EVALUER LA FORMATION A L'ENSEIGNEMENT : LE CAS D' « ENSEIGNER L'ANALYSE » A L'ESPE DE PARIS EN 2014-15 ET 2015-16

Jessica BRISAC, Renaud CHORLAY

Résumé. Nous présentons les sujets et les corrigés d'évaluations données en 2014-15-16 pour le cours « enseigner l'analyse » en M2 MEEF 2nd degré à Paris. L'objectif est premier est de mettre à disposition ce dossier documentaire. En outre, nous nous appuyons sur ce dossier pour esquisser une démarche réflexive relative à nos objectifs d'enseignement et aux formes que peuvent prendre des évaluations formatives ou sommatives en formation initiale d'enseignants, en lien avec la réflexion sur les Masters, sur la deuxième épreuve d'admissibilité du CAPES, et en parallèle aux travaux de la COPIRELEM.

Contexte et nature des documents

Contexte institutionnel

Dans le M2 MEEF de l'ESPE de Paris, l'UE intitulée « enseignements complémentaires » (entendre : complémentaires au stage en alternance) est consacrée aux apports disciplinaires et didactiques que les formateurs estiment nécessaires aux jeunes enseignants. Cette UE vaut 12 ECTS et se décline en 6 modules : enseigner la géométrie ; enseigner les statistiques et probabilités ; enseigner l'analyse ; nombres et algèbre ; logique et raisonnement ; modélisation. Elle est à articuler – mais cette articulation reste sans doute trop à la charge des formés – avec les autres éléments du M2 : avec le tutorat (les apports généraux pouvant être déclinés en petit groupe et en liaison directe avec la classe de chacun) ; avec le stage en responsabilité (les formateurs peuvent suggérer des pistes d'expérimentation en classe et intégrer aux cours des moments de retour sur expérience) ; avec la rédaction du mémoire, dans lequel les formateurs espèrent retrouver des échos non seulement des apports d'informations donnés dans leurs cours, mais, plus généralement, de la démarche réflexive – appuyée sur des résultats de recherche disponibles dans la littérature d'interface et de recherche – dans laquelle les enseignements complémentaires visent à faire entrer les jeunes enseignants. Pour les étudiants ayant suivi un M1 MEEF, les enseignements complémentaires prolongent leur première initiation aux questions pédagogiques et didactiques.

C'est dans ce cadre que des cours sur le thème « enseigner l'analyse » ont étés proposés en par Joris Mithalal et Renaud Chorlay (2014-2015), et par Jessica Brisac et Renaud Chorlay (2015-2016). Disposant de 5 séances de 3h, le choix a été de sélectionner une ou deux notions enseignées. La sélection s'est faite sur plusieurs critères. Premièrement, l'importance des notions dans les programmes. Deuxièmement, l'existence d'une littérature de recherche présentant des résultats stabilisés quant aux aspects épistémologiques et didactiques ; en particulier l'existence d'ingénieries didactiques bien documentées et la connaissance des représentations erronées et des difficultés les plus courantes chez les élèves. Enfin, nous souhaitions que l'étude de cas permette d'aborder des questions didactiques et pédagogiques de portée générale. En 2015-2016 nous avons retenu deux thèmes : d'abord l'introduction du nombre dérivé en classe de $1^{ère}$; ensuite l'enseignement d'une définition formelle de la limite d'une suite en terminale S. Dans les deux cas le travail a donc porté sur le lien entre l'intuition et le formel, mais dans des configurations différentes. Pour la dérivée, on s'intéresse au moment d'enseignement dans lequel la notion est à la fois rencontrée intuitivement et définie quasiment dans le même temps. Pour les suites, on travaille sur l'enseignement d'une définition formelle en terminale S, enseignement qui s'appuie sur une familiarité multiforme des élèves avec les limites de suites : connaissance d'exemples de référence, ancrage intuitif dans des études numériques ou graphiques, technologie connue (algèbre des limites, lien avec l'ordre). Le choix des deux thèmes mathématiques est aussi lié aux activités de recherche des formateurs (Groupe *Analyse*, 2015) : c'est conforme à l'esprit d'ouverture sur la recherche caractéristique d'un M2, et permet de faire travailler les étudiants sur des données de terrain de première main[1].

Cet article n'a pas pour objet de présenter directement le contenu de ces cours, ni d'exposer des éléments de didactique de l'analyse. Nous proposons un dossier documentaire formé des sujets d'évaluation écrite sommative proposée en fin de cours. Outre l'objectif évident de partage de ressources, nous poursuivons deux autres buts. Premièrement, en donnant les sujets ainsi que les corrigés que nous avons rédigés à l'intention des étudiants, nous renseignons indirectement sur les contenus et les objectifs des cours. Ensuite – et c'est sur ce second point que nous souhaitons mettre l'accent – nous voulons contribuer à la réflexion sur ce que peuvent être des évaluations écrites portant sur des connaissances pédagogiques, épistémologiques et didactiques dans le cadre d'une formation initiale d'enseignants. La question est d'actualité depuis la mastérisation de la formation initiale des enseignants (2010) ; elle l'est encore plus aux vues des évolutions récentes de l'esprit du CAPES de mathématiques. Rappelons les objectifs assignés à la seconde épreuve d'admissibilité :

> L'épreuve permet au candidat de mettre ses savoirs en perspective et de manifester un recul critique vis-à-vis de ces savoirs. Elle permet en outre d'apprécier, outre les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à se placer dans une optique professionnelle. Certaines questions font appel à une analyse réflexive pour mettre en perspective des notions au programme de l'enseignement secondaire et justifier des choix pédagogiques (MEN, 2015).

Durant ces deux années, la rédaction de sujets écrits d'évaluation d'un cours portant sur des éléments mathématiques, épistémologiques et didactiques nous a semblé un exercice à la fois stimulant et délicat, pour lequel nous avons largement eu l'impression d'improviser. Nous présentons le fruit de notre travail, moins à titre d'exemple que pour partager les questions que nous nous sommes posées. Nous avons largement puisé dans notre expérience de formateurs 1^{er} degré, en prenant modèle sur les questions posées dans les sujets du CRPE et les corrigés rédigés par la COPIRELEM. On peut rappeler ici le travail fait par la COPIRELEM travaille depuis de nombreuses années sur une classification des questions « didactiques » du CRPE (Celi, Grietens, Masselot et Tempier, 2015) **:**

A. Connaître les programmes et en saisir les enjeux
B. Analyser la pertinence du choix de documents pédagogiques
C. Analyser la pertinence du choix des supports, outils …

[1] Pour ce qui est de la définition formelle de la limite d'une suite, un projet de recherche a été initié en 2015-2016 par Cécile Ouvrier-Buffet (Cérep, Université de Reims) et Renaud Chorlay (LDAR, ESPE de Paris). S'y sont associés dans le cadre d'une expérimentation en 2016-2017 : Stéphanie Bridoux (Université de Mons), Sylvie Alory et Vincent Josse (Lycée La Fontaine, 75016).

D. Identifier des variables didactiques (question explicite ou implicite), justification attendue ou non
E. Identifier les objectifs, connaissances ou compétences visées
F. Identifier les connaissances, compétences pré-requises
G. Identifier les connaissances, propriétés mathématiques en jeu
H. Prévoir les procédures, difficultés, erreurs des élèves
I. Décrire et analyser les procédures, erreurs des élèves
J. Analyser les choix de l'enseignant pour la préparation ou la mise en œuvre d'une séance
K. Proposer ou analyser différents moments d'une séance
L. Proposer ou analyser des modalités de différenciation
M. Proposer ou analyser une synthèse orale ou une trace écrite
N. Proposer ou analyser des modalités d'évaluation

Dans ce qui suit, nous donnons les sujets puis notre corrigé (nous omettons les corrections des questions purement mathématiques). Nous complétons le corrigé par une tentative d'usage de la grille COPIRELEM. Le résultat de cette tentative sera ensuite discuté et prolongé en nous appuyant sur les échanges ayant eu lieu lors de l'atelier (enregistrés) et sur quelques copies d'étudiants.

Exercice 1 (2015-2016)

Le sujet

Quelques situations de rencontre avec la tangente à une courbe.

On se place dans la position d'un enseignant planifiant son cours en classe de Première S. Pour ce qui est du nombre dérivé, le programme (BO n°9, du 30/9/2010) prescrit : *Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite.*

En amont de la mise en place de cette définition, l'enseignant cherche des situations permettant aux élèves de rencontrer des tangentes à des courbes représentant des fonctions.

En parcourant les manuels et la littérature professionnelle[2], il trouve les propositions suivantes, qui lui semblent assez originales.

[2] Sources :
Pour les documents 1 et 2 : Maggy Schneider, *Difficultés d'apprentissage du concept de tangente*, Repères IREM n°5, octobre 1991, pp.65-82.
Document 3 : Laurent Vivier, *Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 15 (2010), pp.173-199.

Document 1 :

Voici une courbe [Fig.1]. Au point A, je plante un clou (perpendiculairement à la feuille de papier). Je tiens un autre clou, perpendiculairement à la feuille, avec sa pointe sur le point M. J'appuie une règle sur les deux clous [Fig.2] : je déplace le point M vers le point A, le long de la courbe, en maintenant la règle appuyée contre les deux clous. Décrire ce que fait la règle.

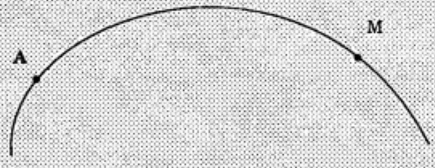


Fig. 1

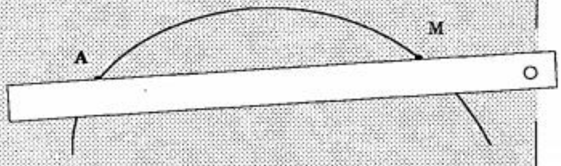


Fig. 2

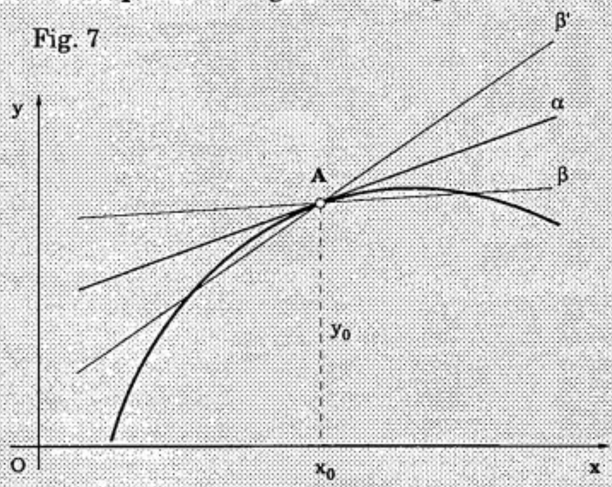
Document 2 :

Une définition proposée par Chilov pour la tangente en un point.

"La tangente en un point A *du graphique* y(x) *est définie en tant que droite* α *menée par le point* A *et telle que la courbe* y(x) *, en s'approchant du point* A *, pénètre dans tout angle de sommet* A *contenant la droite* α *et y reste, aussi petit que soit cet angle "*. [G. Chilov, 1974]

(NB : Il faut prendre "pénétrer" au sens large, au cas où la courbe serait une droite.)

Fig. 7



Document 3 :

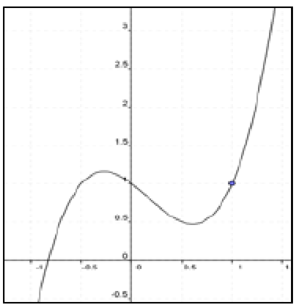


Figure 2-a : grille 0,5×0,5.

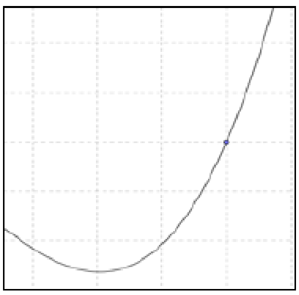


Figure 2-b : grille 0,05×0,05.

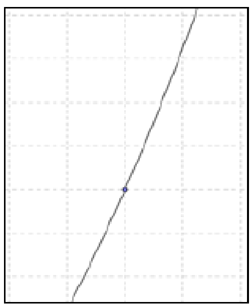


Figure 2-c : grille 0,02×0,02.

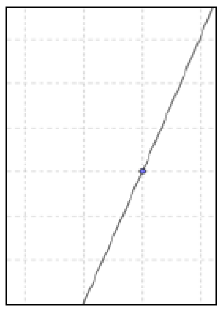


Figure 2-d : grille 0,01×0,01.

1. Laquelle (ou lesquelles) de ces 3 situations conduira le plus directement à la définition du programme ? Justifiez rapidement.
2. L'enseignant sait que ses élèves ont déjà une certaine habitude de la tangente à un cercle.

a. Citer deux propriétés de la tangente à un cercle en un de ses points qui ne se généralisent pas à la tangente à une courbe représentative de fonction.

b. Les trois aspects de la tangente décrits dans les documents 1, 2 et 3 s'adaptent-ils au cas du cercle ? Aucune justification n'est demandée.

3. Parmi les moyens pour motiver l'étude de la tangente à une courbe, deux sont issus de l'optique géométrique :

   Motivation (1) : étudier la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir courbe,

   Motivation (2) : étudier l'horizon visuel d'un observateur ponctuel placé sur une surface courbe faisant obstacle à la vision.

   Ces deux motivations ont-elles des liens avec les situations présentées dans les trois documents ?

4. L'enseignant craint que la situation 3 ne conduise les élèves à penser que les courbes des fonctions dérivables sont faites de petits segments. Démontrer que la courbe représentant la fonction carré ne contient aucun segment, même petit, au moyen d'arguments entendables en 1ère S.
5. Citer un avantage de la situation 2, en termes de définition.
6. Décrire rapidement une approche du nombre dérivé qui ne repose ni sur la notion de tangente ni sur l'optique.

Le corrigé proposé

1. La situation n°1 y conduit assez rapidement : il faut cependant passer par une série de changements de cadres et de registres : on part d'une situation mêlant géométrie non-repérée (une courbe) et éléments *à* mathématiser (règle matérielle, mouvement), on devra passer à une géométrie repérée (introduction d'un repère, d'une fonction représentée par la courbe, repérage des points par des couples de réels aux statuts divers…).

   La situation n°2 se prête mal à un passage au calculatoire.

   La situation n°3 y conduit mais avec au moins une étape de plus que dans la situation 1, car il faut encore introduire un point auxiliaire. Cependant, contrairement à la situation 1, on est d'emblée dans le cadre fonctionnel, dans son registre graphique.

   Codage COPIRELEM : B, D

2.a Propriété 1: perpendiculaire au rayon passant par un point du cercle.

   Propriété 2 : droite coupant le cercle en un seul point

   Propriété 3 (éventuellement) : droite ayant un point commun avec le cercle et telle que le cercle se trouve entièrement dans un demi-plan qu'elle délimite (stabilité de la position relative). Variante locale possible.

   Codage COPIRELEM : G, H

   2.b Oui pour les trois. Codage *COPIRELEM : ?*

3. Les situations 1 et 2 peuvent être motivées par l'étude de l'horizon visuel d'un observateur placé en A, le faisceau des droites passant par A (matérialisées par une règle ou non) est le faisceau des directions des rayons visuels issus de A (ou des rayons lumineux pouvant atteindre A) lorsque la courbe fait obstacle.

   La situation 3 peut-être motivée par (1) : en zoomant, on « voit » sur quel miroir « plan » ou quasi-plan un rayon lumineux tombant sur le point marqué de la courbe-miroir est réfléchi.

   Codage COPIRELEM : ?

4. Argument n°1 : si a et b sont deux nombres réels distincts quelconques, on montre – par exemple – que le milieu du segment reliant A(a,f(a)) à B(b,f(b)) est strictement au-dessus de la courbe. En effet, son abscisse est $\frac{a+b}{2}$, et son ordonnée $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$, alors que le point de la courbe d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ a pour ordonnée $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$. La différence est $\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, strictement positive.

   Argument n°2 : l'étude de l'intersection d'une droite et d'une parabole conduit à une équation du second degré, qui n'a donc au plus que deux solutions, et en aucun cas une infinité.

   Codage COPIRELEM : H, M

5. L'approche usuelle contient une sorte de cercle vicieux : on approche le nombre dérivé en introduisant d'abord la tangente à une courbe fonctionnelle, mais cette dernière notion n'est en fait définie elle-même qu'au moyen du nombre dérivé. La situation n°2 a l'avantage de donner une définition véritable et autonome de la notion de tangente à une courbe. [remarque : cet avantage ne contrebalance sans doute pas la difficulté qu'on aurait à partir de cette définition pour aller vers le nombre dérivé].

   Codage COPIRELEM : ?

6. Citons-en deux :

   Approche cinématique: la fonction représentant l'abscisse d'un point mobile (la variable étant le temps), on cherche la vitesse instantanée à un instant donné. Plus généralement, regarder le taux de variation comme une vitesse (algébrique) moyenne, et passer à la vitesse instantanée.

   Approche numérique : recherche de meilleure approximation affine locale, par exemple pour $\frac{1}{1+x}$ ou $\sqrt{1+x}$.

   Codage COPIRELEM : ?

Exercice 2 (2015-2016)

Le sujet

Comportement asymptotique de suite, à deux niveaux d'enseignement

Partie I. Etude d'un sujet de Bac S

L'exercice suivant a été donné au baccalauréat S à la session de juin 2005.

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

① deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

② si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

③ toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Questions sur la partie A :

1. Rédiger un corrigé soigné de la démonstration demandée.
2. Parmi les trois « résultats » rappelés au début de l'exercice, le ou lesquels sont démontrables en TS dans le cadre du cours ? Justifier rapidement, sans aller jusqu'à donner la ou les démonstrations éventuelles.

Questions sur la partie B :

3. Rédiger un corrigé rapide pour la partie B.
4. Que pensez-vous des deux réponses suivantes, pour l'affirmation n°3 :

   « Faux. Les rôles des suites (u_n) et (v_n) étant symétriques, les deux suites ont nécessairement le même comportement ».

   « Faux. Par exemple, si *u* commence par les valeurs 2 puis 1, alors *v* commence par les valeurs -1 puis -2, la suite des *v* n'est donc pas croissante. »

Partie II. Au collège

Voici un exercice proposé dans une classe de collège.

1.
   a. *Tracer un carré C_1 de côté 10 cm. On construit un quadrilatère C_2 ayant pour sommets les milieux des côtés de C_1.*
   b. *Justifier que C_2 est un carré.*
   c. *Calculer le périmètre P_2 du carré C_2.*
   d. *En déduire l'aire A_2 du carré C_2.*
2. *Selon le même procédé, on construit les carrés C_3, C_4, C_5, etc…*
   a. *Compléter votre figure jusqu'à C_5.*

b. Calculer les périmètres P_1, P_2 et P_3 des carrés C_1, C_2 et C_3.
c. Calculer les aires A_1, A_2 et A_3 des carrés C_1, C_2 et C_3.
d. Que peut-on prévoir pour l'aire A_{12} ?
e. Un élève pense qu'au-delà du 100^e carré, les aires sont nulles. Qu'en pensez-vous ?

1. Quel peut-être l'objectif de la question 2. d. ?
2. Quel peut-être l'objectif pédagogique de la question 2. e. ?
3. L'enseignant se rend compte que les rares suites rencontrées au collège sont toujours monotones. Il souhaite anticiper une conception erronée sur les suites convergentes bien documentée dans les travaux didactiques.
   a. Quelle est cette conception erronée ?
   b. Proposer un autre exercice (ou une variante de celui-ci) de niveau collège permettant de rencontrer une suite non monotone.

Le corrigé proposé

Partie I

2. Le (1) n'est pas démontrable puisque c'est la définition. Le (2) est démontrable : s'il existait un rang N pour lequel $u_N > v_N$, alors les hypothèses de monotonies et une démo par récurrence garantissent que cet ordre est conservé à partir du rang N ; au-delà de ce rang $u_n - v_n \geq u_N - v_N > 0$, ce qui donne à l'infini l'absurdité suivante $0 \geq u_N - v_N > 0$. (3) n'est pas démontrable, c'est équivalent à la complétude de **R** qui est bien entendue admise au Lycée.
   Codage COPIRELEM : ?
4. Réponse 1 : c'est vrai que les rôles des u et des v sont symétriques, au sens suivant : les hypothèses « les u sont non nuls et $v = -2/u$ » conduisent à « les v sont non-nuls, et $u = -2/v$ ». C'est bien observé, l'argument est cependant incorrect. Par exemple, si on avait « $v_n = 1/u_n$ » les rôles seraient aussi symétriques, pourtant si (u_n) est strictement positive et décroissante alors (v_n) est strictement positive et croissante.
   Réponse 2 : inhabituel mais juste, modulo le fait (trivial) que toute donnée de deux valeurs successives peut se prolonger en une suite monotone.
   Codage COPIRELEM : I

Partie II

1. La question 2d quitte le strict domaine du calcul de grandeurs dans un cadre géométrique : par le choix du verbe « prévoir » au lieu de « calculer », et par le choix du rang $n = 12$, qui ne permet plus une représentation sur papier. Les élèves doivent repérer la régularité dans le mode de construction du successeur en fonction du prédécesseur (les suites sont géométriques), et utiliser leurs connaissances sur la notion de puissance pour court-circuiter le calcul de toutes les étapes jusqu'à 12 (puis 100). Il s'agit d'un travail relevant de l'algèbre, dans le prolongement des exercices sur les *patterns* (de type « carré bordé »).
   Codage COPIRELEM : D, E
2. On peut aller jusqu'à un travail préparant l'analyse si un débat s'engage à propos de la question 2.e : les valeurs de C_{100} et A_{100} sont-elles nulles ? (question qui ne se posait sans doute pas pour $n = 12$).
   - Les figures ne sont pas constructibles à la main ; elles ne le sont pas en géométrie dynamique, sauf à créer une macro. Mais on sent bien qu'elles seront minuscules.

La géométrie perceptive conduirait à une réponse du type : valeurs nulles, ou quasi nulles, ou infiniment petites, ou invisible à l'œil nu.

- Par raisonnement on montre qu'elles ne sont pas nulles :
  - On a démontré à la question 2 que la procédure conduisait à un « vrai » carré ; cette vérité démontrée ne dépend pas de la taille de la figure initiale.
  - Les deux suites ne s'annulent jamais, car on y multiplie des nombres strictement positifs.

L'enseignant peut souhaiter prolonger cette amorce en demandant si on peut rendre les valeurs de C et de A « aussi petites qu'on veut » ? Un travail de recherche de « seuils » à la calculatrice ou au tableur (du type : peut-on rendre A inférieur à 10^{-2}, à 10^{-3}, à 10^{-4}… ?), ressemblerait beaucoup à un travail devenu courant au Lycée.

Codage COPIRELEM : D, E, K (pour le cas ou la modalité « débat » ou les prolongements possibles seraient évoqués).

3. On sait que les élèves croient souvent que l'hypothèse « suite positive tendant vers 0 » implique la décroissance de la suite (éventuellement à partir d'un certain rang) : c'est le phénomène de « réduction monotone ». Au lycée, il faudra veiller à combattre cette représentation erronée, par exemple en demandant un contre-exemple.
   Codage COPIRELEM : H

Exercice 3 (2014-2015)

Le sujet

L'exercice suivant a été proposé en 2003 par l'Inspection Générale de Mathématiques à titre d'exemple de questions pour la Baccalauréat S

Exercice n° 7 (enseignement obligatoire)

NB : Les quatre propositions peuvent Îêtre examinées indépendamment les unes des autres.

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier dans chaque cas.

1. La suite (v_n) est bornée par 0 et 1.
2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
3. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

1. Quelles sont les compétences générales rencontrées dans un exercice du type « Vrai / Faux ? Justifiez » de ce type ?
2. Donner pour chacun des quatre items une réponse correcte (rapidement) justifiée.

Le corrigé proposé

1. Compétences générales: (1) analyse logique de l'énoncé (ici, identifier des implications, comprendre la quantification universelle implicite cachée derrière

l'article défini « la »), (2) connaissance des valeurs épistémologiques différentes des exemples et des contre-exemples, relativement aux affirmations quantifiées universellement ou existentiellement (3) prise d'initiative dans l'exploration d'une situation (sur papier-crayon, à la calculette etc.) et capacité à construire des contre-exemples (par des formules, des graphiques …) ou à puiser dans un répertoire mémorisé, (4) citer à propos un résultat théorique de cours peu suggéré par l'énoncé (connaissance disponible et pas seulement mobilisable).
Codage COPIRELEM : ?

Exercice 4 (2014-2015)

Le sujet

Un professeur souhaite faire travailler ses élèves de terminale sur le calcul de primitives. Il propose la fiche suivante :

Au cours de l'année, nous avons vu les formules pour dériver des fonctions données sous les formes suivantes :

A. $\sqrt{u(x)}$ (avec $u > 0$) **B.** $(u(x))^n$ (n entier relatif non nul)

C. $e^{u(x)}$ **D.** $\ln(u(x))$ (avec $u > 0$) **E.** $u(ax+b)$ (a, b deux nombres réels)

où u désigne une fonction dérivable sur le domaine considéré.

Dans chacun des 5 cas, rappeler ci-dessous la formule de dérivation.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, indiquer en dessous, parmi les formules A, B, C, D, E, celle qui vous semble pourvoir être utilisée « à l'envers » pour trouver une primitive. Si vous pensez qu'aucune de ces 5 formules ne peut être utilisée directement, écrivez « aucune » sous la fonction.

$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ *Je pense utiliser*:	$g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ *Je pense utiliser*:	$h(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2}$ *Je pense utiliser*:	$i(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ *Je pense utiliser*:
$j(x) = \sin(\pi x)$ *Je pense utiliser*:	$k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ *Je pense utiliser*:	$l(x) = e^{-2x+1}$ *Je pense utiliser*:	$m(x) = e^{x^2}$ *Je pense utiliser*:

a. Un élève répond D pour la fonction f, et « aucune des 5 » pour les autres. Pouvez-vous faire une hypothèse sur l'origine de sa réponse ?
b. Quelle(s) difficulté(s) peut-on attendre à propos de la fonction j ?
c. Quelle difficulté peut-on attendre à propos de la fonction k ?
d. Sous la fonction m, beaucoup d'élèves ont répondu C. Le professeur leur demande alors d'écrire la primitive à laquelle ils pensent. Certains élèves écrivent $M(x) = 2xe^{x^2}$, d'autres écrivent $M(x) = e^{x^2}$, d'autres $M(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.
Pouvez-vous faire une hypothèse sur les origines de chacune de ces réponses ?

e. Lors de la correction collective, plusieurs élèves proposent de noter « les fonctions h et m n'ont donc pas de primitive ». Qu'en pensez-vous ?

Le corrigé proposé

a. Si la consigne "utilise à l'envers" est comprise comme « directement » ou « sans autre étape » ou « sans adaptation », seul le cas f se traite dans le cadre de cette consigne (c'est exactement u'/u). *Codage COPIRELEM : D, H*

b. Non reconnaissance de la forme $u(ax+b)$ pour deux raisons: (1) il manque le b (2) π n'est pas toujours vu comme un nombre, une constante. Codage COPIRELEM : D, H

c. La fonction k se présente comme un quotient, or on ne l'intègre pas par les formules donnant des dérivées sous forme de quotient (B avec n négatif, et D), mais en réécrivant la fonction comme un produit pour utiliser B (avec $n = 2$). *Codage COPIRELEM : D, H*

d. Réponse $\mathrm{M}(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$: l'élève dérive au lieu de chercher une primitive ; interprétation possible : comme il suppose – à tort, mais le contrat est fort – qu'on attend de lui un calcul, il fait celui qu'il sait faire.
   Réponse $M(x) = e^{x^2}$: probablement usage abusive de l'invariance de l'exponentielle par dérivation ; confusion entre ex et eu(x).
   Réponse $\mathrm{M}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$: usage abusif de la technique de compensation (par division) des facteurs apparaissant lors de la dérivation. Bien entendu, la linéarité de la dérivation ne garantit la légitimité de cette technique que pour les facteurs constants.
   Codage COPIRELEM : I

e. Confusion entre « je ne sais pas trouver de formule pour une primitive » et « il n'existe pas de fonction primitive ». Le théorème d'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle est énoncé en terminale (et partiellement justifié).
   Codage COPIRELEM : I

Ce que suggère l'usage de la grille COPIRELEM

Rappelons que cette grille peut avoir plusieurs usages : un usage descriptif, pour analyser les divers sujets de CRPE dans un cadre commun permettant – par exemple – la comparaison, ou l'identification d'angles morts ; un usage dans l'aide à la conception de sujets, par exemple en permettant de distinguer des objectifs de formation relevant du M1 et d'autres du M2, ou en invitant à être attentif à la variété des questions posées ; un usage *méta*, lorsque l'utilisation de la grille vise à en éprouver la qualité d'outil descriptif ou d'appui pour la conception, pour ensuite la modifier ou la raffiner. Nous en avons ici un usage descriptif.

Notons tous d'abord que certains types de questions se retrouvent souvent dans ces évaluations, et ne posent pas trop de difficulté de codage. Il s'agit de l'identification de variables didactiques (D), de la prévision (H) ou de l'analyse (I) de procédures ou – le plus souvent – d'erreurs d'élèves (ici d'élèves potentiels), de l'identification de l'objectif d'un exercice ou d'une question (E). Certains exercices sont très homogènes quant aux types de questions ; ainsi, l'exercice 4 ne comporte quasiment que des questions codables D, H ou I. Dans d'autres sujets la gamme de type de questions est beaucoup plus large, mais cette différence tient sans doute à des aspects contingents (la durée de l'épreuve écrite était plus longue en 2015-2016 qu'en 2014-2015). Dans d'anciennes versions de la grille COPIRELEM[3] apparaissait une catégorie « mettre en œuvre des connaissances ou des compétences mathématiques ». Ce type de codage ne poserait pas non plus de problème ici,

[3] http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1306

certaines questions en relevant sans ambiguïté (questions 2.I.1 et 3.1), ce qui ne signifie par que notre objectif en les posant est uniquement d'évaluer des connaissances mathématiques. Ce dernier point a été discuté lors de l'atelier, nous y reviendrons plus bas.

Cette fréquence des questions relevant des premières catégories de la liste et la relative rareté des questions relevant des dernières catégories est très semblable à ce qui est observé par la COPIRELEM (Celi *et al.*, 2015). La fin de la liste portant plus sur la mise en œuvre en classe – organisation du temps pédagogique, synthèse de cours, différenciation, évaluation – ces questions sont sans doutes plus adaptées pour des M2 que pour des M1, mais cela ne peut être le seul facteur ici puisqu'il s'agit d'évaluations de M2. On peut formuler une hypothèse de double origine de cette réticence à poser des questions écrites d'évaluation de ces aspects : premièrement, l'apport de la littérature didactique sur laquelle le cours s'appuie est sans doute moins riche et moins stabilisé, tant sur le contenu (par exemple : les conceptions erronées, les procédures usuelles) que sur les outils théoriques d'analyse. Deuxièmement – et c'est une conséquence du premier point – nous nous sentirions sans doute plus en difficulté pour noter des réponses à des questions s'éloignant autant de la vérification de la familiarité des étudiants avec les éléments transmis en cours.

Pour un grand nombre de questions nous avons préférer coder par un « ? » pour dire qu'elles ne nous semblent pas relever très nettement d'un type considéré par la COPIRELEM, et cela nous semble pointer vers des différences entre l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au lycée. Par exemples, plusieurs questions visent à évaluer la capacité des étudiants à percevoir un certain *relief épistémologique* permettant de distinguer différents statuts des énoncés : caractéristiques d'une définition (1.5), différence entre un axiome, une définition et une propriété démontrable (2.2), distinction entre un théorème d'existence et une procédure de détermination explicite (4.e), évaluation de la qualité d'un argument inhabituel (2.I.4). En outre, un grand nombre de questions porte sur des connaissances relatives à des notions mathématiques mais qui dépassent la simple vérification des connaissances mathématiques sur ces notions. Ainsi, la plus grande partie de l'exercice 1 nous semble en relever. Nous y évaluons les traces des séances de cours ayant porté sur différents aspects des notions de tangente et de nombre dérivé : lien avec la tangente au cercle (obstacles épistémologiques ou didactiques, extensions avec ou sans accident), variété des situations pouvant motiver une rencontre avec la notion (modélisation de phénomènes optiques ou cinématiques, lien entre dérivation et approximation numérique).

S'il s'agit de rendre raison de la présence de nombreux « ? », nous pouvons formuler trois pistes de travail, sans chercher à dépasser ici le stade de l'allusion. Premièrement, il est possible que cela reflète des spécificités des mathématiques enseignées à la fin du secondaire (Robert, 1998). Deuxièmement, la présence de questions d'analyse de contenu-à-enseigner nécessitant de croiser des approches mathématiques, épistémologiques et didactiques peut s'analyser dans le cadre des travaux s'intéressant à la classification des connaissances mathématiques pour l'enseignant ; ces questions nous semblent porter sur les « connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement » (*specialized content knowledge* dans la terminologie anglo-saxonne), qui ne relève ni des connaissances mathématiques générales (celles du mathématicien) ni des connaissances spécifiquement pédagogiques ou didactiques (Clivaz, 2016). Troisièmement, il serait sans doute possible d'enrichir la grille COPIRELEM pour mieux cerner les questions portant sur ces aspects, qui ne sauraient être tous spécifiques de l'enseignement secondaire.

On remarquera aussi dans nos sujets l'absence de questions d'analyse de documents du type : exercice d'application directe, exercice d'entraînement tiré d'un manuel. Le travail proposé porte soit sur des documents destinés aux élèves mais relevant de formats moins routiniers (exercices 2, 3 et 4) ou de documents un peu bruts destinés à nourrir – en amont du temps de la classe – la réflexion pédagogique et didactique de l'enseignant (exercice 1). Bien que cela ne relève pas d'une décision explicite des formateurs, cela n'est pas sans signification. Premièrement, il va sans dire que le travail régulier d'analyse de documents « routiniers » nous semble nécessaire en formation d'enseignants, et que des outils théoriques généraux peuvent être apportés par les formateurs pour accompagner les M2 dans leur démarche d'enseignants réflexifs. Ainsi, à l'ESPE de Paris, une proportion non négligeable des formateurs utilise les outils d'analyse de tâches proposés par (Robert et Rogalski, 2002). Nos choix de sujets d'évaluation en analyse ne reflètent donc pas le peu d'importance que nous accorderions à ces aspects, mais la volonté de ne pas nous y limiter. Outre le goût des formateurs, cela dit sans doute aussi quelque chose des spécificités de l'enseignement mathématique à la transition entre le secondaire et le supérieur, en particulier quant à la nature unificatrice (pour la dérivée) et formalisatrice (pour la définition de la limite) des notions enseignées. Deuxièmement, le travail sur les exercices de routine constitue la base des sujets d'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES, nous souhaitions donc mettre l'accent en M2 sur l'analyse de documents ou de moments d'enseignements différents. Troisièmement, ces sujets d'évaluation prolongent les contenus de cours non seulement parce qu'ils portent sur des contenus mathématiques rencontrés en formation (la dérivation, les limites), mais en ce que nous voyons dans le temps passé sur les évaluations un temps supplémentaire de formation. C'est en grande partie ce qui motive le choix de faire travailler les étudiants sur des formats de travail non routiniers : démonstration mathématique demandée aux élèves (« Restitution Organisées des Connaissances » du sujet de bac 2005 dans notre exercice 2.I) ; exercice du type « vrai/faux. Justifier » (2.I et 3); exercice d'analyse de formes – ici, des expressions de fonctions à analyser au moyen d'un répertoire clos et explicite de formules de dérivation – invitant les élèves à une démarche diagnostique et à une objectivation des tactiques de résolution (exercice 4). Sur ce dernier point, nous aurions pu poser des questions complémentaires dépassant le thème particulier de la recherche de primitive(s), en particulier sur la pertinence de ce type d'exercice dans d'autres contextes mathématiques, au collège (résolution d'équation, calcul algébrique) et au lycée (recherche de l'écriture adaptée d'une fonction du second degré, calcul de dérivées, recherche de limites). Pour le dire tout net, nous souhaitons valoriser ces types d'exercice auprès des jeunes collègues et profitons du temps de l'évaluation pour augmenter leur exposition à ces formats.

Questions soulevées lors de l'atelier

Lors de l'atelier les participants ont été invités à former des groupes, chaque groupe recevant l'un des exercices. Ils étaient demandé de préparer une présentation aux autres groupes du contenu du sujet qui leur était soumis, ainsi que des éléments sur les points suivants (1) quel serait votre corrigé ? (2) comment classeriez-vous les différentes questions posées (nous proposions une classification plus sommaire que celle de la COPIRELEM mais dans le même esprit) ? Lors de la phase d'échange les discussions ont été riches. Revenons sur trois points saillants et de portée générale.

La question de la pertinence des questions purement mathématiques a fait l'objet d'un débat assez vif, par exemple à propos de 2.I.1, 2.I.3 et 3.2. La discussion a permis de distinguer deux aspects assez différents sur lequel un consensus a été globalement atteint.

D'une part la présence de questions mathématiques semble à la fois *légitime* et *nécessaire*. Légitime pour au moins deux raisons : parce que le cadre est celui d'une formation d'enseignants de *mathématiques* – c'est alors la correction mathématique de la réponse qui est évaluée ; parce que le cadre est celui d'une formation d'*enseignants* de mathématiques, qui doivent pouvoir préparer des cours ou des corrigés de contrôle – c'est alors une compétence professionnelle (relative à des gestes routiniers pour l'enseignant) qui est travaillée et évaluée.

Ce deuxième aspect aurait pu être plus mis en avant en formulant les questions sous la forme « proposez un corrigé pour une classe de … ». Ce travail d'étude mathématique des exercices constitue en outre un préalable nécessaire à toute analyse réflexive de nature pédagogique ou didactique.

D'autre part, de nombreux participants à l'atelier ont fait part de leur réticence à poser ce genre de question en M2, en grande partie parce qu'elles sont souvent mal ressenties par les professeurs stagiaires ; des participants ont parlé de « malaise » ou de « tension ». Il est vrai que, sortant des concours, les M2 disent souvent leur lassitude devant les évaluations à contenu mathématique. Ils réagissent aussi parfois vivement à tout ce qui contribue à les fragiliser dans leur transition d'identité professionnelle – d'étudiant vers enseignant – ou à souligner l'ambiguïté de leur statut lorsqu'ils sont en formation à l'ESPE en tant que fonctionnaires stagiaires.

Une autre point a fait l'objet d'un échange plus bref mais de porté générale, celui de la distinction entre aspects *pédagogiques* et aspects *didactiques*. En particulier, il a été relevé que dans la question 2.II.2 « Quel peut-être l'objectif <u>pédagogique</u> de la question 2. e. ? » (nous soulignons), le terme *didactique* aurait sans doute été préférable au vu de la réponse attendue dans le corrigé. Si un consensus a été atteint sur ce cas particulier, les questions générales sous-jacentes n'ont pu qu'être effleurées : en quoi consiste la distinction pour un chercheur en didactique ? Si cette première question admet une réponse nette, une seconde question est : la connaissance de cette distinction est-elle un objectif de formation d'enseignants en formation initiale ?

Enfin, la discussion a porté sur l'évaluation des copies, de nombreux participants à l'atelier disant leur difficulté à se projeter dans le rôle de correcteurs pour de telles évaluations. Nous avons alors pu apporter quelques éléments nous appuyant sur une petite sélection de copies. Rappelons qu'il s'agit ici de rapporter certains éléments de notre pratique de formateur pour y faire retour de manière réflexive en dialogue avec la communauté CORFEM.

L'exemple suivant nous semble montrer que notre action de formation n'a pas été vaine. En réponse à la partie II (collège) de l'exercice 2 :

1. L'intérêt de la question 2d est d'essayer de leur faire intuiter (sic) une formule à partir de quelques valeurs. En effet faire le calcul jusque C_{12} est possible mais très long, et le carré risque d'être mal visible sur la figure.
2. La question 2e permet d'introduire la notion de limite et de leur montrer que même si les aires sont de plus en plus petites elles ne sont jamais nulles. La manière dont la question est posée permet également de faire travailler leur esprit critique et de permettre le débat.
3. a. Cette conception erronée est la réduction monotone : comme quoi une suite convergente devient monotone à partir d'un certain rang.

L'étudiant est manifestement capable d'identifier des variables didactiques et l'impact visé sur les représentations des élèves et les procédures accessibles, de distinguer des formules obtenues par calcul et des formules conjecturées, d'utiliser des connaissances vues en cours (la « réduction monotone »), de se projeter dans différents formats de travail dans la classe, y compris lorsqu'ils sont peu routiniers (débat dans la classe sur une proposition à valider ou invalider). Sur ce dernier aspect, nous avons aussi valorisé la mention des « puissances » et du « tableur » dans :

1. La question 2.d peut avoir pour objet, en faisant travailler l'élève sur les puissances, de le préparer à la notion de suite. Cela peut à mon avis se prêter à la justification de l'intérêt d'utiliser le tableur.

On voit dans ces deux cas que nous n'attendions pas que les étudiants disent tout ce qu'il y a dans le corrigé, mais que nous valorisions la capacité à dire avec précision quelque chose de pertinent. L'usage d'un lexique provenant de théories didactiques générales – quand bien même il aurait été utilisé en cours – n'était pas considéré comme nécessaire.

Nous sommes cependant souvent perplexes. Par exemple face à :

2. Cette question permet d'ouvrir un débat à propos de la limite de cette suite (pour des élèves, l'évolution, à long terme, de l'aire). Peut-on atteindre 0 en divisant un grand nombre de fois un nombre par 2 ? Ou y aurait-il toujours un reste ? Peut-on aller jusqu'à l'infini de cette manière ? Ou est-ce qu'on s'arrêtera à un moment ? Les élèves ont en général de nombreuses interrogations à ce sujet.

La réponse reste dans l'implicite quant au rôle de la variable didactique $n = 100$. Si l'invitation au format « débat scientifique » contenue dans la formulation de la question est bien relevée, on aurait aimé que l'étudiant apporte des éléments sur été son rôle dans ce débat, en identifiant en particulier les aspects mathématiques ou épistémologiques sur lesquels il aurait pu s'appuyer pour guider un tel « débat ». Nous aurions pu ici inciter les étudiants à réfléchir à ces aspects en insérant une question du type M : « proposer une synthèse orale ou une trace écrite ».

Quelques extraits de réponses à la question 1.1 permettent d'illustrer non seulement la variété des réponses, mais les éléments objectifs sur lesquels asseoir une évaluation notée. La question était : « Laquelle (ou lesquelles) de ces 3 situations conduira le plus directement à la définition du programme ? Justifiez rapidement ». Par exemple :

1. La situation 1 conduit le plus directement à la définition du programme, car la tangente à un point est vue comme la droite qui passe par ce seul point. Dans le cas de la situation 1, la tangente sera la limite de la droite lorsque le point M tend vers A.

nous semble être une réponse insatisfaisante : aucune comparaison des trois documents permettant de justifier l'affirmation « la situation 1 conduit le plus directement… », description hasardeuse de la tangente comme « la droite qui passe par le seul point » (représentation erronée à combattre plutôt qu'à encourager !). Le contraste est frappant avec une réponse suivante :

1. Le nombre dérivé est défini comme la limite du taux d'accroissement dans le programme.
    - Le document 1 propose une approche intuitive avec une règle qui se rapproche de la tangente d'une courbe et il n'y a pas de repère cartésien.
    - Le document 2 passe aussi par la tangente et propose une définition atypique de celle-ci. Le repère dessiné ne permet pas de calculer des taux d'accroissement.
    - Enfin, le document 3 propose une courbe dans un repère cartésien (d'un logiciel de géométrie dynamique) où on peut calculer une succession de taux d'accroissements de plus en plus précis.

Ici la consigne de comparaison des trois documents et d'évaluation de la distance entre la situation et l'objectif est respectée ; une variable didactique est identifiée, en l'occurrence la présence ou non d'un repère suggérant le cadre de la géométrie repérée et des équations de courbes (droites incluses).

Ces évaluations n'échappent pas au phénomène universel consistant – pour celui qui compose – à essayer de deviner la réponse qui fera plaisir au correcteur. En cours, les situations 1 et 3 avaient été étudiées en détail, et les étudiants ont bien senti que nous avions une préférence pour la troisième (Groupe *Analyse*, 2015). Cela ne signifie pas que nous avons reçu positivement une réponse comme :

1. Le nombre dérivé étant la limite du taux d'accroissement le document 3 semble le plus approprié : une fois la courbe suffisamment agrandie ; c'est-à-dire quand elle ressemble à une droite, le taux d'accroissement sera facile à calculer, et sera égal à la pente de la droite.

Outre l'absence de comparaison à l'appui de la conclusion, on reste songeur devant l'idée que « le taux d'accroissement sera facile à calculer ». Le fait que ce passage au calculatoire demeure le point le plus problématique de cette séance est bien documenté dans la littérature, et avait été discuté en cours, vidéo à l'appui.

Globalement, l'exercice de notation ne nous a pas semblé plus difficile que lorsque nous corrigeons des copies de type CRPE. Des critères assez robustes permettent de se faire une idée sur chaque réponse : (1) correction mathématique (2) bonne compréhension de la question, (3) trace explicite des apports de cours (la plupart des questions posées étaient en fait des questions de cours), (4) présence d'éléments précis et pertinents. Il est cependant vraisemblable que cette correction aurait été beaucoup plus difficile à faire pour des collègues n'ayant pas fait ce cours et écrit le sujet d'évaluation et son corrigé. Cette forte « dépendance au contexte » limite sans doute la transposabilité de l'expérience et invite à la prudence quant à l'apport de ce retour réflexif sur notre pratique de formateurs à la réflexion sur ce que peut être une évaluation de compétences « professionnelles » et « pédagogiques » à l'écrit du CAPES.

Bibliographie

Celi, V., Grietens, G., Masselot, P. et Tempier F. (2015). Elaboration d'un sujet d'évaluation de connaissances en Master MEEF. Dans C. Ouvrier-Buffet (dir.) *Actes du 42ème colloque de la COPIRELEM* (208-236). Besançon : IREM de Besançon.

Clivaz S. (2016). Connaissance mathématique des enseignants et enseignement de l'algorithme de multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques 36(2*), 231-261.

Groupe *Analyse* (2015). *Autour de la notion de dérivée en classe de 1ère scientifique* (brochure n°97). Paris : IREM de Paris, brochure n°97.
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS15003.pdf

MEN (2015). Arrêté du 2 novembre 2015 modifiant l'arrêté du 19 avril 203 fixant les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré. Journal officiel de la République française, 8 décembre 2015.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en didactique des mathématiques, 18(2)*, 139-190.

Robert, A. et Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et la gestion de classe. *Petit x, 60*, 6-25.