de mesure :

> L'enjeu actuel est plutôt d'avoir une bonne maîtrise des unités métriques usuelles pour traiter les problèmes de la vie courante. Une explicitation des relations avec la numération y est favorable. En retour, la numération béné cie du temps passé à étudier le système métrique. Ce texte, centré sur la numération des entiers, a ainsi deux objectifs : inscrire les objectifs d'étude du système métrique dans d'autres, relatifs à l'étude des nombres et des grandeurs ; exploiter au mieux les relations favorables entre système métrique et numération pour consolider la maîtrise de la numération des entiers. Autrement dit, il s'agit de consolider l'étude du système métrique et d'en faire un outil au service de la numération et du sens des nombres. (Le nombre au cycle 3 - Apprentissages Numériques, Scérén, page 13)

Si la symétrie évoquée dans les programmes semble actée en ce qui concerne les nombres entiers (convertir 34 centaines en dizaines - convertir 34 hm en m), qu'en est-il dans une possible extension de ces tâches de conversion dans le registre sémiotique des unités de numération étendu aux décimaux (35,8 dm en m et 35,8 dizaines en centaines) ?

Différentes remarques se succèdent. Notons dans un premier temps que si des tâches de conversion de nombres dans le registre sémiotique des unités de numération étendu aux décimaux sont, comme nous l'avons déjà remarqué, absentes de l'enseignement, les tâches *symétriques* de conversion dans le système métrique sont en revanche bien présentes dans les manuels (anciens et actuels). Un corollaire immédiat est le fait que dans le curriculum actuel, l'étude des nombres décimaux sous forme d'écriture à virgule précède l'étude des tâches de conversion d'unités dans le système métrique mettant en jeu ces mêmes nombres (et leurs écritures à virgule). Notons ensuite, dans une perspective plus concomitante de construction (unités du système métrique et unités de numération) que si le rôle de la virgule dans des écritures du type 3,45 dizaines et 3,45 dm partage une grande proximité, il n'en est pas de même de celui qu'elle endosse dans le registre des écritures à virgule des nombres décimaux.

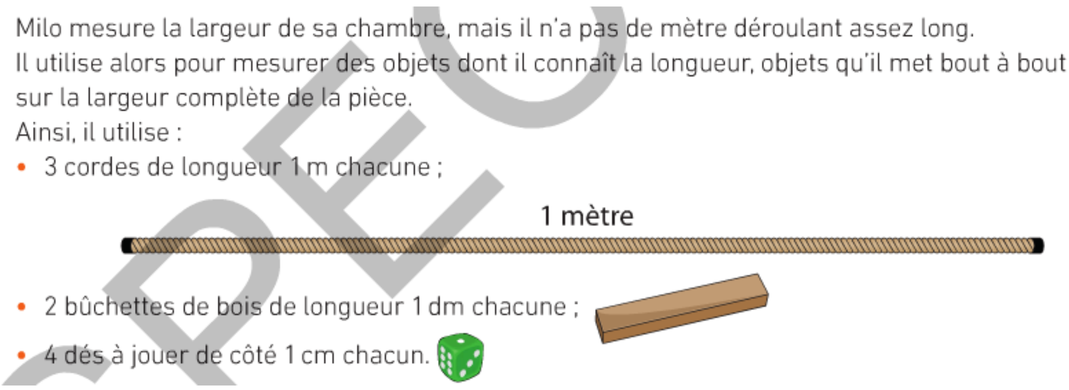
---

[3] De la même époque que ceux considérés dans les travaux de thèse de Chambris.

[4] `Notons que cette désignation qui prolonge celle utilisée précédemment ne trouve pas d'équivalent dans la théorie des polynômes à une indéterminé et son « extension » à celle des fractions rationnelles. Dans cette dernière, l'analogie pousserait peut-être plus volontiers à parler de pôles et de multiplicité de ces pôles.

Par ailleurs, la co-existence du registre des unités de numération étendu et des unités du système métrique pose également question. Sans une certaine forme d'autonomie de l'écriture à virgule des nombres décimaux, comment s'opère la conversion de 3,4 dizaines de cm en dm. S'agit-il d'appréhender 3 dizaines et 4 dixièmes de dizaines) de cm ou plutôt 3,4 (dizaines de cm) ? Resterait alors à conduire la conversion envisagée en dm et à considérer des dixièmes de dizaines de cm. Nous laissons le soin au lecteur cette entreprise et l'invitons même à examiner une tâche proche en substituant à la précédente les cm et dm par des cm^2 et dm^2 et les questions qu'elle soulève[5]. Il s'agit ici volontairement de cas quelque peu *pathologiques* qui n'ont évidemment pas pour but de disqualifier le rapprochement envisagé entre unités de numération et unités du système métrique[6], à bien des égards judicieux, mais plus volontiers de donner à voir les questions qu'un tel rapprochement étendu aux nombres décimaux serait susceptible de poser.

Dans le même temps, cette entreprise fait écho à ce que nous avons déjà pu observer à la fois dans le cadre de la formation des enseignants du second degré dans laquelle nous sommes engagés mais aussi dans différentes ressources professionnelles d'enseignants, à savoir une forme précoce d'opérationnalisation des recommandations institutionnelles relatives à un rapprochement entre unités de numération et unités du système métrique. Même s'ils n'ont pas valeur de preuve pour quantifier quelque peu l'ampleur du phénomène, l'extrait de manuel et la ressource construite par un enseignant stagiaire de MEEF M2 (données l'une et l'autre ci-dessous) sont au moins la preuve de tentatives d'une telle opérationnalisation de collectif d'enseignants – et à minima, un étudiant et les auteurs du manuel – qui posent question.


Milo mesure la largeur de sa chambre, mais il n'a pas de mètre déroulant assez long.
Il utilise alors pour mesurer des objets dont il connaît la longueur, objets qu'il met bout à bout sur la largeur complète de la pièce.
Ainsi, il utilise :

- 3 cordes de longueur 1 m chacune ;

1 mètre

- 2 bûchettes de bois de longueur 1 dm chacune ;
- 4 dés à jouer de côté 1 cm chacun.

[5] Notamment dans le cadre des conversions entre unités du système métrique, si ce dernier renvoie à un changement de base d'un espace vectoriel de dimension 1 sur R, qu'en est-il des changements de base ici opérées au regard des différents points de vue posé sur les grandeurs considérées…

[6] Nous faisons état d'ailleurs plus bas dans le texte d'une tentative d'opérationnalisation de ce rapprochement dans une classe de CM1

1. a) Quelle fraction de la longueur d'une corde celle d'une bûchette représente-t-elle ?

b) Quelle fraction de la longueur d'une corde la longueur du côté d'un dé représente-t-elle ?

c) Recopier et compléter la phrase suivante : « La largeur de la chambre de Milo mesure :

$\dots\dots\; m + \dots\dots\; dm + \dots\dots\; cm \;=\; \dots\dots\; m + \frac{\dots}{10}\, m + \frac{\dots}{100}\, m \;=\; \dots\dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100}\, m.$ »

2. a) Par combien de dés pourrait-on remplacer une bûchette ? Combien y aurait-il de dés au total pour mesurer la chambre ?

b) Recopier et compléter la phrase suivante : « La largeur de la chambre est égale à :

$\dots\; m + \frac{\dots}{100}\, m = \dots + \frac{\dots}{100}\, m.$ »

3. a) Par combien de dés pourrait-on remplacer une corde ?

b) Recopier et compléter la phrase suivante : « La largeur de la chambre est égale à : $\frac{\dots}{100}\, m$. »

4. Recopier et compléter les égalités que les questions précédentes permettent d'écrire :

$\dots\dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100} = \dots + \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{100}$

Figure 1 : Extrait d'activité du manuel Kwyk 6e

En ce qui concerne ce premier extrait de manuel, et sans entrer dans les détails de l'analyse, la prise d'appui sur les unités du système métrique dans la perspective de construire la numération décimale peut surprendre. En substance, il s'agit à partir de diverses expressions d'une même grandeur – la largeur de la chambre – ($\dots m + \frac{\dots}{100} m = \frac{\dots}{100} m = \cdots m + \frac{\dots}{10} m + \frac{\dots}{100} m$)[7] d'en conclure à l'égalité attendue à la fin de l'activité : $\dots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100} = \cdots + \frac{\dots}{100} = \frac{\dots}{100}$. On peut légitimement s'interroger sur le sens que les élèves seront susceptibles d'attacher à une telle analogie, étant entendu que dans la perspective curriculaire actuelle, les élèves auront déjà rencontré les écritures fractionnaires $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots\right)$ dans un travail conduit sur les nombres décimaux et que l'écriture $\frac{1}{10} m$ s'appuie nécessairement sur cette première rencontre…. Notons que pour l'élève qui se risquerait à examiner la chose dans le registre des écritures à virgule, cela reviendrait alors à dire que 1,24 = 1,24 car 1,24 m = 1,24 m ….en étendu convaincu avant de s'engager dans l'entreprise que 1,24 = 1,24…

Produit d'un nombre décimal par 100

1. On veut multiplier 2,753 par 100. Pour cela :

a. Quel est le chiffre des unités dans le nombre 2,753 ?

b. Quel est le rang du chiffre 2 dans le nombre 2,753 centaines ?

c. En déduire le résultat de 2,753 x 100.

d. Recopie et complète les phrases suivantes :

« Quand on multiplie un nombre décimal par 100, le chiffre des unités devient le chiffre des………………… ce qui revient à décaler la virgule de ………rangs vers la …………»

2. On veut convertir en mètres la longueur 2,753 hectomètres (hm).

---

[7] On pourrait aussi être interpellé par le passage négocié dès les premières questions de $\dots m + \frac{}{10} m + \frac{}{100} m = \cdots + \frac{\dots}{10} + \frac{\dots}{100} m$ mais comme annoncé, nous n'entrons pas plus dans l'analyse…

a. Le mot hectomètre se décompose en deux parties : hecto et mètre.

Que signifie le préfixe hecto ?

b. Recopie et complète : « 1hm=…..m »

c. Recopie et complète : « 2,753hm=2,753 x ….m=……..m

Figure 2 : Extrait d'une ressource professionnelle d'un étudiant de M2 MEEF

Concernant ce second extrait (nous avons d'ailleurs assisté à la séance joué par l'enseignant stagiaire dans sa classe à partir de cette ressource dans le cadre des visites de stage prévues dans la formation), et comme on pouvait s'y attendre, l'itinéraire prévue par la ressource n'est pas celle que vont suivre les élèves, ces derniers résolvant plus volontiers en premier lieu la question 1.c , ce résultat leur permettant alors, à contre-courant, d'apporter des réponses à la question précédente. Cette dernière question interpelle particulièrement, car si les attentes du professeur sont de déclarer que le rang du chiffre 2 est « les centaines » cette réponse s'appuie précisément sur l'écriture en chiffre de ce nombre (seule registre sémiotique dans lequel la notion de rang est définie…) et non pas dans le registre des unités de numération…

Pour conclure cette section, nous revenons brièvement sur la question, laissée pour l'heure de côté, sur la nécessité de prise en charge de relations nouvelles entre unités de numération dans une perspective d'étendre le registre des unités de numération aux nombres décimaux. Ces relations concernent à la fois les relations entre unités de numération d'ordre $-n$ et les relations entre unités d'ordre n et $-n$. Dans le cadre plus restreint de l'étude des nombres décimaux, la prise d'appui sur les unités de numération suppose de prendre en charge – a minima – les relations d'ordre $-n$. Dans les différentes progressions que nous avons pu consultées, la construction du dixième et du centième s'opère dans le sens partage de l'unité : ainsi le dixième est vu comme le partage d'une unité en 10, le centième comme le partage d'une unité en 100, parfois (mais rarement) comme un dixième partagé en 10 et là encore toujours dans un mouvement de partage. Or, dans des tâches de conversion en unités de numération impliquant des nombres décimaux (54 centièmes en dixièmes), c'est aussi de manière symétrique le sens « groupement » qui est convoqué : 10 centièmes = 1 dixième. La conversion entre unités de numération suppose ainsi une reconstruction du sens groupement dans l'étude des nombres décimaux. La question est alors la suivante : savoir qu'une unité d'ordre $-n-1$ correspond à une unité d'ordre $-n$ partagée en 10, est-ce également savoir que 10 unités d'ordre $-n-1$ correspond à une unité d'ordre $-n$? Les quelques éclairages que nous apportons plus bas dans le texte, à partir d'observations en classe, tendent à montrer que la symétrie n'est pas nécessairement un allant de soi…

Une tentative de rapprochement des unités de numération et des unités de mesure dans une classe de CM1 (LéA Carle Vernet)

Au sein du Lieu d'Education Associé Carle Vernet, cela fait plusieurs années que chercheurs et enseignants se questionnent sur le rôle du registre sémiotique des unités de numération dans l'enseignement-apprentissage des nombres décimaux et sur des rapprochements possibles entre des organisations mathématiques des savoirs à enseigner sur les décimaux et sur la mesure. Ce travail a permis de mettre à jour différents phénomènes, certains déjà rapidement évoqués plus haut dans le texte :

- Il existe classiquement une réelle distance entre la construction des unités de numération spécifiques des nombres entiers et celle des unités de numération spécifiques des nombres décimaux. La construction de ces dernières s'opère en effet à partir du partage de l'unité (le dixième comme l'unité partagée en 10 ou le centième comme le partage de l'unité en 100) ou du partage d'une subdivision d'une unité (le centième comme le partage d'un dixième en 10). Dans le cadre des entiers, en revanche la construction s'opère quant à elle dans le sens groupement (10 dizaines = 1 centaine, etc.). Lorsqu'il s'agit de construire des relations entre unités de numération spécifiques des nombres décimaux, il est apparu nécessaire de prendre en charge spécifiquement une telle construction (dans le sens groupement) pour par exemple pouvoir envisager des relations du type 10 centièmes comme 1 dixième.
- Les conséquences potentielles d'un rapprochement possible entre des savoirs à enseigner sur les décimaux dans le domaine de la mesure et de la numération décimale n'est pas sans poser question. Ceci est d'autant plus vrai qu'un tel rapprochement a pu autrefois être controversé par les didacticiens des mathématiques – et que les travaux déjà anciens de Brousseau (1998) peuvent parfois être vus précisément comme ayant permis l'établissement dans notre curriculum d'objets intermédiaires – les fractions et les fractions décimales dans la construction des unités de numération spécifiques des décimaux (dixièmes, centièmes, millièmes) – participant par là même à la création d'un lien plus indirect avec les unités de mesure…

Au sein du LéA, une des trois enseignantes collaboratrices s'est emparé de ce questionnement de manière autonome[8]. Elle a décidé d'introduire les nombres décimaux d'une façon qui nous est apparu d'emblée comme quelque peu originale, en prise d'appui direct sur un travail lié aux mesures de longueurs (avec des unités de mesure : mètres, décimètres, centimètres, millimètres) d'une part, et en partant du groupement d'unités (1 dm = 10 cm) pour construire la signification partage de ces mêmes unités (1 cm = 1/10 dm)[9].

Préalablement aux séances observées, l'enseignante a introduit les fractions *via* une situation extraite du Ermel CM1[10] visant à construire le sens d'une fraction comme « partage de l'unité » pour mesurer des longueurs de segments (avec une « bande unité »). Un affichage présent dans la classe montre des traces de l'institutionnalisation déjà effectuée autour de cette situation introductive des fractions (de type ½, ¼ et 1/8). Celle-ci a visiblement permis de mettre également en avant des relations entre ces fractions en référence à l'unité (dans un sens proche du groupement, comme 2 demis = 1 unité ou 4 quarts = 1 unité…) :

---

[8] Nous entendons par là que l'enseignante concernée a décidé de mettre en place des situations d'enseignement et d'apprentissage dont elle a assumée l'entière conception. Dans ce LéA, le chercheur n'est pas nécessairement « concepteur » de situations. Les enseignant-e-s collaborateurs-trices utilisent ou créent fréquemment leurs propres ressources.

[9] Alors que comme nous venons de l'évoquer, c'est davantage partant d'une signification liée au partage (1/100 de l'unité vu comme une unité partagée en 100 ou un dixième d'unité partagé en 10 qu'on construit les relations liés à des groupements-conversions : 10 centièmes = 1dixième ou 100 centièmes = 1 unité)

[10] Cette situation étant elle-même inspirée d'une ingénierie didactique conçue par Douady et Perrin (1986).

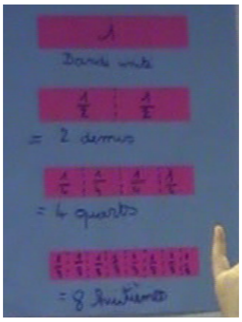


Figure 3 : affichage sur les fractions « partage de l'unité »

Les élèves ont également utilisé un jeu de règles graduées cartonnées (1 règle graduée en mm, 1 en cm, 1 en dm – sans autre indication sur la règle que la valeur d'une graduation) pour mesurer des longueurs de segments donnés. La première tâche prescrite aux élèves au début de la séance correspond précisément à la mesure de différents segments à l'aide de ces règles. Tous les élèves accomplissent sans difficulté le travail demandé et les mesures trouvées ont été officialisées (ce qui a permis de formuler l'équivalence de certaines mesures comme *1 dm et 2 cm et 7 mm* qui équivaut à *127 mm* ou encore à *12 cm et 7 mm*).

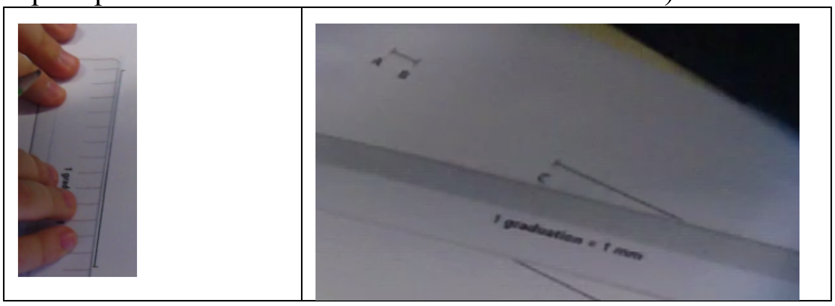


Figure 4 : Mesure de segments avec des règles graduées en mm, cm et dm

La tâche problématique au cœur de la situation est la suivante : sachant qu'un segment [le segment d'extrémités A et B] a pour longueur 1cm, donner la mesure de la longueur de ce segment en dm (ENS : « *la mesure du segment [AB] mais je ne la veux pas en centimètres ou en millimètres, je la veux en décimètres* ». La problématicité de cette tâche a quelque peu surpris les élèves au départ : « *Mais on peut pas !* ». Un élève a proposé « *ben zéro* » - proposition vite invalidée collectivement (« *ça mesure zéro ? [Es : non] / /Non il y a une solution / cherchez // travaillez en groupes* »). L'idée de fractionnement de l'unité de mesure (« *mais couper en deux à chaque fois… ça pourrait faire un demi décimètre… un quart décimètre [rires de l'élève]* ») ou la mise en relations avec ce qui a été étudié préalablement au sujet des fractions commencent à apparaître et à circuler au sein de la classe (*«ENS : je ne sais pas, utilise tous les outils mathématiques que tu connais – E : les fractions ! »*).

Lors de la phase de recherche en groupe, plusieurs stratégies émergent qui correspondront à plusieurs propositions qui seront reprises lors de la mise en commun :

- Un groupe d'élèves a tenté de recontextualiser de manière erronée les fractionnements de l'unité déjà rencontrés sur les fractions (en demi, quart et huitième de l'unité) et propose $\mathbf{\frac{1}{8}}$ **décimètre**. Notons qu'il n'est pas simple de montrer que cette proposition est erronée, car l'invalider suppose de mettre en jeu les connaissances visées[11] (de savoir que comme on « partage l'unité décimètre en 10 » - c'est en contradiction avec

[11] On peut dire que le milieu de la situation didactique ne permet pas d'invalider cette proposition erronée d'élèves.

ce huitième qui supposerait qu'on a « partagé l'unité décimètre en 8 »…). Cela a donné lieu à un assez long échange lors de la mise en commun.

- Un groupe d'élèves a identifié qu'il faut partager l'unité décimètre en 10 pour obtenir 1 cm mais n'ont pas su produire l'écriture fractionnaire correspondante et ont écrit **10 dm = 1 cm**, ce qui sera aisément invalidé collectivement lors de la phase de mise en commun.
- Un élève (nommé TAR) a produit l'écriture décimale 0,1 dm de la manière suivante (cf. figure ci-dessus). Il a commencé par dessiner un tableau d'unités de mesure (avec 3 colonnes dm / cm / mm), positionné un « 1 » dans la colonne des cm, puis un « 0 » dans la colonne des dm et a enfin rajouté la virgule entre les deux colonnes. Il semble qu'il soit à la recherche d'une logique d'écriture en faisant fonctionner une connaissance liée aux usages quotidiens ou sociaux de l'écriture décimale sans pour autant comprendre la signification de cette écriture chiffrée dans un premier temps.

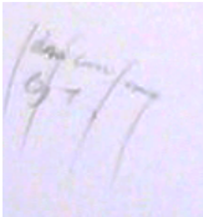


Figure 5 : Trace de la production de l'écriture « 0,1 dm » sur le cahier d'un élève

- Au sein du même groupe d'élèves (que celui de l'élève qui a produit l'écriture décimale), un autre élève (nommé JOSH) formule lors de la mise en commun la proposition de l'écriture fractionnaire $\frac{1}{10}$ décimètre et justifie la production de cette écriture.

Nous nous sommes précisément intéressés à ce qui se produit dans la mise en commun autour de ces deux dernières propositions :

JOSH : Un dixième

ENS : Attends, ils ne t'écoutent pas là. Ils ne t'écoutent pas. Va au tableau et explique.

JOSH : Tu dis qu'un centimètre, c'est dix millimètres // Du coup, là c'est dix fois plus grand // T'es obligé de faire <u>dix fois plus grand</u> et du coup si on veut le faire en décimètre / il faudrait que ce soit <u>dix fois plus petit</u>

ENS : Il était en train de me dire que /// il y a combien de centimètres dans un décimètre ? Levez la main et répondez

Es : Dix

ENS : Dix // Un centimètre, c'est combien de fois plus petit qu'un décimètre ?

Es : Dix

ENS : Je le coupe en combien mon décimètre pour obtenir un centimètre ?

Es : Dix

ENS : Vous êtes sûr ? Si je coupe mon décimètre en dix /// Rose, viens me colorier 1 cm là […] concentrez-vous / il nous reste deux minutes / on en reparlera après /// Alors un centimètre, on peut en mettre combien dans un décimètre ?

Es : Dix

ENS : Du coup / <u>c'est combien de fois plus petit</u> ? Chut // Alors, je vous écoute, c'est un huitième de décimètre ? *[ENS efface le 8 du $\frac{1}{8}$dm resté au tableau]*

ENS : Alors Sara, tu es d'accord, c'est un quoi ?

JOSH : un dixième

[ENS complète l'écriture au tableau : $\frac{1}{10}$*dm]*

ENS : un dixième de décimètre, tout le monde est sûr ? Oui

Es : oui on est d'accord

ENS : tu m'avais proposé autre chose. Tu m'avais proposé quoi ? Tout le monde regarde // On en parle la prochaine fois // Mais TAR m'a proposé une autre écriture // Je ne sais pas si c'est juste ou pas, si c'est la même chose // Mais il avait une autre idée qui n'avait rien à voir avec les fractions

TAR [*venu au tableau à la demande de ENS*] : Puisqu'il y a zéro décimètre / alors j'ai mis un zéro // Mais virgule 1 [*TAR écrit 0,1 au tableau*] // Je pense que c'est le même calcul que ça *[TAR montre le* $\frac{1}{10}$*dm de l'autre côté du tableau]*

ENS : tu penses que c'est la même chose ?

JOSH : bien oui parce que là c'est un centimètre et 10 millimètres et là on dit que c'est un dixième, donc s'il fait zéro virgule un / ça veut dire que c'est un dixième // Parce que là si tu rajoutes le dixième, ça fait un dixième

ENS: donc ce un / ce serait le un du dixième ? Je ne sais pas il va falloir que l'on en reparle

Figure 6 : Extrait de transcription – 0,1 et $\frac{1}{10}$dm ?

Notre analyse de cet épisode nous conduit à faire plusieurs constats :

- Elle confirme que la proposition « un huitième » ne peut être invalidé qu'à la condition de mettre en jeu les connaissances permettant de produire le « un dixième », ce qui rend la situation didactique délicate à gérer de ce point de vue (en l'absence de rétroaction possible qui mettrait en jeu des connaissances plus élémentaires permettant d'identifier le caractère erroné de cette proposition)
- Nous constatons également des formations récurrentes par l'élève envoyé au tableau (JOSH) et l'enseignante (ENS) sur les rapports entre unités de mesure « *dix fois plus petit* » - *« dix fois plus grand »* qui servent d'intermédiaires et qui permettent, partant de la relation dans le sens groupement d'unités de mesure (1 dm = 10 cm), de produire une « nouvelle » relation correspondant au sens partage d'unités (1 cm = 1 dm « partagé » en 1 cm = $\frac{1}{10}$dm).
- Enfin, si l'écriture décimale « 0,1 » produite par un élève (TAR) lors de cette séance a été produite sans que le sens de cette écriture n'ait été initialement construit « dans la classe de mathématiques », le couplage de cette écriture avec l'écriture fractionnaire préalablement officialisé semble en amorcer une construction significative. Les deux élèves au tableau rapprochent spontanément le « 1 » correspondant au chiffre des dixièmes dans l'écriture décimale avec le « $\frac{1}{10}$ » produit juste avant.

Ces écritures décimales et fractionnaires vont coexister par la suite lorsque l'enseignante demandera (lors d'une deuxième séance) aux mêmes élèves de produire des écritures des mesures de longueur des différents segments déjà mesurées en dm. Vont ainsi cohabiter un temps des écritures de différents types *1 dm et* $\frac{2}{10}$*dm et* $\frac{7}{100}$*mm et* 1,27 *dm*, écritures qui seront systématiquement mises en relation lors de la mise en commun. Une autre tâche nécessitera également d'étendre cette interprétation à d'autres écritures décimales faisant cette fois intervenir une autre unité de mesure : le mètre. Il s'agira à partir d'écritures décimales du type (données sur un schéma côté d'un meuble) du type 0,56 m ; 1,81 m ; etc. d'indiquer la signification de chaque chiffre (ENS rajoute des indications faisant le lien avec l'usage de règles graduées et les tâches préalablement effectuée : « *à quoi correspond chaque chiffre ? à quelle unité […] à vous de réfléchir à quoi ça correspond ? si je vous donne des règles graduées en centimètres, en millimètres, en décimètres ou mètres…* »). Cette tâche sera accomplie avec succès par une partie des élèves et l'enseignante fera explicitement le lien entre les unités de numération préalablement étudiées pour les entiers (en utilisant le tableau de numération des « grands nombres ») et les unités de numération / de mesure pour les décimaux.

L'étude de ces situations d'enseignement et d'apprentissage qui visait à rapprocher unités de mesure et unités de numération dans la construction des nombres décimaux nous a permis de mettre en lumière plusieurs phénomènes didactiques observés sur les unités de numération (spécifiques des décimaux) et les unités de mesure.

Nous constatons une distance importante entre des relations entre unités de mesure / numération construites par groupement d'unités (1 dm = 10 cm) et des relations entre unités de mesure / numération à construire par partage d'unités (1 cm = $\frac{1}{10}$ dm). Cette distance s'est avérée particulièrement visible ici : partant d'une construction par groupement d'unités pour aller vers le partage d'unités, ce qui convoquait en soi des connaissances relativement nouvelles et préalablement contextualisées à des fractionnements de l'unité en 2, en 4 ou en 8 (dont l'extension au fractionnement en 10 d'une unité de mesure pouvait ne pas aller de soi) pour les élèves. Nos observations au sein du LéA nous font toutefois formuler qu'une distance entre groupement / partage existe même quand les unités de numération ou de mesure liées aux nombres décimaux font l'objet d'une construction plus classique partant d'un partage des unités. Nous avons pu observer que les élèves se retrouvent de manière récurrente en difficulté quand il a s'agit de convoquer des relations entre unités de numérations spécifiques des nombres décimaux (dixièmes, centièmes, millièmes) qui font intervenir des groupements (1 dixième = 10 centièmes ou 10 millièmes = 1 centième) , après avoir construit ces unités de numération comme « partageant » une autre unité de numération (le dixième comme le partage de l'unité en 10, le centième comme partage de l'unité en 100 ou du dixième en 10..). Par exemple transformer 15 dixièmes en 150 centièmes pour positionner 15/10 sur une droite graduée en centièmes (ce qui fait intervenir la relation 1 dixième = 10 centièmes, alors que le centième avait été appréhendé comme partageant l'unité en 100) s'est avéré très délicat à négocier dans une des classes observées.

Autrement dit, ce n'est pas parce qu'un élève sait que 1 unité d'ordre n correspond à 10 unités d'ordre n-1, qu'il sait qu'une unité d'ordre n partagé en 10 correspond à 1 unité d'ordre n-1. Mais l'inverse nous paraît également vrai : ce n'est pas parce qu'un élève sait qu'une unité d'ordre n-1 correspond à une unité d'ordre n partagée en 10 correspond à une unité d'ordre n-1 qu'il sait que 10 unités d'ordre n-1 correspond à 1 unité d'ordre n.

Notons à ce sujet que des formulations de rapports entre les unités de numération / mesure (dix fois plus petit, dix fois plus grand) semblent pouvoir servir de levier à ce type de mises en relations entre un principe de groupement et un principe de partage, liés aux unités de numération / mesure.

Dire qu'une unité d'ordre n+1 est 10 fois plus grande qu'une unité d'ordre n permet d'envisager inversement qu'une unité d'ordre n est 10 fois plus petite que l'unité d'ordre n+1. Ceci peut fonder des relations entre unités de numération du type : une unité d'ordre n+1 correspond à 10 unités d'ordre n ou une unité d'ordre n correspond à 1 unité d'ordre n+1 partagée en 10.

Une dernière remarque à l'issue de ces séances est que le rôle joué par la virgule dans ce registre des unités de mesure, introduit de cette manière n'est pas identique à celui construit ou à construire en lien avec le registre des unités de numération. En effet, la virgule sert ici à indiquer l'unité de mesure qui va servir de référence (le décimètre ou le mètre) dans un contexte de mesurage, et qui peut varier – ce que formulera d'ailleurs très bien un des élèves de cette classe lors d'un échange en classe (*« la virgule elle sert à savoir si on parle de mètres, de décimètres ... »*). Dans le registre des unités de numération, elle sert à indiquer comment se situent les chiffres par rapport à une unité de référence donnée et immuable (l'unité) : elle devient un marqueur positionnel permettant de « situer » cette unité dans une écriture décimale d'un nombre. Ceci va de pair d'ailleurs avec des usages différents quand on envisage de « sortir » des nombres ou des mesures des tableaux de numération et/ou de mesure en sortant un nombre d'un tableau d'unités de numération ou d'unités de mesure qu'il nous semble intéressant d'expliciter, pour illustrer davantage notre propos

Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes
	2	5	5
1	7	3	4

Quand on sort les nombres du tableau, on écrit 25,5 et 173,4 (sous-entendu unités / unités de numération) – la virgule pallie la « disparition » d'unités de numération dans l'écriture positionnelle

dam	m	dm	cm
	2	5	5
1	7	3	4

Dans 2,55 cm (écriture licite) la virgule indique l'unité de mesure retenue comme « unité de référence » (à considérer comme unité / unité de numération).

Figure 7 : La (ou les) virgule(s) – Tableaux de numération et de mesure

Autrement dit, la virgule joue un rôle différent s'agissant d'unités de mesure ou d'unités de numération. Dans le premier cas – dans le domaine de la mesure - elle sert à considérer quelle unité de mesure choisie (et représentée) sert d'unité de « référence » (soit, est à considérer comme une unité au sens des unités de numération). Dans le deuxième cas – dans le domaine de la numération - elle est un marqueur positionnel permettant de situer l'unité immuable au sens des unités de numération (et non représentée autrement par sa position) dans l'écriture chiffrée d'un nombre décimal.

Dans de telles conditions, la proximité entre des écritures décimales dans le domaine de la numération et dans le domaine de la mesure, nous semble devoir être interrogé plus avant : ce sont peut-être deux significations de l'écriture décimale – en lien avec deux registres de représentation sémiotique (celui des unités de mesure, des unités de numération) qu'il s'agit d'appréhender ou d'envisager.

Bibliographie

Bosch M. et Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n°2, 77-124

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques *1970-1990*. Grenoble : *La Pensée Sauvage*.

Chevallard, Y. (2006). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García, (eds), *Actes du 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005)*.

Chambris C. (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. *Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7)*

Chambris C. (2010) Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*. 30(3), 317-366.

Douady R. et Perrin-Glorrian M.J. (1986). Laison Ecole-Collège. Nombres décimaux. *IREM Paris-Sud*

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37-65.

Tempier F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire : une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. *Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7)*