LA TRIADE DISCRET, DENSE ET CONTINU DANS LA CONSTRUCTION DES NOMBRES.

Viviane DURAND-GUERRIER

Université de Montpellier,

Département de mathématiques, IREM de Montpellier

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, UMR CNRS-UM

Résumé. Dans ce texte nous décrivons et analysons une situation de formation visant à travailler les relations entre le discret, le dense et le continu dans la construction des nombres. Cette situation de formation articule une présentation de la construction de l'ensemble des nombres réels par Dedekind, la résolution d'un problème de point fixe par les étudiants de première année de master préparant au métier de professeur de mathématiques dans le secondaire en France et certains aspects du travail d'élèves de lycée sur ce même problème. Nous terminons par un aperçu de travaux d'étudiants recueillis dans le cadre de la formation et une conclusion sur les apports de cette situation.

Introduction

Comme l'a montré Martine Vergnac dans sa conférence, les résultats des questionnaires qu'elle a fait passer auprès d'élèves de lycée montrent que pour ces élèves, il semble ne rien y avoir entre le *discret* (propriété de l'ensemble des nombres entiers naturels) et le *continu* (propriété de l'ensemble des nombres réels), et ceci bien qu'ils fréquentent depuis la fin du lycée les nombres décimaux et les nombres rationnels qui sont des ensembles denses en eux-mêmes et non continus, et que en outre certains théorèmes au programme de lycée s'appuient explicitement sur la continuité de l'ensemble des nombres réels ; c'est le cas en particulier du *théorème des valeurs intermédiaires* pour n'en citer qu'un. Nous faisons l'hypothèse que la raison de cette prévalence de la diade *discret* / *continu* tient à ce que le fait que l'ensemble des nombres rationnels (resp. des nombres décimaux) soit un ensemble dense en lui-même et non continu n'est pas travaillé dans le secondaire. Or ceci est un obstacle potentiel à une conceptualisation adéquate des nombres réels et à une entrée réussie dans l'analyse. Ceci nous a conduit, depuis quelques années, à proposer aux étudiants de première année de master préparant au métier de professeur de mathématiques dans le second degré en France une situation de formation visant à travailler les relations entre le *discret*, le *dense* et le *continu* dans la construction des nombres. Cette situation de formation articule 1/ une présentation de la construction de l'ensemble des réels par les coupures élaborée par Dedekind (1852, 2008), 2/ la résolution d'un problème de point fixe par les étudiants, 3/ la présentation de certains aspects du travail d'élèves de lycée sur ce même problème. (Pontille, Feurly-Reynaud & Tisseron, 1996). En 2012-2013, les étudiants ont en outre été invités à rédiger un compte rendu de ce travail. Je propose ci-dessous les grandes lignes de cette situation et un aperçu des travaux des étudiants. Pour des développements théoriques plus approfondis, voir Durand-Guerrier (2016) et Durand-Guerrier et Vergnac (2017).

I– Une construction de l'ensemble des nombres réels

Dans ce paragraphe, nous décrivons les principaux éléments travaillés avec les étudiants dans la première partie de la situation de formation. Ceci se fait en appui sur des textes issus de l'essai de Dedekind, Continuité et nombres irrationnels (traduction française par H. Sinaceur dans Dedekind 2008).

L'intuition du continu

Selon Longo (2002) L'expérience la plus commune du continu est celle du tracé d'une ligne sur une feuille de papier, sans lever le crayon. Les points disparaissent dans la trace obtenue ; ils réapparaissent, comme points isolés, lorsque deux lignes se coupent. Ceci correspond à l'expérience scolaire des élèves dont on peut faire l'hypothèse que cette conception intuitive du continu est au minimum un invariant opératoire au sens de Vergnaud (1990).

Cette intuition est mobilisée par Cauchy (1821) dans sa première preuve du théorème des valeurs intermédiaires.

> Si une fonction f de la variable x est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour toute valeur u comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

Dans la suite de Bolzano (1817) qui conteste la validité des références à l'intuition géométrique dans la préface de son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires, Dedekind (1872) tout en considérant la pertinence didactique de l'appui sur l'intuition géométrique se déclare insatisfait ; il s'engage dans une formalisation du contenu intuitif du continu, ce qui le conduit à *compléter* l'ensemble des nombres rationnels afin d'obtenir un ensemble complet, ceci constituant une des constructions classiques de l'ensemble des nombres réels. Nous détaillons ci-dessous les principaux éléments de cette construction.

Une formalisation du contenu intuitif du continu

Dedekind propose une construction de l'ensemble R des nombres réels dans un essai intitulé « Continuité et nombres irrationnels » publié en Allemand en 1872. Nous utilisons dans ce qui suit la traduction en français de cet essai par Hourya Sinaceur publiée dans Dedekind (2008).

> « Aujourd'hui encore un tel appel à l'intuition géométrique dans les premières leçons de calcul différentiel me semble extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si on ne veut pas perdre trop de temps. Mais personne ne le niera, cette manière d'introduire le calcul différentiel ne peut prétendre à la scientificité. Mon sentiment d'insatisfaction me dominait si fort que je pris la ferme résolution de réfléchir jusqu'à ce que j'ai trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux aux principes du calcul Infinitésimal. » (op. cit., pp.59-60)

Pour réaliser son projet, Dedekind s'appuie sur notre intuition du continu portée par la droite géométrique. Il considère que l'essence de la continuité réside dans le fait que

> « Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un et un seul point qui opère cette distribution de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. » (ibid, p. 72)

Il met en place une analogie entre les points de la droite et les partitions de Q constituées de deux classes A_1 et A_2 telles que tout nombre a_1 de la première classe est plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe. Il nomme "coupures" de telles partitions. Il note que tout nombre rationnel définit une coupure de Q[1] et il montre qu'il existe une infinité de coupures de Q qui ne sont pas opérées par un rationnel. L'exemple emblématique est la coupure formée des nombres rationnels positifs dont le carré est plus grand que 2 et du complémentaire dans Q de ce sous-ensemble. On sait que cette coupure n'est pas opérée par un rationnel, puisque, en effet, aucun nombre rationnel n'a pour carré 2. Dedekind montre que c'est le cas pour tous

---

[1] En fait un nombre rationnel permet de définir deux coupures selon que le nombre rationnel opérant la coupure est le maximum de la première classe ou le minimum de la seconde. Ces deux coupures ne sont pas essentiellement différentes (op. cit. pp.74-75)

les nombres entiers naturels qui ne sont pas des carrés parfaits, si bien qu'il y a une infinité de coupures de Q non opérées par un rationnel. Ceci est en lien avec le fait que

> « (…) la droite L[2] est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels en individus numériques ». (ibid, p. 68)

Dedekind souligne que l'incomplétude de l'ensemble des nombres rationnels réside dans le fait que certaines coupures de cet ensemble ne sont pas opérées par des rationnels ; autrement dit cet ensemble comporte des lacunes. Il s'agit pour lui de compléter cet ensemble en créant un nouveau nombre chaque fois qu'une coupure n'est pas opérée par un nombre rationnel. Ce nombre est dit irrationnel et est parfaitement défini par la coupure ayant motivé sa création (op. cit. p.77). Dedekind considère alors l'ensemble contenant tous les nombres rationnels et tous les nombres irrationnels qu'il vient de définir ; il montre que ce nouvel ensemble est complet pour le procédé de construction qu'il vient de mettre en œuvre. Autrement dit, dans cet ensemble, toute coupure de l'ensemble est opérée par un élément de l'ensemble[3]. L'ensemble ainsi construit satisfait donc la condition de continuité définie en référence à la continuité de la droite.

Cette construction des nombres réels par les coupures est rarement enseignée en France dans les cursus de licence. C'est ce qui ressort des retours des étudiants en formation initiale ou des collègues en formation continue lors de la mise en oeuvre de cette situation de formation. Un certain nombre d'entre eux n'ont jamais rencontré de construction de l'ensemble des nombres réels ; ceux qui en ont rencontré une ont en général étudié la construction par les suites de Cauchy (voir par exemple Lelong-Ferrand & Arnaudies, 1977), ou par les développements décimaux illimités (voir par exemple Lelong-Ferrand 1964 ou Perrin 2005). De par son appui sur l'intuition géométrique et sur l'ordre habituel, la construction par les coupures permet de prouver facilement que l'ensemble des nombres réels ainsi créé satisfait la propriété de la borne supérieure, à savoir que

> « Toute partie majorée non vide de l'ensemble R des nombres réels admet une borne supérieure appartenant à R ».

Cet énoncé est fréquemment pris comme axiome de continuité lorsque l'on définit le corps ordonné complet des nombres réels en début d'université.

Le choix de présenter en formation la construction de Dedekind est motivé par ses apports du point de vue de l'épistémologie : nous avons ici un exemple de l'élaboration d'un *concept théorique* qui s'appuie sur une *intuition empirique*. Cette construction s'inscrit dans la tradition euclidienne qui compare les grandeurs, commensurables ou non, à l'aide des équimultiples (en termes modernes de nombres rationnels). L'innovation de Dedekind consiste en la création de nouveaux nombres, qui permettent en une seule fois de combler toutes les lacunes de l'ensemble des nombres rationnels, considéré comme déjà créé, ceci en évitant le cercle vicieux qui consisterait à opérer sur des nombres non encore créés. La complétude ainsi obtenue est une propriété remarquable de l'ensemble des nombres réels, qui ne peut plus être étendue par un procédé de ce type. Les relations entre le *discret*, le *dense* et le *continu* qui sont visés par la situation de formation sont au cœur de cette construction. En outre, le choix de Dedekind de s'appuyer sur le contenu intuitif du *continu* porté par la droite numérique permet d'articuler explicitement le registre graphique et le registre numérique, ce qui constitue un enjeu essentiel du travail en analyse au lycée, en particulier dans le cadre de

---

[2] La droie L est muni d'une origine et d'une unité de longueur permettant d'associer à chaque rationnel l'abscisse d'un point de la droite.

[3] Il est important de noter que Dedekind distingue clairement la coupure, qui est une partition de l'ensemble des nombres rationnels, du nombre rationnel ou irrationnel qu'elle détermine.

l'étude des fonctions et de leurs représentations graphiques, en lien avec les résolutions graphiques d'équations, incluant les recherches de points fixes.

Discret, dense et continu en mathématiques

Par définition, un ensemble est discret *si et seulement si* pour chaque élément, on peut trouver un voisinage de cet élément qui contient cet élément et seulement cet élément ; en d'autre termes, tout élément de l'ensemble peut être isolé : l'ensemble des entiers naturels est discret ; l'ensemble des nombres rationnels de la forme $1/n$, pour n entier naturel non nul, est un ensemble discret. L'ensemble des nombres rationnels n'est pas un ensemble discret : entre deux nombres rationnels distincts, on peut toujours intercaler un nombre rationnel différent des deux premiers (par exemple leur demi somme). Il en est de même de l'ensemble des nombres décimaux. Ces deux ensembles sont denses (dans eux-mêmes). Notons que ceci ne doit pas être confondu avec le fait que ces deux ensembles sont denses dans l'ensemble des nombres réels. Cette dernière relation ne peut être considérée qu'après avoir construit l'ensemble des nombres réels, tandis que la densité de l'ensemble des rationnel (resp. des décimaux) est une propriété intrinsèque de ces ensembles.

On a vu que l'ensemble des rationnels, et a fortiori l'ensemble des décimaux, ne possèdent pas la propriété de continuité. Un ensemble peut donc n'être ni discret, ni continu. L'ensemble des réels est construit en complétant l'ensemble Q des nombres rationnels de sorte que ce nouvel ensemble vérifie le principe de continuité. Nous faisons l'hypothèse que la notion de complétude de l'ensemble des réels ne peut prendre sens pour les étudiants que si le concept de densité en soi-même est construit. Or, si nous avons une notion intuitive du discret et une notion intuitive du continu, en particulier en appui sur la ligne numérique, il est difficile de se faire une représentation intuitive du dense. En effet, lorsque l'on se place dans le registre graphique, on n'a pas de moyen de différencier visuellement la droite numérique rationnelle, la droite numérique décimale et la droite numérique réelle. Ceci tend à renforcer la conception de la diade discret/continu au détriment de la triade discret/dense/continu, créant ainsi un obstacle à la conceptualisation du continu. (Durand-Guerrier 2016). La situation du point fixe (deuxième étape de la situation de formation) que nous présentons ci-dessous vise à travailler explicitement sur cet obstacle.

II - Une situation pour travailler la triade discret-dense-continu

Le travail sur cette situation correspond à la deuxième phase de la situation de formation. Nous faisons l'hypothèse que le travail épistémologique conduit dans la première phase peut aider les étudiants à identifier les enjeux mathématiques et didactiques du problème du point fixe travaillé dans cette deuxième phase de la situation de formation.

Présentation de la situation

La situation que nous présentons ci-dessous est publiée dans l'article Pontille et al. (1996). Elle a été proposée par des collègues de l'IREM de Lyon en 1993-1994 dans le cadre du dispositif : MATH.en.JEANS. En tout début d'année scolaire, un mathématicien a proposé dans deux lycées de Lyon quelques problèmes de recherche; des étudiants volontaires choisissent un problème et travaillent en petit groupe tout au long de l'année. Il y a des séminaires organisés pendant l'année et en fin d'année. Les élèves sont accompagnés par leurs professeurs et par le mathématicien qui a proposé le sujet. Ils tiennent un cahier de bord. Le travail des élèves a été observé tout au long de l'année par les auteurs de l'article qui ont recueilli des enregistrements audio et vidéo ; des interviews d'élèves; des recueil d'écrits ; ils ont en particulier recueilli le contenu des cahiers de bord.

Dans la situation de formation, nous demandons aux étudiants de résoudre le problème tel qu'il a été posé aux élèves en 1993-1994.

On considère une application f de $\{1, 2,\ldots n\}$dans $\{1, 2, \ldots n\}$, où n est un naturel non nul. On suppose f croissante.

1. Montrer qu'il existe un entier k tel que $f(k) = k$; k est appelé point fixe.

2. Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec f croissante :
   a) f : D∩[0, 1] → D∩[0, 1][4] D est l'ensemble des décimaux
   b) f : Q∩[0, 1] → Q∩[0, 1] Q est l'ensemble des rationnels
   c) f : [0, 1] → [0, 1]

ou tout autre généralisation.

Figure 1 : Enoncé du problème proposé aux élèves (Pontille et al. p.13)[5]

Eléments d'analyse a priori

La preuve classique du premier résultat fait appel explicitement au fait que l'ensemble des entiers naturels est un ensemble totalement ordonné discret, ce qui se traduit en particulier par la propriété :

« Pour tout entier naturel n, si $p > n$, alors $p \geq n+1$ »

Ceci permet de mettre en œuvre une preuve par l'absurde (ce que font les élèves de l'expérimentation) ou une preuve par récurrence sur n (souvent proposée par les étudiants de Master). Notons que l'on peut prouver ce résultat en utilisant le fait que l'ensemble N des entiers naturels est un treillis complet. Nous y revenons plus loin dans le texte.

Le résultat ne se généralise pas pour les deux premiers cas. En effet, on peut trouver des fonctions croissantes de D∩[0, 1] dans lui-même telles que l'équation $f(x) = x$ n'ait pas de solution dans D∩[0, 1] ; c'est le cas de la fonction $f\colon x \ \rightarrow \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. L'image de D∩[0, 1] est incluse dans D∩[0, 1]; l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $-3x = -2$ qui n'a pas de solution dans D.

On peut également trouver des fonctions croissantes de Q∩[0, 1] dans Q∩[0, 1] sans point fixe. On ne peut pas trouver un contre-exemple avec une fonction affine à coefficients rationnels ; en effet toute fonction de ce type admet un point fixe rationnel. On peut chercher un contre-exemple sous la forme d'une fonction quadratique. C'est le cas de la fonction $f\colon x \ \rightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$. ; l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^2 - 4x + 2 = 0$, dont le discriminant est égal à 8. Le discriminant de cette équation du second degré n'étant pas un carré parfait, cette équation n'a pas de solution rationnelle.

Dans le troisième cas, on peut établir que

> Théorème 1: « Toute fonction croissante de [0, 1] dans [0,1] admet au moins un point fixe dans R ».

Ce résultat est une conséquence de la complétude de l'ensemble R des nombres réels au sens défini ci-dessus. Nous en donnons ci-dessous une preuve utilisant un théorème déjà mentionné plus haut :

---

[4] Dans l'énoncé du problème et dans la suite du texte, $[0, 1] = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 1\}$.

[5] Dans la version de Pontille et al. (1996), les questions n'étaient pas numérotées.

Théorème 2 : « Toute partie non vide et majorée de l'ensemble des nombres réels admet une borne supérieure.»

Soit f une fonction croissante de [0 ; 1] dans [0 ; 1].

On considère l'ensemble A défini de la façon suivante

$A = \{x \in [0\ ;\ 1]\ /\ x \leq f(x)\}$

Par définition, A est une partie de R

A est non vide ; en effet, $f(0) \in [0\ ;\ 1]$, donc $0 \leq f(0)$

Par hypothèse, A est inclus dans [0 ; 1], donc A est une partie majorée et non vide de R.

D'après le théorème 2 ci-dessus, A admet une borne supérieure.

Notons $a = \sup(A)$.

Nous allons montrer que a est un point fixe pour f

1. Montrons que a appartient à A, c'est-à-dire que $a \leq f(a)$

Soit $b \in A$;

On a $b \leq a$ car a est la borne supérieure de A ; or f est croissante ; on en déduit $f(b) \leq f(a)$.

Or $b \leq f(b)$ car $b \in A$; par suite $b \leq f(a)$

Ceci prouve que $\forall x \in [0\ ;\ 1], x \leq f(a)$

On en déduit que $f(a)$ est un majorant de A.

Comme a est la borne supérieure de A, c'est le plus petit des majorants de A et donc $a \leq f(a)$.

2. *Montrons que $f(a) \leq a$*

De f croissante et $a \leq f(a)$, on déduit $f(a) \leq f(f(a))$

Ceci prouve que $f(a)$ appartient à A ;

comme a est un majorant de A, on en déduit $f(a) \leq a$.

De $a \leq f(a)$ et $f(a) \leq a$, on déduit que $f(a) = a$, et donc que a est un point fixe pour f.

Figure 2 : Preuve du théorème 1 en utilisant le théorème 2

Le résultat que nous venons d'établir est un cas particulier du Théorème de Knaster-Tarski (Tarski 1955).

> Si A est un treillis complet et f une application croissante de A dans lui-même, alors l'ensemble des points fixes de f dans A est non vide, et c'est lui-même un treillis complet. En particulier, f a un plus petit et un plus grand point fixe dans A.

Nous rappelons les définitions suivantes : *Un treillis U = $\langle A, \leq \rangle$* est formé d'un ensemble A non vide et d'une relation d'ordre (qui peut être un ordre partiel) telle que pour tout couple d'éléments (x, y), l'ensemble $\{x, y\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. *Un treillis est complet* si en outre tout sous-ensemble de A admet une borne inférieure et une borne supérieure. La preuve ci-dessus est une adaptation de la preuve du Théorème de Knaster-Tarski donnée dans Tarski (1955).

Le résultat établi dans la première question est également un cas particulier de ce théorème puisque, en effet, une section commençante de l'ensemble N des entiers naturel est un treillis complet.

La preuve du théorème 1, qui correspond à la généralisation du premier résultat à l'intervalle [0, 1], permet de revenir sur les raisons pour lesquelles le résultat établi pour les sections commençantes de N ne se généralise pas dans le cas des intervalles $D \cap [0, 1]$ et $Q \cap [0, 1]$. On a vu que ces ensembles ne sont ni discrets (on ne peut pas généraliser la preuve faite pour N), ni continus (au sens de la complétude de Dedekind ou de Cantor), si bien que ce ne sont pas des treillis complets. On ne peut donc pas non plus généraliser la preuve établie pour l'intervalle [0,1] à ses intersections avec les ensembles D et Q[6]. Rappelons que ce sont précisément l'existence de telles lacunes qui ont motivé la construction de R par Dedekind, ainsi que les autres constructions qui voient le jour au XIX° siècle.

Le travail des élèves et celui des étudiants que nous présentons plus loin montrent que les deux premiers résultats ne sont pas intuitifs. En outre, une fois faite l'hypothèse de l'existence de contre-exemple, les étudiants éprouvent le plus souvent des difficultés à produire des contre-exemples remplissant l'ensemble des contraintes. Pour le troisième cas, les étudiants sont en général très rapidement convaincus que le résultat est vrai dans R si la fonction est continue, ceci étant une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Certains pensent que sans la continuité, il est possible de ne pas avoir de point fixe. La mobilisation du *théorème 2* affirmant l'existence de la borne supérieure pour toute partie majorée non vide de R apparaît très rarement. Certains étudiants s'engagent dans une preuve utilisant les suites.

A ce point de l'activité, on pourrait proposer de prolonger le travail en explorant les relations entre les différentes constructions de l'ensemble des nombres réels et le type de preuves associés[7]. Faute de temps, nous ne le faisons pas dans le cadre de la formation présentée ici.

Interprétation du problème dans le cadre graphique

Dans le registre graphique la question peut se reformuler sous la forme : *la courbe représentative d'une fonction croissante coupe telle nécessairement la première bissectric*e ?

Dans l'exploration des cas 2.a et 2.b, mettre en doute la nécessité de l'existence d'un point fixe dans le cadre graphique conduit à s'interroger sur la possibilité que la courbe représentative d'une fonction croissante puisse couper la première bissectrice en un point dont l'abscisse n'est pas un nombre décimal (resp. un rationnel). On peut faire l'hypothèse que les courbes génériques tracées par les élèves ou les étudiants seront majoritairement du type « ligne continue ». Or, de telles représentations graphiques peuvent laisser penser que la courbe représentative d'une telle fonction va nécessairement couper la première bissectrice. En effet, soit $f(0) = 0$ ou $f(1)= 1$ et dans ces deux cas la fonction a un point fixe ; soit $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$ et dans ce cas la courbe représentative d'une telle fonction est située de part et d'autre de la première bissectrice, la point de coordonnées $(0, f(0))$ étant situé au dessus de la première bissectrice, tandis que le point de coordonnées $(1, f(1))$ est situé au dessous. L'étude de cette question renvoie directement aux motivations de Dedekind pour construire l'ensemble des nombres réels présentées dans la partie I, à savoir le fait que *la droite numérique est infiniment plus riche en individus ponctuels que la droite rationnelle*.

Notons que les explorations graphiques du problème avec des fonctions croissantes non continues permettent de montrer qu'une fonction croissante non continue peut avoir plusieurs points fixes.

Aperçus du travail des élèves

Une question régulièrement posée par les étudiants du master préparant au métier de professeur de mathématiques dans le secondaire est celle de la pertinence de proposer une telle situation à des élèves de lycée. Pour apporter des éléments de réponse à cette question, nous leur proposons quelques éléments du travail des élèves et nous les engageons à lire

---

[6] Ceci s'inscrit dans un résultat plus général concernant les énoncés existentiels, qui peuvent être vrais sur un ensemble donné E et faux sur certains sous ensemble de E.

[7] Ces aspects sont développés dans Durand-Guerrier et Tanguay (2018).

l'article de Pontille et al. (1996). Ce qui suit est une brève synthèse des principaux éléments développés dans l'article tels que nous les présentons dans la formation.

Après avoir résolu la première question et rédigé une preuve complète prenant en compte la question de la généralité, les élèves travaillent sur la question de la généralisation à une fonction de $D \cap [0, 1]$ dans $D \cap [0, 1]$. Les élèves commencent par utiliser le même schéma de preuve que dans la première question basé sur le fait que chaque entier naturel a un successeur dans N. Ceci les conduit à se poser les questions suivantes :

1. Peut-on considérer qu'il y a une distance fixe entre deux décimaux ?
2. Peut-on trouver un plus petit nombre décimal strictement positif ?
3. Est-ce que ces deux questions sont liées ou indépendantes.

Après de nombreuses discussions, les élèves finalement concluent qu'il n'y a pas de plus petit décimal strictement positif[8], ni de différence fixe entre deux décimaux.

Ceci montre que cette situation permet de faire émerger un questionnement sur la distinction entre ensemble discret et ensemble dense dans lui-même. Bien que dans le contexte de l'expérimentation, ce vocabulaire n'apparaisse pas, les élèves expriment clairement le fait que entre nombres deux décimaux distincts, on peut toujours placer un troisième nombre décimal, distinct des deux premiers. Autrement dit, ils rencontrent en acte la notion de densité.

> « A mais je suis désolé. C'est vachement contradictoire ! Ben on peut ni dire qu'il y a un écart, ni dire qu'il n'y en a pas, on dit qu'on peut toujours trouver un décimal entre deux décimaux. » (ibid. p.23)

Ils travaillent ensuite dans le registre graphique et ils se posent la question suivante :

> « Est-ce possible que le graphe d'une fonction croissante de l'ensemble D des nombres décimaux dans lui-même coupe la première bissectrice en dehors de D ? »

Pour traiter cette question, les élèves produisent diverses représentions discrètes des nombres décimaux : alternance de nombres décimaux et de nombres non décimaux ; représentation de carrés bicolores[9]. Ils mobilisent la notion de droite décimale et explicitent le fait qu'il y a des lacunes « On a vu que dans la droite décimale, il y a des trous » (ibid. p.24), et expriment le fait que les différents types de nombres sont entremêlés sur la droite numérique.

> « En fait, on aura une ligne pointillée avec tantôt des décimaux, tantôt des rationnels, tantôt des réels qui s'entremêleront complètement et c'est pour ça qu'il faut qu'on relie nos points et qu'on travaille en courbe sinon on pourra rien faire. » (ibid. p.25)

Cinq mois plus tard, après de nombreux échanges, les élèves concluent qu'avec les nombres décimaux, il est possible que l'intersection soit « sur un trou ». Retournant à la question initiale, ils cherchent un contre-exemple avec des fonctions "simples et concrètes" (leurs propres mots) ; ils produisent un contre-exemple avec une fonction affine ayant un point fixe dans Q non décimal, et un contre-exemple avec une fonction quadratique ayant un point fixe dans R irrationnel, résolvant ainsi les deux cas de l'ensemble des nombres décimaux et des nombres rationnels. Ils ont ensuite abordé le dernier cas, mais n'ont pas eu le temps d'aboutir.

Les quelques éléments que nous avons rapportés ici mettent en évidence le potentiel de cette situation pour faire rencontrer en acte la notion de densité en lui-même d'un ensemble

---

[8] Autrement dit les élèves concluent que l'ordre habituel sur D n'est pas un bon ordre.

[9] Des extraits du cahier de bord des élèves avec plusieurs représentations sont données dans Pontille et al. (1996)

de nombres qui reste habituellement cachée dans les activités de classes, et de poser t la question de la non complétude de l'ensemble des décimaux et de l'ensemble des rationnels.

Aperçus sur le travail des étudiants de Master 1 – 2012-2013

En 2012-2013, nous avons mis en place cette situation de formation avec les étudiants du Master 1 Enseignement des Mathématiques de l'IUFM de Montpellier dans un module de premier semestre intitulé *Epistémologie et Histoire des mathématiques*. Un des objectifs du module est de permettre aux étudiants de comprendre les apports de l'épistémologie et de l'histoire pour aborder les questions didactiques.

Après la présentation de la construction de l'ensemble des nombres réels par Dedekind (voir début de ce texte), les étudiants ont travaillé d'abord individuellement, puis en groupe de 2 ou 3 sur le problème du point fixe. Après une synthèse collective, nous avons présenté les principaux éléments du travail des élèves (voir paragraphe ci-dessus). Nous leur avons ensuite demandé de faire un rapport sur leur travail. Nous avons reçu six rapports. Nous donnons ci-dessous et commentons quelques extraits de leurs rapports.

Essai de généralisation de la preuve avec les entiers dans le cas de l'ensemble D∩[0, 1].

Un très bon étudiant (L.) fait état dans son rapport de la première piste envisagée pour la généralisation à D∩[0, 1]

> « Question 2.a). J'ai tout d'abord pensé que l'on pouvait faire la même démonstration, puis influencé par certains de mes camarades de classe j'ai repéré que la propriété des successeurs n'existait pas dans l'ensemble des décimaux D ».

On retrouve une démarche analogue dans le rapport de l'étudiante F., également une brillante étudiante.

> « Je suppose la conjecture vraie pour *f*: D∩[0,1]→D∩[0,1] en pensant pouvoir généraliser la preuve dans N. Puisque D est dénombrable, on peut créer une bijection de D∩[0,1] dans N. Cependant, on ne peut pas appliquer le résultat démontré auparavant car il n'y a pas de successeur dans D. Comme D n'est pas discret, notre preuve ne fonctionne plus. »

Ces deux extraits montrent que la connaissance du fait que l'ensemble des nombres décimaux n'est pas un ensemble discret n'est pas immédiatement disponible même à ce niveau avancé d'études mathématiques, ce qui motive le fait de conduire un travail spécifique sur ces questions dans le cadre de la formation des futurs enseignants

Recherche de contre-exemples

F. s'engage dans la recherche d'un point fixe, mais ne trouve pas immédiatement un contre-exemple pour la question 2.a), ce qui est le cas de la plupart des étudiants. F. va alors s'appuyer sur la construction de l'ensemble des nombres réels par les coupures pour explorer la question 2.b). La recherche d'un contre-exemple explicite apparaît comme difficile pour la plupart des étudiants qui peinent à mettre en œuvre une méthode systématique qui pourrait permettre soit de produire un contre-exemple s'il en existe, soit de comprendre pourquoi il n'y en pas si c'est le cas.

Dans cette situation, F. et les membres de son groupe vont laisser la question ouverte pour les décimaux et explorer la question pour les rationnels. Pour cela, ils vont s'appuyer sur le travail épistémologique fait dans la première partie de la situation pour identifier une méthode possible : chercher un contre-exemple où le point fixe de la fonction dans l'ensemble des nombres réels est un irrationnel. F. revient ensuite à la conjecture avec les décimaux et cherche un contre-exemple où le point fixe de la fonction est un rationnel non décimal.

Etude du cas réel

Après avoir résolu les cas 2a. et 2b. F. aborde la question 2.c. Elle est très vite convaincue que la conjecture est vraie et qu'on peut la démontrer avec le théorème des valeurs intermédiaires. Elle énonce le théorème d'existence d'un point fixe dans le cas des fonctions continues. Elle écrit dans son rapport

> « Comme ma preuve ne fonctionnait pas si les fonctions ne sont pas continues, j'ai cherché une fonction non continue en contre-exemple à la conjecture 2.c. La fonction non continue usuelle est la partie entière, j'ai essayé de construire un contre-exemple à partir de la partie entière. Cet essai est loin d'être concluant. »

Elle tente alors de résoudre le problème dans le registre graphique et n'arrivant pas à dessiner une fonction pouvant fournir un contre-exemple fait l'hypothèse la conjecture 2.c est vraie.

Ceci illustre un autre des apports potentiels de cette situation qui est de permettre de travailler en formation sur les processus de preuves et leurs liens avec la nature des objets avec lesquels on travaille. Ici, la recherche d'une preuve permet de s'interroger sur les propriétés des ensembles de nombres qui sont mobilisées le plus souvent sans être explicitées.

Lors de la synthèse collective, plusieurs étudiants pensent que la conjecture 2.c est fausse car « on a besoin de la continuité pour faire la preuve avec le théorème des valeurs intermédiaires ». D'autre comme l'étudiante F. font la conjecture que la conjecture est vraie mais n'ont pas de preuve. Plusieurs pistes sont proposées : construction d'une suite monotone, théorème des segments emboités. Ces méthodes bien conduites permettent de conclure pour le cas 2.c. Ce sont en effet des caractérisations de la complétude de l'ensemble des nombres réels. La démonstration que nous proposons en formation est celle présentée ci-dessus qui utilise le théorème de la borne supérieure, dont on a vu qu'elle est une conséquence directe de la construction de Dedekind. Cette année là, elle n'avait été proposée par aucun étudiant, ce qui est en général le cas lorsque nous proposons cette situation.

Conclusion des étudiants sur la situation de formation

Dans sa conclusion, F. note que l'étude de la construction de R par Dedekind a été une aide pour l'étude de ce problème. Un autre étudiant note la similarité des méthodes engagées par les élèves et les étudiants, pointant néanmoins la différence de temporalité. Il insiste également sur la relation entre preuve et recherche d'un contre-exemple, et sur le fait que ne pas trouver un contre-exemple ne signifie pas nécessairement qu'il n'y en a pas, ceci en écho aux difficultés rencontrées par la plupart des étudiants à produire un contre-exemple dans les cas 2.a ou 2.b. Il note que cette recherche de contre-exemples pourrait permettre aux élèves de lycée de comprendre l'importance des hypothèses.

L'intérêt du problème du point fixe pour poser des questions épistémologiques profondes et réfléchir sur le caractère complet de l'ensemble des nombres réels est mentionné dans plusieurs conclusions des rapports remis, la complétude de R étant reconnue comme le concept clé à l'œuvre dans ce problème.

Conclusion

La lecture de l'article de Pontille et a. (1996) et les aperçus sur le travail des étudiants proposés ici montrent que la situation du point fixe présentée ici est un bon candidat pour aborder la question du continu avec les élèves de lycée, de licence ou les enseignants en formation initiale ou continue. Il montre aussi la nécessité d'un travail explicite sur les propriétés spécifique des décimaux par rapport aux entiers, et donc d'une prise en compte explicite de la triade discret/dense/continu dans le curriculum, alors qu'aujourd'hui le concept de densité d'un ensemble de nombres en lui-même n'est le plus souvent pas travaillé explicitement. Les rapports des étudiants présentés ci-dessus soutiennent l'hypothèse que même pour des étudiants ayant réussi brillamment leurs études de licence mathématique, cette connaissance peut ne pas être immédiatement disponible. Bien que nous n'ayons pas fait d'enquête systématique, nos observations naturalistes au fil des années nous confortent dans cette hypothèse.

Parmi les éléments qui se dégagent de ce type de travail en formation initiale nous retiendrons les éléments suivants

1. Les connaissances théoriques des étudiants sortant de licence sur les différents ensembles de nombres sont peu assurées. Ceci invite à proposer en formation un travail permettant de les renforcer, afin de les préparer à envisager dans l'exercice de leur métier des situations propices aux apprentissages sur les nombres.
2. Le problème du point fixe que nous utilisons en formation articulé avec la construction de l'ensemble des nombres réels par Dedekind permet de retravailler ces connaissances dans une situation consistante sur le plan mathématique et épistémologique.
3. Un apport de la résolution de ce problème est le travail conduit sur les conjectures et les preuves en prenant explicitement en compte la nature des objets en jeu. Le travail met en lumière l'importance d'un va et vient entre recherche de preuves et exploration de contre-exemples possibles. Ces compétences qui doivent être développées avec les élèves ont en général été peu travaillées dans les cours de licence. Nous considérons qu'il est nécessaire de les développer dans le cadre de la formation.
4. La mise en perspective avec les travaux des élèves de l'expérimentation MATHSenJEANS permet d'ouvrir avec les étudiants un premier questionnement didactique, qui sera réinvesti et approfondi en appui sur d'autres situations de formation.

Références

Bolzano, B. (1817). Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. (Traduction de J. Sebestik) In: *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*. 1964, Tome 17 n°2. pp. 136-164.

Cauchy A.L., (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, première partie: Analyse algébrique*, Debure, Paris, reé-édition 1989, Jacques Gabay, Paris

Dedekind R. (1872). Stetigkeit und irrationale Zahlen, Introduction, Traduction française et notes par H. Benis Sinaceur dans Dedekind R. (2008), La création des nombres, Paris : Vrin.

Dedekind, R. (2008). *La création des nombres, introduction, traduction et notes par H. Benis Sinaceur, Vrin.*

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students, *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 338-361.

Durand-Guerrier, V. & Tanguay, D. (2018). Working on proofs as contributing to conceptualization - The case of IR completeness. In Stylianides, Andreas J., Harel, Guershon (Eds.) Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective. Springer, 19-34.

Durand-Guerrier, V., Vergnac M. (2017). Le continu entre intuition et formalisation - regards croisés épistémologiques et didactiques in Manuel Bächtold, Viviane Durand-Guerrier, Valérie Munier (coord.) *Epistémologie & didactique. Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales*, Besançon : Presses Universitaires de Franche Comté, 113-128.

Lelong-Ferrand, J. (1964). *Les notions mathématiques de base dans l'enseignement du second degré.* Paris: Armand Colin.

Lelong-Ferrand, J. & Arnaudiès, J.-M. (1977). *Cours de Mathématiques*, *tome 2*, *Analyse*, 4e edition. Paris: Dunod Université.

Longo, G. (2002). Le continu mathématique, de l'intuition à la logique, in Jean Petitot, Francisco Varela, Bernard Pachoud, Jean-Michel Roy (eds) *Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives*, Editions CNRS, Paris.

Perrin D. (2005). *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*, Paris: Cassini

Pontille M.C, Feurly-Reynaud, J. Tisseron, C. (1996) Et pourtant, Ils trouvent, Repères IREM n°24, 10-34

Tarski, A (1955) A lattice theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pacific J. Math. 5 (1955), 285-309*

Vergnaud G (1990). La théorie des champs conceptuels. In *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2, 133-170