LA PLACE DE LA STATISTIQUE ET DES PROBABILITÉS DANS LES PROGRAMMES DU SECONDAIRE À LA RENTREE 2016 : MISE EN ŒUVRE PÉDAGOGIQUE ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Philippe DUTARTE

Résumé. La rénovation des programmes de mathématiques du secondaire a abouti, au lycée à la rentrée 2012, avec la mise en place des nouveaux programmes de terminale offrant une place plus importante à la statistique et, au collège à la rentrée 2016, avec la mise en place de nouveaux programmes introduisant la notion de probabilité dès la classe de cinquième et mettant l'accent sur l'interdisciplinarité. La mise en œuvre de ces programmes au lycée suppose trois points d'appui pédagogiques : une introduction des notions à partir de situations « concrètes » avec une problématique identifiée ; une valorisation de la démarche d'investigation, prenant notamment appui sur l'exploitation de logiciels ; une évaluation des compétences acquises dans ce domaine ne se limitant pas à l'aspect classique. La mise en œuvre au collège des programmes de probabilités devra : qualifier puis quantifier progressivement le hasard ; exploiter une double approche empiriste et théorique ; introduire l'observation de la stabilisation des fréquences dès la classe de quatrième. Le succès de cette mise en œuvre des programmes dans les classes suppose un effort certain de formation des enseignants.

Introduction

À la rentrée 2012, se sont mis en place les nouveaux programmes de mathématiques de terminales S, ES et STI2D-STL, notamment, achevant ainsi une rénovation des programmes du lycée (le programme de terminale STMG est entré, quant à lui, en application à la rentrée 2013). Ces programmes ont induit des changements importants dans l'enseignement de la statistique et des probabilités au lycée, tant quantitatifs que qualitatifs.

À la rentrée 2016 se mettent en place de nouveaux programmes au collège, dont un des éléments marquants, pour le domaine qui nous intéresse ici, est l'introduction de la notion de probabilité dès le début du cycle 4, c'est-à-dire dès la classe de cinquième. Ceci bouscule des habitudes françaises et conduit à s'interroger sur la progressivité des apprentissages et tout particulièrement sur l'introduction de la notion de probabilité en cinquième.

Ces changements supposent une mise en œuvre pédagogique spécifique nécessitant un accompagnement des enseignants par une formation adaptée qui devra s'inscrire dans une certaine durée.

1 – La place de la statistique et des probabilités dans les programmes de mathématiques du secondaire à la rentrée 2016

Le premier changement visible est d'ordre quantitatif : la statistique et les probabilités occupent une place plus importante que par le passé, avec des contenus nouveaux ou introduits plus précocement. L'enseignement des probabilités est introduit dès la classe de cinquième (2016), la loi binomiale apparait en première (2011) et la loi normale en terminale (2012). Un enseignement de statistique inférentielle est mis en place dès la classe de seconde (2009) avec les notions d'intervalle de fluctuation, d'estimation d'une proportion inconnue ou de prise de décision à partir d'une échantillon. Cet enseignement, reposant d'abord essentiellement sur la simulation, est progressivement formalisé en première et terminale à

l'aide des outils probabilistes dont on dispose. Le temps à consacrer à la partie probabilités et statistique est quantifié dans les programmes de terminale. Ainsi, en terminale S, « à titre indicatif, on pourrait consacrer la moitié du temps à l'analyse, l'autre moitié se répartissant équitablement entre géométrie et probabilités-statistique », ou, en terminale ES, « à titre indicatif, on pourrait consacrer environ deux tiers du temps à l'analyse et le reste aux probabilités et à la statistique ». Pour mémoire, le précédent programme de terminale scientifique (2002) donnait, « à titre indicatif », la répartition horaire suivante : « analyse 45 % (environ 14 semaines), géométrie 35 % (environ 11 semaines), probabilité et statistique 20 % (environ 6 semaines) ».

Le second changement, plus subtil à mettre en œuvre, est d'ordre qualitatif. En probabilités, le programme du cycle 4 (Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015) introduit une nouvelle progressivité des apprentissages, dont il convient de ne « brûler » les étapes pour ce précipiter sur le calcul de probabilités dans des situations, admises, d'équiprobabilité. En statistique, notamment au lycée, on passe d'un enseignement, avant les années 2000, de techniques de traitement de données statistiques réalisées par les élèves « à la demande » (calculer une moyenne, représenter un histogramme...), à un enseignement de la statistique au sens de science d'investigation des données, d'aide à la prise de décision (avec estimation du risque) ou à l'estimation. Voici quelques marqueurs de cet « esprit de la statistique » dans les programmes actuels.

Cycle 4 (5e, 4e, 3e) – introduction et repères de progressivité (2016) :

> « Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une **interprétation critique**. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de **construire une citoyenneté critique et rationnelle**. »
>
> « Dès le début et tout au long du cycle 4 sont abordées des questions relatives au hasard, afin **d'interroger les représentations initiales** des élèves, en partant de situations issues de la vie quotidienne (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.), en suscitant des débats. On introduit et consolide ainsi petit à petit le **vocabulaire** lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves calculent des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le **modèle équiprobable**. Une fois ce vocabulaire consolidé, le lien avec les statistiques est mis en œuvre en **simulant** une expérience aléatoire, par exemple sur un tableur. À partir de la 4e, **l'interprétation fréquentiste** permet d'approcher une probabilité inconnue et de dépasser ainsi le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5e. »

Classe de seconde (2009) :

> « L'objectif est de faire **réfléchir** les élèves sur des **données réelles**, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations **pertinentes** ».
>
> « L'objectif est d'amener les élèves à un **questionnement** lors des activités suivantes : l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; la prise de décision à partir d'un échantillon ».

Classes de premières S et ES (2011) :

> L'objectif indiqué dans le programme de seconde est repris : « faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE) ».
>
> En statistique inférentielle, on s'appuie sur la loi binomiale pour tester une proportion. L'élève doit être capable « d'**exploiter** l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, **pour rejeter ou non une hypothèse** sur une proportion ». L'objectif est « d'amener les élèves à **expérimenter** la notion de « différence significative » par rapport à une

valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde ».

Classes de terminales S et ES (2011) :

« Afin de **traiter les champs de problèmes** associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité » (lois uniforme et normale en ES et S, auxquelles s'ajoute la loi exponentielle en S).

« Cette partie [probabilités et statistique] se prête particulièrement à l'étude de **problèmes issus d'autres disciplines** ». « Le recours aux représentations graphiques et aux **simulations** est indispensable ».

« La **problématique de la prise de décision**, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique[1] ».

Concernant la partie « estimation » (par intervalle de confiance), « les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines ».

2 – Mise en œuvre pédagogique des programmes de statistique et probabilités au lycée général et technologique (rentrée 2012)

Il ne suffit certes pas d'énoncer la « loi » des programmes pour la voir aussitôt mise en œuvre dans les classes. Les programmes de lycées (professionnel, général et technologique) sont accompagnés de documents « ressources » fournissant notamment des exemples de mise en œuvre. Les manuels scolaires, édités lors de l'application d'un nouveau programme, jouent un rôle essentiel, demeurant la source documentaire prépondérante des professeurs. L'évaluation, en particulier les examens, détermine en partie les contenus enseignés et leur mode d'enseignement (on parle de « pilotage par l'examen »). Enfin, la formation initiale et continue des professeurs doit prendre en compte les objectifs spécifiques de l'enseignement de la statistique et des probabilités.

Nous nous penchons dans cette partie sur ce qui nous semble constituer trois points d'appui pédagogiques incontournables pour une mise en œuvre satisfaisante des programmes de statistique et probabilités au lycée général et technologique.

2.1 – En situation « concrète »

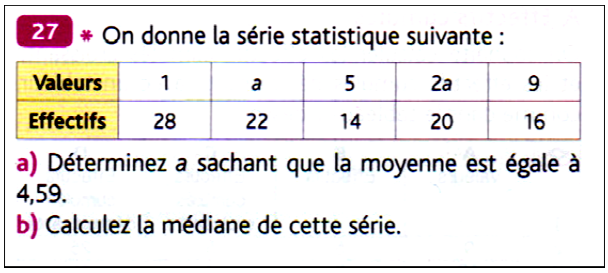
Est-ce utile de le rappeler, la statistique est une science « appliquée », c'est ce qui fait son charme. Cela ne signifie pas que les mathématiques mises en jeux, notamment des résultats de probabilités ou d'analyse, soient de seconde catégorie mais que la compréhension des concepts et des démarches est liée à des usages extérieurs aux mathématiques. Un enseignement de la statistique de type « académique », partant de définitions posées a priori et énonçant des théorèmes en dehors de tout contexte est donc non seulement inefficace, mais néfaste. À juste titre pourrait-on dire que, dans ce cas, mieux vaut ne pas confier l'enseignement de la statistique à un professeur de mathématiques. A contrario, le professeur de mathématiques est le seul capable de détacher les concepts mathématiques mis en œuvre des différents contextes spécifiques, pour mettre en évidence leur caractère universel permettant d'aller au-delà d'un agrégat de recettes ad hoc et donc de s'adapter à des situations imprévues. Il est ainsi essentiel que l'enseignement de la statistique soit pris en charge par un professeur de mathématiques.

---

[1] On peut regretter que cette remarque, qui nous paraît essentielle, n'apparaisse qu'à la fin des « commentaires » concernant la partie « intervalle de fluctuation ». La problématique de la prise de décision devrait motiver l'introduction du concept d'intervalle de fluctuation.

Certains types d'exercices nous semblent ne pas avoir leur place dans un apprentissage de la statistique. Il s'agit d'exercices stériles, vide de sens et ne répondant à aucune problématique. Voici deux exemples (ils semblent se raréfier dans les manuels).

Manuel de seconde (2009) :

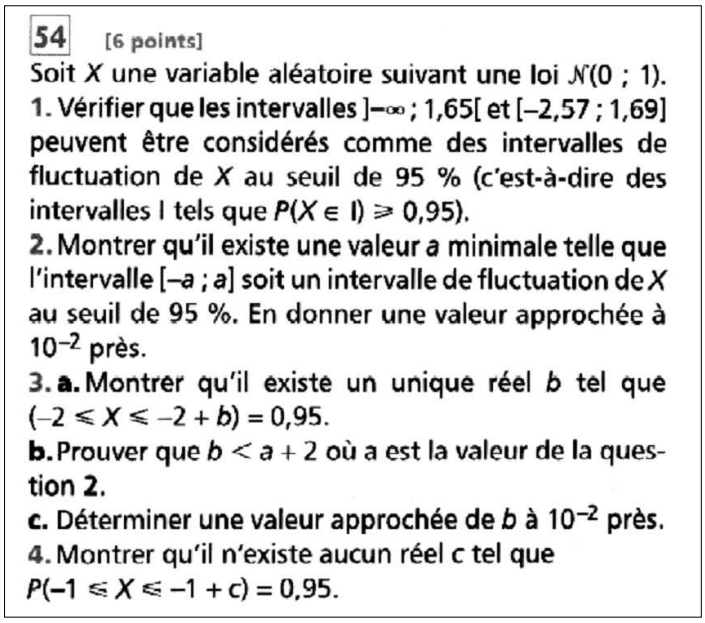


27 * On donne la série statistique suivante :

Valeurs	1	a	5	$2a$	9
Effectifs	28	22	14	20	16

a) Déterminez a sachant que la moyenne est égale à 4,59.
b) Calculez la médiane de cette série.

Manuel de terminale S (2012) :



54 [6 points]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
1. Vérifier que les intervalles $]-\infty ; 1{,}65[$ et $[-2{,}57 ; 1{,}69]$ peuvent être considérés comme des intervalles de fluctuation de X au seuil de 95 % (c'est-à-dire des intervalles I tels que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$).
2. Montrer qu'il existe une valeur a minimale telle que l'intervalle $[-a ; a]$ soit un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 %. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $(-2 \leqslant X \leqslant -2 + b) = 0{,}95$.
b. Prouver que $b < a + 2$ où a est la valeur de la question 2.
c. Déterminer une valeur approchée de b à 10^{-2} près.
4. Montrer qu'il n'existe aucun réel c tel que $P(-1 \leqslant X \leqslant -1 + c) = 0{,}95$.

Gourmands en temps (il faut faire plusieurs exercices du même type, pour parvenir, si l'on est résistant, à acquérir une compétence inutile, sauf le jour de « l'interro »), ils éloignent de l'apprentissage des capacités attendues, rendant plus difficile la compréhension du sens de notions liées à la modélisation : une moyenne, une médiane, un intervalle de fluctuation correspondent à des calculs plus ou moins arbitraires, selon un degré d'approximation qui l'est tout autant[2].

La contextualisation est particulièrement nécessaire en statistique inférentielle. L'objectif est de construire le sens critique, par le choix des méthodes, des paramètres, l'évaluation des risques, les limites du modèle, la signification de la « confiance ». Citons Norbert Meusnier[3] : « L'éducation à l'aléatoire [...] devrait avoir pour but fondamental la prise de conscience que toute décision s'accompagne d'un risque, mais que ce risque peut être évalué. »

---

[2] On peut parler à ce propos de « réduction arithmétique » ou de « réduction mathématique » de la statistique (voir [4]).

[3] Voir [5].

La contextualisation d'une méthode statistique n'est pas toujours simple à réaliser (et les professeurs doivent être accompagnés) mais l'enjeu est d'importance. Voyons un exemple d'exercice qui, sans être mathématiquement faux, est, du point de vue de la modélisation, maladroitement posé.

Manuel de terminale STI2D (2012) :

40 Dans tout cet exercice, la production est supposée suffisamment importante pour que l'on assimile le choix d'un échantillon à un tirage avec remise.

Un sous-traitant est chargé de concevoir des pièces pour un constructeur automobile.

1. Un sondage est réalisé pour tester la qualité de la production du sous-traitant. On suppose que la proportion de pièces non conformes dans la production est comprise entre 0,02 et 0,98 ; sur un échantillon de 250 pièces, 12 ne répondent pas au cahier des charges.

a) Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % obtenu à partir de cet échantillon. Donner les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-3} près.

b) Le client veut un taux de pièces non conformes inférieur ou égal à 6 %. Compte tenu du sondage effectué, peut-on affirmer avec un niveau de confiance de 95 % que cette condition est respectée ?

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative sera prise en compte dans la notation.*

Le sous-traitant procède à de nouveaux réglages et fait un nouveau sondage sur 250 pièces. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre maximum de pièces non conformes dans cet échantillon pour pouvoir affirmer que, au niveau de confiance de 95 %, le taux de pièces non conformes est inférieur ou égal à 6 % dans la production. Expliquer votre démarche.

Le contexte est celui d'une prise d'échantillon pour un contrôle de qualité, mais la problématique n'apparaît qu'à la question 1.b) : « le client veut un taux de pièces non conformes inférieur ou égal à 6 % ». Passons outre le fait qu'un taux de 6 % est sans doute peu réaliste pour la survie économique de l'entreprise (on ne prétend pas, en terminale, envisager une situation dans toute la complexité des applications réelles). Ce qui importe, c'est de comprendre que, dans ce type de contexte, on a sans doute intérêt à effectuer un test (raisonner en termes d'intervalle de fluctuation et de prise de décision, pour reprendre la terminologie du secondaire) puisque l'on a une idée de ce que devrait être la proportion p de pièces défectueuses dans la production. Notons également que la situation est ici « unilatérale » : on ne voudrait pas que p dépasse 6 % (supposer que la proportion de pièces non conformes dans la production est d'au moins 2 % est assez étrange). Ce qui rend un intervalle de confiance à 95 % (bilatéral) a priori inadapté.

Bien entendu, un « bon » élève (la question 2. n'est pas facile) peut « faire » cet exercice de mathématiques. On attend à la question 2. la recherche du plus petit entier k tel que :

$$\frac{k}{250}+1{,}96\frac{\sqrt{\frac{k}{250}\left(1-\frac{k}{250}\right)}}{\sqrt{250}}<0{,}06$$

(borne supérieure de l'intervalle de confiance « standard » à 95% inférieure à 0,06). La calculatrice ou le tableur fournit $k = 9$. Mais la démarche est assez compliquée et la confiance de 95% est difficile à interpréter.

En posant la problématique dès le début de l'exercice, un élève de terminale (et même de première) peut procéder autrement (et sans doute mieux). Supposons que, situation à la limite de l'acceptable, la proportion de pièces défectueuses dans la production est $p = 0{,}06$. Sous cette hypothèse, la variable aléatoire X correspondant au nombre de pièces défectueuses observées sur un échantillon aléatoire de taille 250 suit la loi binomiale de paramètres 250 et 0,06. Les outils de calcul (calculatrice, tableur, GeoGebra...) fournissent : $P(X \leq 8) \approx 0{,}033$ et $P(X \leq 9) \approx 0{,}064$ (on a là en quelque sorte des intervalles de fluctuation unilatéraux pour la variable aléatoire X). On peut être conduit à la règle de décision suivante : on accepte dans l'échantillon prélevé un maximum de 8 pièces défectueuses. La probabilité d'accepter à tort la production est de 3,3 % (risque de rejet à tort de l'hypothèse $p = 0{,}06$ à gauche, c'est-à-dire que dans 3,3 % des cas, on accepte une production pour laquelle $p = 0{,}06$ ou davantage). On remarque qu'avec la règle fournie par l'intervalle de confiance le risque d'accepter à tort la production est de 6,4 %.

Cette méthode (utilisation directe de la loi binomiale) apparait plus simple et plus précise que celle de l'intervalle de confiance, en un mot mieux adaptée.

a) Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation

La mise en œuvre d'un intervalle de fluctuation, pour la prise de décision, devrait répondre, au lycée, à un certain nombre de critères, garantissant le respect de l'esprit de la démarche statistique, susceptible, selon les orientations choisies, d'être poursuivie dans l'enseignement supérieur[4].

– Le premier critère nous semble devoir être de poser un problème, une situation, ayant quelque écho avec le monde réel. Cette situation doit être telle que la proportion p dans la population est supposée connue : c'est l'hypothèse de départ, avec laquelle on construit la règle de décision. Cela exclut les situations où l'on n'a aucun a priori sur la valeur de p (type « sondage »), pour lesquelles on aura recourt à un intervalle de confiance[5].

– Il faut ensuite que cette situation soit de type « bilatérale » : par rapport à la valeur de p « visée » (celle de l'hypothèse) on s'intéresse à un écart trop important à gauche et à droite.

– La règle de décision doit être élaborée, autant que possible[6], avant la prise d'échantillon. Il est plus honnête de décider d'une règle avant de jouer, qu'après la partie[7]. Par ailleurs,

---

[4] Satisfaire tous ces critères dans un exercice scolaire de lycée n'est pas évident. Le premier (une situation-problème) est cependant incontournable : le choix d'une méthode statistique dépend de la situation.

[5] L'estimation par intervalle de confiance est une démarche inductive à l'état d'esprit très différent de celui d'un test. On n'y retrouve pas la démarche déductive de type « raisonnement par l'absurde » à l'œuvre dans la prise de décision correspondant aux tests, en cas de rejet de l'hypothèse. Il faut absolument éviter de mener les deux démarches pour une même situation.

[6] Dans certains cas, voir par exemple les cas de leucémies à Woburn (document ressources pour le lycée professionnel), on ne peut procéder ainsi. Le raisonnement consiste à supposer que l'échantillon étudié résulte d'un échantillonnage aléatoire sous une certaine hypothèse.

l'approche de Neyman-Pearson est fréquentiste. Il ne s'agit pas d'élaborer une règle de décision à partir d'un échantillon, mais d'élaborer une règle de décision en amont dont on sait évaluer les risques sur un grand nombre d'échantillons.

– L'échantillon doit être prélevé par tirage au hasard avec remise (équiprobabilité garantie par randomisation).

– En cas de rejet de l'hypothèse, il faut savoir que l'on peut interpréter le 5 % (ou le 1 % en terminale S dans le cas d'un intervalle de fluctuation asymptotique à 99 %[8]) comme la probabilité de commettre une erreur de décision (probabilité de rejet de l'hypothèse sachant qu'elle est vraie). En cas d'acceptation de l'hypothèse, il faut savoir que l'estimation de la probabilité d'erreur de décision est plus compliquée, puisqu'elle dépend de la valeur alternative de p[9]. Il faudrait par exemple envisager une autre valeur possible de p ou balayer différentes valeurs possibles, avec un tableur par exemple.

Un exemple dans une situation bilatérale

L'exercice suivant, où il est question de variable aléatoire, peut être proposé au niveau première ou terminale.

> On considère la couleur des yeux des mouches drosophiles. Par croisement de mouches homozygotes « yeux rouges » de gènes AA et de mouches homozygotes « yeux bruns » aa, on obtient des mouches hétérozygotes Aa. Si l'on croise ces hétérozygotes entre eux, on doit obtenir, selon les lois de Mendel, dans cette seconde génération, 75 % de « yeux rouges » (AA et Aa) et 25 % de « yeux bruns » (aa).
>
> On souhaite tester l'hypothèse selon laquelle la proportion de drosophiles « yeux rouges » de seconde génération est $p = 0{,}75$ en mettant en place une expérimentation permettant d'observer 300 drosophiles de seconde génération (considérées comme un échantillon aléatoire).
>
> **1.** Sous l'hypothèse $p = 0{,}75$, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la variable aléatoire correspondant à la fréquence du caractère « yeux rouges » sur un échantillon aléatoire de taille 300.
>
> **2.** Énoncer la règle de décision permettant de rejeter, ou non, l'hypothèse $p = 0{,}75$, au seuil de 5 %, sur un échantillon aléatoire de taille 300.
>
> **3.** L'expérience permet d'observer 237 « yeux rouges » et 63 « yeux bruns ». Cette répartition est-elle conforme à la loi de Mendel, au seuil de décision de 5 % ?

Détaillons le raisonnement que l'on peut suivre.

---

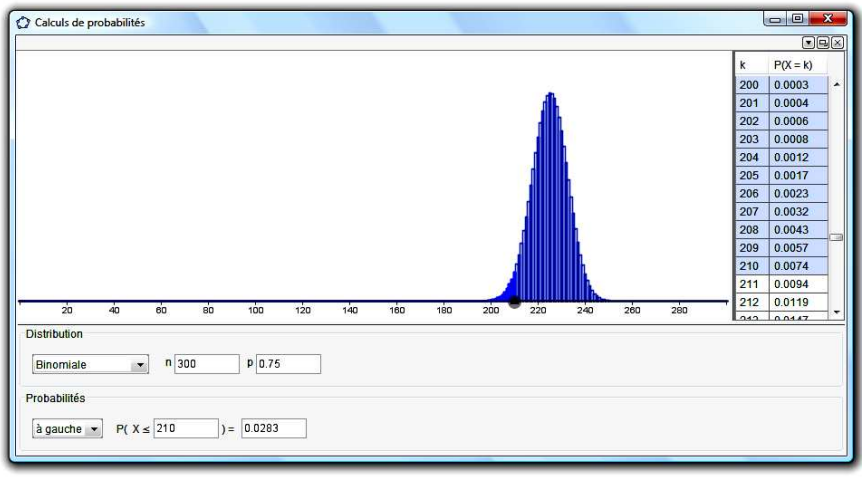
[7] Dans nombre d'exercices présents dans les manuels de terminale (2012), on débute par une observation sur un échantillon, puis on envisage une, voire plusieurs règles de décision.

[8] Le choix du seuil de décision (1 % ou 5 %) doit, bien entendu, se faire avant la prise d'échantillon. Il dépend du risque (de première espèce) consenti (si l'on diminue le risque de première espèce, on augmente le risque de seconde espèce, à taille d'échantillon égale). Ce choix dépend des utilisateurs et non du statisticien.

[9] Les notions d'erreur de première et de seconde espèces ne sont pas au programme au lycée (aucune autonomie des élèves à ce sujet n'est attendue, ni même la connaissance de ce vocabulaire). Pour autant, il nous semble inconcevable de passer cette problématique (il y a deux types d'erreurs et donc de risques) complètement sous silence, tant elle est essentielle. Une analogie simple suffit à faire comprendre la situation. Une prise de décision est comme un jugement au tribunal. L'hypothèse est que le prévenu est présumé innocent. Il y a deux risques au jugement : celui de condamner un innocent (rejet à tort de l'hypothèse, première espèce), ou d'absoudre un coupable (acceptation à tort de l'hypothèse, seconde espèce).

1. On considère que les 300 drosophiles qui seront observées résultent d'un tirage au hasard et avec remise dans la population des drosophiles de seconde génération. Dans ce cadre, la variable aléatoire X correspondant au nombre de drosophiles présentant le caractère « yeux rouges » dans un tel échantillon suit, sous l'hypothèse $p = 0{,}75$, la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}75$. Il est donc possible, sous l'hypothèse $p = 0{,}75$, de prévoir la « variabilité » de la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{300}$ correspondant à la fréquence du caractère « yeux rouges » sur un tel échantillon. Compte tenu de la nature du problème (on accepte l'hypothèse $p = 0{,}75$ à condition que la fréquence observée ne s'en éloigne pas trop, ni à gauche, ni à droite), on recherche un intervalle de fluctuation « bilatéral » (c'est-à-dire avec une zone de rejet à gauche et une zone de rejet à droite) correspondant à une probabilité d'au moins 95 %. Ceci de sorte que le risque[10] de rejeter à tort cette hypothèse soit d'au plus 5 % et même, ici, d'au plus 2,5 % de chaque côté. On est donc amené à rechercher les entiers a et b tels que : $P(X < a) \leq 0{,}025$ et $P(X > b) \leq 0{,}025$ (et donc $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$).

Le logiciel GeoGebra permet de déterminer aisément (et de manière visuelle) ces valeurs a et b pour lesquelles les probabilités « à gauche » et « à droite » dépassent le seuil de 0,025. On trouve $a = 210$ et $b = 239$.



En divisant par 300, on obtient l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de F : $I = [0{,}7 ; 0{,}797]$.

En classe de terminale, on peut préférer utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique, déterminé à partir de la loi normale, et qui fournit un résultat extrêmement proche : [0,701 ; 0,799]. L'intervalle de fluctuation donné en seconde, majoration du précédent, est [0,69 ; 0,81].

2. Après prélèvement d'un échantillon aléatoire de taille 300 et calcul de la fréquence f du caractère « yeux rouges » sur cet échantillon, la règle de décision, au seuil de 5 %, est la suivante : si f n'appartient pas à l'intervalle I de fluctuation à 95 % précédent, on rejette l'hypothèse $p = 0{,}75$, si f appartient à I, on ne rejette pas cette hypothèse.

[10] L'apport de Pearson et Neyman nous invite à porter le regard sur le risque (ici de première espèce) de sorte que l'intervalle de fluctuation utile à une prise de décision se détermine surtout par considération de son complémentaire. N'importe quel intervalle de fluctuation ne fait pas l'affaire et, d'une certaine façon, il y a ici unicité de la réponse à apporter dans la recherche de l'intervalle de fluctuation adapté au problème.

Il est important de savoir que les 5 %[11] correspondent à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse $p = 0{,}75$ (c'est comme cela qu'a été construite la procédure de décision).

3. On observe $f = 0{,}79$. Cette valeur appartient à l'intervalle I de fluctuation à 95 %. Cette observation est donc « conforme à » (ou « compatible avec ») l'hypothèse $p = 0{,}75$ au seuil de décision de 5 %. On s'exprime ainsi car, dans cette situation, il serait un peu étrange d'affirmer qu'on « ne rejette pas la loi de Mendel ». En cas de rejet de l'hypothèse, on serait sans doute amené à étudier les conditions du protocole expérimental.

Un exemple dans une situation unilatérale

Concernant une proportion, nombre de situations de prise de décision sont, de manière plus « naturelle », unilatérales plutôt que bilatérales. Il nous semble dommage de s'interdire l'accès à ces situations, tout en étant conscient qu'aucune autonomie des élèves n'est attendue à cet égard. Il ne s'agit pas pour autant de taire le problème et de faire, dans une situation annoncée comme unilatérale, « comme si de rien n'était »[12].

Nous reprenons ici un exemple présenté dans le document ressources pour la classe de terminale[13], en insérant la question 2., essentielle à la compréhension du « 95 % ».

> On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %. Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux–ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.
>
> Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.
>
> La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.
>
> **1.** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
>
> **2.** Indiquer une valeur approchée de la probabilité de mener une investigation supplémentaire à tort (c'est-à-dire alors que la proportion d'enfants de 11 à 14 ans de la ville V ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %) ?
>
> **3.** L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

1. On trouve [0,06 ; 0,20]. Remarquons qu'il faut lire attentivement l'énoncé pour comprendre qu'il y a deux populations. Celle du département, où $p = 0{,}13$ est connu, et celle de la ville V, où l'on fait en quelque sorte, l'hypothèse que $p = 0{,}13$.

---

[11] Avec la loi binomiale, ce n'est pas exactement 5 % (on peut déterminer la probabilité correspondant à la zone de rejet).

[12] C'est le cas dans de nombreux exercices présents dans des manuels de terminale (2012) où, dans une situation unilatérale, on semble prendre une décision « au seuil de 95 % » alors qu'elle l'est au seuil de 97,5 %.

[13] Voir [10] page 22.

2. La problématique de cet exercice est unilatérale, ce qui est clairement affirmé dans la règle de décision. En revanche, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est bilatéral (c'est le seul au programme de terminale). On ne peut donc répondre « 5 % » à la question posée. En revanche, un élève de terminale connaît la propriété de symétrie de la courbe de Gauss et sait donc que ces 5 % (correspondant aux fréquences observées situées en dehors de l'intervalle de fluctuation lorsque $p = 0{,}13$) se partagent en 2,5 % de chaque côté de l'intervalle de fluctuation. La probabilité demandée est donc d'environ[14] 2,5 %.

Il est essentiel, et simple, de comprendre que le risque consenti de mener une investigation supplémentaire inutile (et éventuellement couteuse) est de 2,5 %.

3. La valeur 0,19 est à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, on en conclut que la règle de décision choisie ne prévoit pas de réaliser une enquête supplémentaire[15].

b) Explorer un grand nombre de données

Le défi de la statistique du XXI^{e} siècle est d'exploiter des quantités toujours plus gigantesques de données. Il est essentiel de placer les élèves dans des situations où il s'agit d'explorer un grand nombre de données et en particulier des données « réelles ». C'est l'occasion de mettre les élèves « en situation » d'un usage très actuel de la statistique, de développer des compétences de prise d'initiative, de choix de résumés numériques ou graphiques pertinents, d'outils de modélisation plus ou moins adaptés aux situations, et de montrer l'intérêt et la puissance des méthodes mises en œuvre. Nous évoquons ici deux exemples de traitements de données accessibles sur Internet[16].

Tailles père-fils (données de Karl Pearson)

Le statisticien britannique Karl Pearson (1857-1936), dans le cadre de recherches sur l'hérédité, a établi un fichier de 1 078 couples de mesures de la taille du père et du fils (adulte). Le fichier tableur fournit ces données, exprimées en mètres.

1. Regrouper les tailles des pères en classes d'amplitude 0,01 mètre. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. Même question pour les tailles des fils.

3. La taille moyenne d'un homme d'âge compris entre 20 et 29 ans est actuellement, en France, de 1,77 m. En utilisant le modèle de la question précédente estimer la probabilité qu'un jeune homme anglais de ces âges ait une taille supérieure ou égale à 1,77 m à la fin du XIX^{e} siècle.

4. Représenter les points de coordonnées (x, y) correspondant aux tailles (père, fils) (« nuage de points ») et figurer la droite D d'équation $y = x$.

a. A-t-on autant de points au-dessus et en-dessous de la droite D ? Donner une interprétation.

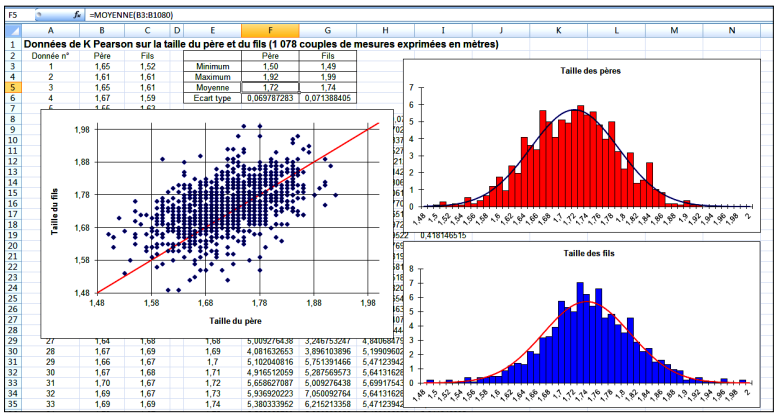
---

[14] Le « environ » provenant de l'aspect asymptotique de l'intervalle de fluctuation. Pour un résultat « exact », travailler avec la loi binomiale.

[15] On peut faire remarquer que dans cette situation d'acceptation de l'hypothèse, on ne sait pas, en l'état, quantifier le risque. Cela peut-être prétexte à prolongement de l'exercice. Supposons par exemple que la proportion d'enfants de cet âge asthmatiques dans la ville V (connue comme souffrant de pollution de l'air) soit en fait de 25 %, quelle est la probabilité que la règle de décision précédente conduise à accepter (à tort) l'hypothèse $p = 0{,}13$? En terminale, il s'agit d'une question « ouverte » : on peut effectuer des simulations, utiliser la loi binomiale ou calculer $P(F \leq 0{,}20)$, où F suit la loi normale de moyenne 0,25 et d'écart type .

[16] Il suffit, s'agissant ici de données anglo-saxonnes, d'entrer dans un moteur de recherche, *Karl Pearson height data set* ou *Old Faithful data set*.

b. Pour $x \leq 1{,}58$, tous les points sont au-dessus de la droite D et pour $x \geq 1{,}88$, tous les points sont en-dessous de D. Donner une interprétation.

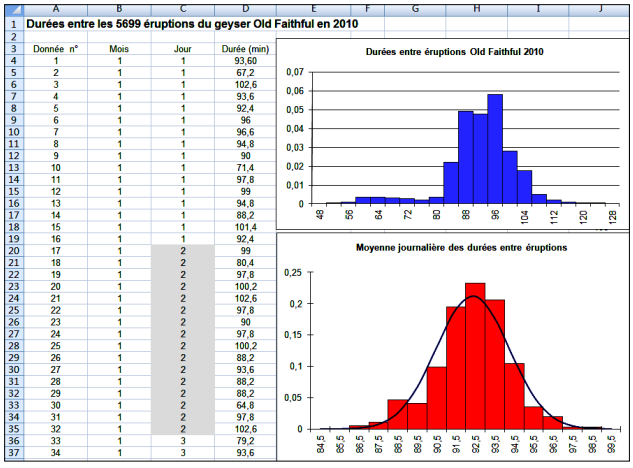


Éruption du geyser Old Faithful

Le geyser Old Faithful est situé dans le parc Yellowstone aux États-Unis. Son nom signifie « vieux fidèle » en raison de la régularité de ses éruptions. Les données statistiques permettent d'étudier cette « fidélité ». Le fichier tableur fournit la durée entre le début de chaque éruption, exprimée en minutes, pour les 5 699 éruptions de l'année 2010, ainsi que la durée moyenne journalière entre éruptions pour chacun des 365 jours de l'année.

1. Regrouper les 5 699 durées entre éruptions en classes d'amplitude 4 minutes. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. Regrouper les 365 durées moyennes journalières entre éruptions en classes d'amplitude une minute. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?



2.2 – En valorisant la démarche d'investigation et l'exploitation de logiciels

Ainsi que le signale l'introduction commune aux disciplines scientifiques des programmes de collège, « dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation », avec des spécificités en mathématiques, en particulier concernant la validation de conjectures à l'aide

de démonstrations. Cette approche se poursuit au lycée et les exemples illustratifs seront ici choisis au niveau de la terminale scientifique, où se situe la nouveauté à la rentrée 2012.

Cette démarche « privilégie la construction du savoir par l'élève » : dans le cadre d'une « situation-problème », on réalise des « expériences », pouvant correspondre en mathématiques à une expérimentation à l'aide de logiciels, conduisant notamment à formuler des conjectures ou à mieux comprendre un concept. La simulation joue un rôle particulier dans l'expérimentation, notamment dans l'étude de phénomènes aléatoires.

Nous prenons trois exemples dans le domaine « probabilités-statistique » du nouveau programme de terminale scientifique (2012) montrant le rôle de l'expérimentation à l'aide de logiciels.

Introduction du théorème de Moivre-Laplace

En terminale S, le théorème de Moivre-Laplace peut être énoncé ainsi (il est admis) :

Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale B(n, p) et soit $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée réduite associée à X_n.

Alors, pour tous réels a et b, tels que $a < b$: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Il n'est pas question d'énoncer ce résultat sans expérimentation préalable par les élèves (du moins souhaitons-le) et les commentaires du programme conseillent de s'appuyer sur l'observation graphique.

On peut proposer la démarche suivante (avec ici une présentation relativement « guidée »).

Dans une population, la proportion des personnes possédant le gène A actif est p = 0,4. On prélève au hasard un échantillon de taille n dans cette population (celle-ci étant suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise). On s'intéresse à la répartition de ce gène sur les différents échantillons possibles.

A. Histogramme normalisé de la loi binomiale centrée réduite

On désigne par X_n la variable aléatoire associant à chaque échantillon de taille n le nombre de personnes de l'échantillon possédant le gène A actif.

1. a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Déterminer, en fonction de n, l'espérance m et l'écart-type σ de la variable aléatoire X_n.

c. On considère l'événement E_n : « $m - \sigma \leq X_n \leq m + 2\sigma$ ».

Vérifier que, pour n = 5, l'événement E_5 correspond, pour un échantillon de taille 5, à un nombre de personnes possédant le gène A actif compris entre 1 et 4.

2. On désigne par $Z_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$, la variable aléatoire centrée réduite correspondant à X_n.

a. Écrire, à l'aide de Z_n, l'événement E_n.

b. De quelle forme sont les valeurs z_k, pour k entier allant de 0 à n, prises par la variable aléatoire Z_n ? Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives z_k et z_{k+1} ?

c. On souhaite représenter l'histogramme normalisé de la variable aléatoire Z_n. Il s'agit d'un histogramme pour lequel l'aire de chaque rectangle est égal à la probabilité $P(Z_n = z_k)$.

Quelle est la largeur commune des rectangles ?

Quelle est la hauteur du rectangle correspondant à $Z_n = z_k$?

d. Sur GeoGebra, créer un curseur *n* allant de 5 à 5 000 puis calculer *m* et σ.

Créer l'histogramme normalisé de Z_n en entrant dans la barre de saisie :

H=Histogramme[Séquence[(i-m)/σ-0.5/σ,i,0,n+1], Séquence[σ*Binomiale[n,0.4,k,false],k,0,n]]

Qu'observe-t-on lorsque *n* augmente ?

e. Pour $n = 5$, à quelle aire correspond la probabilité $P(E_5)$?

f. Sur GeoGebra, la fonction floor fournit l'entier directement inférieur à un nombre et la fonction Binomiale[*n*,*p*,*k*,true] calcule la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres *n* et *p* prenne une valeur inférieure ou égale à *k*.

On suppose que $m - \sigma$ n'est pas entier. Montrer que l'on calcule $P(E_n)$ en saisissant :

P=Binomiale[n,0.4,floor(m+2*σ),true]-Binomiale[n,0.4,floor(m-σ),true]

Que vaut $P(E_5)$?

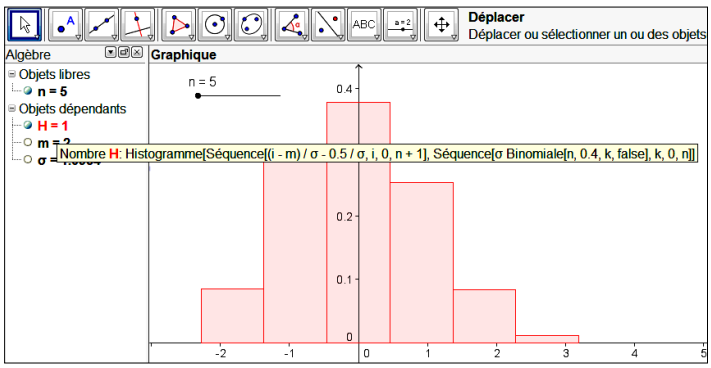
B. Courbe de Gauss et loi normale centrée réduite

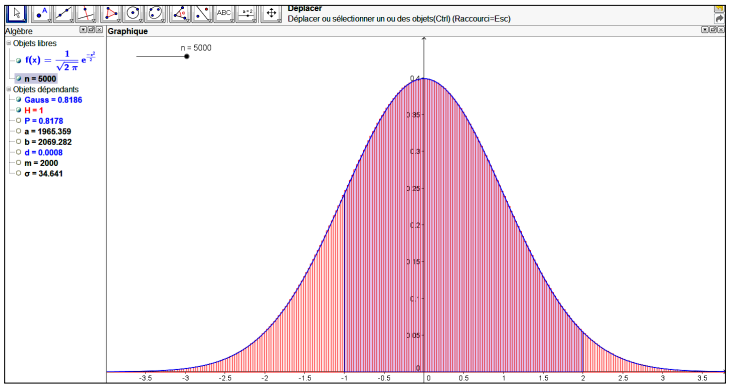
1. La courbe de Gauss, correspondant à la densité normale centrée réduite, représente la fonction *f* définie pour tout nombre réel *x* par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Représenter *f* sur le fichier GeoGebra. Que constate-t-on ?

2. Calculer, à l'aide de GeoGebra, l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

3. Comparer $P(E_n)$ et *I* lorsque *n* augmente.





Expérimentation de la notion d'intervalle de confiance

La simulation est un outil précieux favorisant la compréhension de la notion d'intervalle de confiance et en particulier le sens du terme « confiance ».

Le fichier tableur simule des sondages aléatoires de taille 1 000 le jour de l'élection de Barack Obama c'est-à-dire avec une fréquence d'opinions favorables égale à $p = 0{,}55$ dans la population.

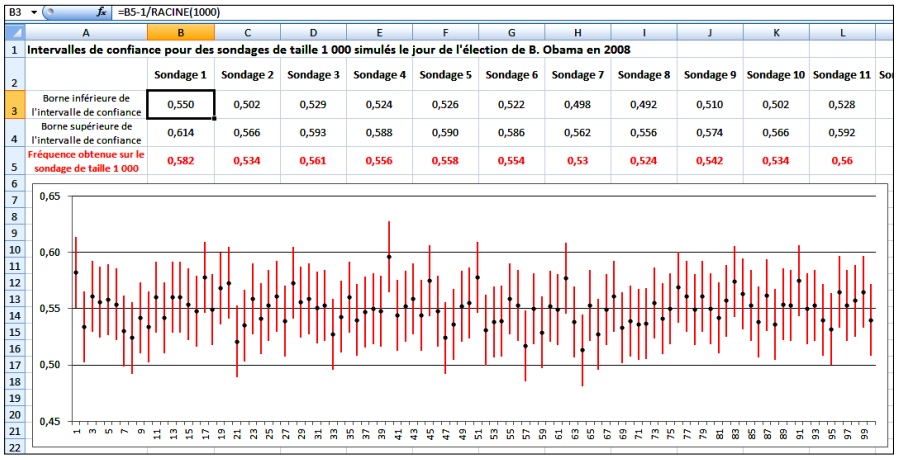
Pour chaque sondage simulé, fournissant une fréquence d'opinions favorables f, est représenté « l'intervalle de confiance » au niveau de confiance de 95 % :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{1000}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right].$$

a. La fréquence obtenue par Barack Obama le jour de l'élection est-elle toujours comprise dans l'intervalle de confiance ?

b. En faisant plusieurs simulations, estimer approximativement le pourcentage d'intervalles de confiance contenant le résultat de l'élection.

c. Deux intervalles de confiance peuvent-ils être disjoints ?



Erreur de décision lors de la comparaison de deux intervalles de confiance

On trouve dans plusieurs manuels de terminale S (2012), dans le cas de deux intervalles de confiance disjoints, une expression du type : « on conclut au niveau de confiance de 95 % que les proportions correspondantes sont différentes ». Cette expression n'est pas correcte. Il suffit d'expérimenter pour s'en rendre compte.

On considère deux médicaments A et B dont on veut comparer les effets. À partir de deux échantillons de n malades, les uns traités avec le médicament A, les autres traités avec le médicament B, on construit deux intervalles de confiance à 95 % des probabilités de guérison de chaque médicament. On considèrera qu'il existe une différence significative entre les deux traitements lorsque les deux intervalles de confiance sont disjoints.
Prenons par exemple $p = 0{,}7$ et estimons la probabilité d'obtenir deux intervalles de confiance à 95 % disjoints sur deux échantillons de taille 100 prélevés dans la même population où $p = 0{,}7$.

1. On considère les fréquences f_1 et f_2 de malades guéris observées sur chacun des échantillons de taille n. Montrer que les deux intervalles de confiance à 95 % correspondants (on utilise l'expression au programme de terminale) sont disjoints lorsque $|f_1 - f_2| > 0{,}2$.

2. À l'aide de simulations, estimer la probabilité de l'erreur de décision correspondant à l'obtention de deux intervalles de confiance à 95 % disjoints alors que la proportion dans la population est la même, $p = 0{,}7$.

3. On reprend la même étude en considérant l'intervalle de confiance à 95 % « standard » utilisé dans le post-bac et correspondant à l'expression $f \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$.

On a obtenu les images d'écran de la feuille de calcul suivantes.

B3 : =ENT(ALEA()+0,7)

	A	B	C	D	E	F	G
1		simulation 1		simulation 2		simulation 3	
2	rang	échantillon 1	échantillon 2	échantillon 1	échantillon 2	échantillon 1	échantillon 2
3	1	1	1	0	1	1	0
4	2	1	1	0	0	1	1
5	3	1	1	1	1	1	1
6	4	0	1	0	1	0	1
7	5	1	1	1	1	1	1

B... : =SI(MAX(B104;C104)>MIN(B105;C105);1;0)

	A	B	C	D	E	F	G
99	97	1	1	1	1	1	1
100	98	1	1	0	1	0	1
101	99	1	1	1	1	0	1
102	100	1	0	1	1	1	1
103	fréquence échantillon	0,73	0,63	0,7	0,73	0,68	0,75
104	borne inférieure IC	0,643	0,535	0,610	0,643	0,589	0,665
105	borne supérieure IC	0,817	0,725	0,790	0,817	0,771	0,835
106	disjoints ?	0		0		0	
107	Couples disjoints :	1 %					
108							

AJ... : =SI(MAX(AJ104;AK104)>MIN(AJ105;AK105);1;0)

	AH	AI	AJ	AK	AL	AM
99	0	1	1	1	1	0
100	0	1	0	1	1	1
101	0	1	1	0	1	0
102	1	1	1	1	1	1
103	0,64	0,68	0,55	0,74	0,66	0,76
104	0,546	0,589	0,452	0,654	0,567	0,676
105	0,734	0,771	0,648	0,826	0,753	0,844
106	0		1		0	
107						

a. Quelle formule peut-on entrer en cellule B104 ?

b. Quel est le rôle de la formule =SI(MAX(B104;C104)>MIN(B105;C105);1;0) entrée en cellule B106 ?

c. Sur un grand nombre de simulations, la cellule C107 affiche en moyenne environ 0,5 %. Que peut-on en déduire ?

2.3 – En évaluant l'ensemble des compétences acquises

Prenons l'exemple du programme de terminale scientifique (2012) dont les objectifs, en termes de compétences, sont les suivants :

> « Outre l'apport de connaissances nouvelles, le programme vise le développement des compétences suivantes :
>
> – mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
>
> – mener des raisonnements ;
>
> – avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
>
> – communiquer à l'écrit et à l'oral. »
>
> « Les modes d'évaluation prennent des **formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis**. En particulier, **l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer** ».

Á l'écrit au baccalauréat : algorithmique Pondichéry S 2012

La forme écrite de l'évaluation au baccalauréat limite la cadre de l'évaluation, notamment concernant la mobilisation de l'outil informatique pour la résolution de problème.

Prenons l'exemple de la question d'algorithmique posée au baccalauréat S 2012 à Pondichéry.

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle anti-dopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   – « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   – l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que a :=rand(1, 50) ; b := rand(1, 50) ; c :=and(1, 50) ; d := rand(1, 50) ; e := rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2, 11, 44, 2, 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?
   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :
   – il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   – il n'a pas été contrôlé ;
   – il a été contrôlé au moins une fois.

Dans le cadre de travaux pratiques informatiques : simulation d'une loi normale par la méthode du rejet

L'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes *doit* être évaluée, en cours d'année, dans le cadre de séances de travaux pratiques. Un compte-rendu de TP peut être relevé en fin de séance, ou rédigé hors la classe. Le TP peut comprendre, à différents moments clés, des appels au professeur pour évaluer, « en direct » et à l'oral, des compétences de prise d'initiative ou d'argumentation.

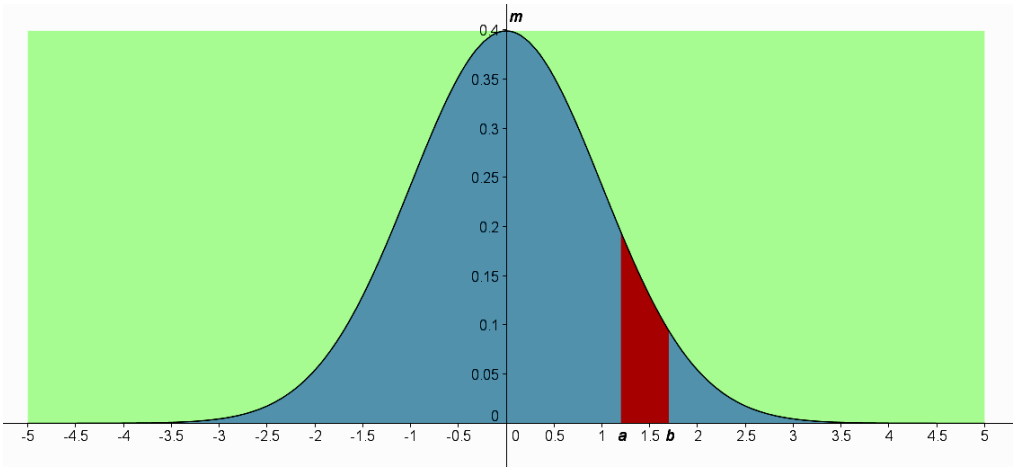
On cherche à simuler des réalisations d'une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite, de densité f définie, pour tout réel x, par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction f est représentée ci-dessous.

Dans ce TP, on suppose que le générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur simule parfaitement une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0, 1].

1. a. Donner la valeur m du maximum de $f(x)$.

b. Quelle est la probabilité que Z prenne ses valeurs en dehors de l'intervalle $[-5, 5]$?

c. Que vaut, approximativement, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = -5$ et $x = 5$, exprimée en unités d'aires ?



2. On considère le programme ci-dessous (langage Scilab).

```
1  m=1/sqrt(2*%pi)
2  function y=f(x)
3  »    y=m*exp(-x*x/2)
4  endfunction
5  x=-5+10*rand()
6  y=m*rand()
7  while y>f(x)
8  »    x=-5+10*rand()
9  »    y=m*rand()
10 end
11 disp(x)
```

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X dont x, dans le programme ci-dessus, est une réalisation ?

b. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y dont y, dans le programme ci-dessus, est une réalisation ?

c. Donner une interprétation graphique d'une réalisation (x, y) des deux variables aléatoires précédentes.

d. Interpréter graphiquement la condition de « rejet » figurant dans la boucle « tant que ».

e. Quelle est la probabilité de « rejet », c'est-à-dire que la condition de la boucle soit satisfaite ?

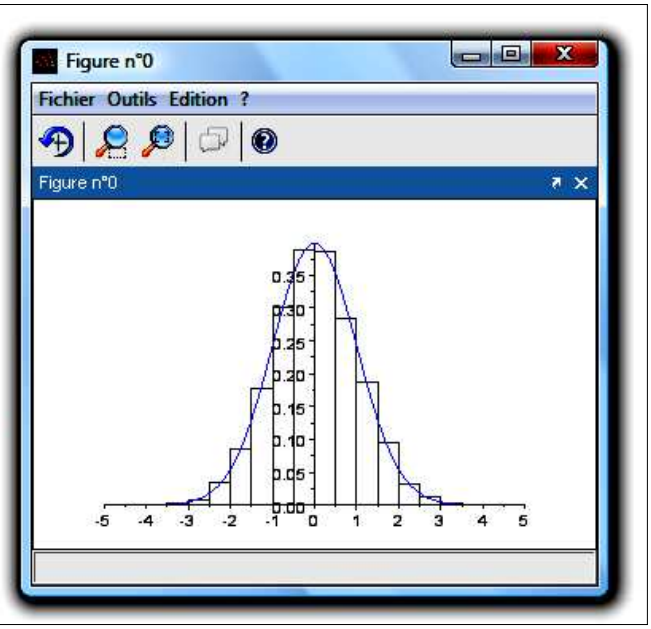
f. Soit a et b deux nombres de l'intervalle $[-5, 5]$ avec $a \leq b$. Quelle est la probabilité qu'une valeur x acceptée (c'est-à-dire sortant de la boucle « tant que ») soit comprise dans l'intervalle $[a, b]$?

Que peut-on en déduire ?

2. Implanter le programme sur un ordinateur.

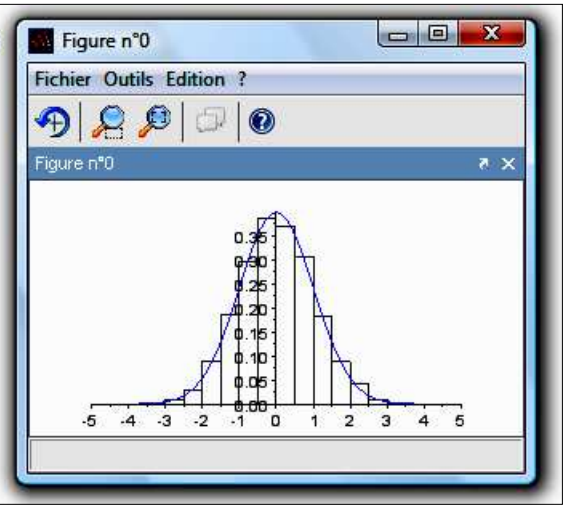
3. Modifier l'algorithme de sorte qu'il génère 10 000 valeurs. Implanter ce nouveau programme et, selon les possibilités du logiciel, afficher un histogramme et comparer avec la représentation graphique de f.

```
m=1/sqrt(2*%pi)
function y=f(x)
    y=m*exp(-x*x/2)
endfunction
X=zeros(1,10000)
for i=1:10000
x=-5+10*rand()
y=m*rand()
while y>f(x)
    x=-5+10*rand()
    y=m*rand()
end
X(i)=x
end
clf
classes=linspace(-5,5,21)
histplot(classes,X)
x=linspace(-5,5,100)
plot(x,f)
```



Une autre méthode de simulation, justifiant l'appellation de loi « normale » (illustration du théorème central limite), peut faire l'objet d'un TP analogue à l'exemple précédent :

```
function y=f(x)
    y=(1/sqrt(2*%pi))*exp(-x*x/2)
endfunction
X=zeros(1,10000)
for i=1:10000
x=rand()
for k=1:11
    x=x+rand()
end
X(i)=x-6
end
clf
classes=linspace(-5,5,21)
histplot(classes,X)
x=linspace(-5,5,100)
plot(x,f)
```



Dans le cadre de la résolution d'une « tâche à prise d'initiative » : les méfaits du tabac

Voici un exemple de problème présenté de façon « ouverte ».

> Dans un numéro datant de 1950 du *Journal de l'Association médicale américaine*, Ernst L. Wynder, étudiant en médecine, et Evarts Graham, chirurgien, comparent 605 cas de cancers du poumon chez les hommes à 780 hommes « témoins », n'ayant pas de cancer du poumon, recrutés dans plusieurs hôpitaux des États-Unis.
>
> La fréquence f_1 d'hommes fumeurs est de 91,3% parmi les « cas » atteint d'un cancer du poumon et la fréquence f_2 de fumeurs est de 65,3% parmi le groupe « témoin ».
>
> Wynder et Graham concluent que « l'utilisation excessive et prolongée du tabac, en particulier de cigarettes, semble être un facteur important capable d'induire le cancer du poumon ».
>
> Comment peut-on justifier cette affirmation ?

De la seconde à la terminale, la simulation ou les outils statistiques permettent de répondre de différentes façons.

3 – Mise en œuvre pédagogique des programmes de probabilités au collège (rentrée 2016)

Les nouveaux programmes de probabilités au collège ne consistent pas à anticiper de deux ans le contenu précédemment amorcé en classe de troisième. L'essentiel est d'insister sur la progressivité des apprentissages et tout particulièrement sur l'introduction de la notion de probabilité en cinquième.

Le document d'accompagnement sur les probabilités, paru sur le site Eduscol du ministère, explicite les repères de progressivité figurant dans le programme. Voici ce qui concerne le début du cycle 4 (la classe de cinquième).

> « Dès le début du cycle 4, des questions relatives au hasard sont abordées à partir de situations de la vie courante (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.). **Les représentations initiales des élèves sont interrogées** et des débats sont suscités, notamment grâce à des **expérimentations qui peuvent donner lieu à recueil et traitement statistique des résultats**. La perception naturelle du hasard peut être **qualifiée** dans un premier temps par des adjectifs (peu probable, probable, certain, …). Ces débats et ces activités sont l'occasion, petit à petit, d'ordonner les probabilités, de quantifier le hasard sur une **échelle** de 0 à 1, d'introduire et de consolider le **vocabulaire** lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves **calculent** des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le **modèle équiprobable**. »

On peut ainsi distinguer quatre points pour la classe de cinquième :

– interroger les représentations initiales des élèves ;

– expérimenter, effectuer un recueil statistique des résultats, débattre ;

– qualifier le hasard par des adjectifs, quantifier sur une échelle de 0 à 1, introduire et consolider le vocabulaire ;

– calculer des probabilités en s'appuyant sur le modèle équiprobable.

Mis à part la première, ces quatre étapes ne sont pas entièrement chronologiques. La qualification et la quantification du hasard sont progressives. Le vocabulaire s'enrichit au fur et à mesure des expérimentations. Il est préférable de ne pas se précipiter sur le calcul, mais des calculs simples peuvent progressivement expliquer certaines observations expérimentales.

Le document d'accompagnement précise l'étape suivante, se produisant en classe de quatrième.

> « La **stabilisation des fréquences** peut être constatée à partir de la classe de quatrième. **L'interprétation fréquentiste** permet alors de contrôler a posteriori une hypothèse d'équiprobabilité ou d'approcher une probabilité inconnue, ce qui conduit à dépasser le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5e. »

C'est dans ce cadre que la simulation d'expériences aléatoires prend tout son sens. Les élèves utilisent (conçoivent ou améliorent) des algorithmes programmés sur le logiciel Scratch ou utilisent le tableur. Les deux logiciels permettent de développer des compétences numériques différentes. Le logiciel Scratch permet d'intégrer un travail de simulation aux objectifs de la partie « algorithmique et programmation » du programme du cycle 4. L'utilisation du tableur est plutôt à rattacher à son usage en statistique.

3.1 – Qualifier puis quantifier progressivement le hasard

Comme le stipule le programme du cycle 4, il est nécessaire de partir d'une évaluation des conceptions a priori des élèves. L'être humain possède certaines conceptions a priori du hasard qui peuvent être causes d'erreur ou d'incompréhension. Il est particulièrement utile de tester certains « biais » dus à des conceptions a priori des élèves et d'en débattre avant de débuter un « enseignement » des probabilités comme si le terrain était vierge. Parmi ces « idées fausses », citons (la liste n'est pas exhaustive) :

– le refus de mesure du hasard (tout est possible, on ne peut rien dire) ;

– le biais d'équiprobabilité (a priori tous les cas possibles sont équiprobables) ;

– le biais d'alternance (on imagine certaines régularités du hasard et, à pile ou face, PFFP semblera plus probable que PPPP par exemple) ;

– l'effet mémoire (si l'on a eu quatre fois pile on a plus de chances d'avoir face au prochain lancer ; on applique la loi des grands nombres sur des petits nombres) ;

– la confusion effectifs-fréquence (la probabilité correspond à un effectif et non à une fréquence) ou une erreur sur la base d'évaluation d'une proportion ;

– la mauvaise prise en compte de la taille de l'échantillon…

Il paraît nécessaire de tester ces conceptions, de réaliser des expériences aléatoires (éventuellement prolongées par la simulation en utilisant une animation « clé en main » dans un premier temps) pour montrer que les observations sont en contradiction avec certaines opinions a priori.

Questionnaire interrogeant les conceptions a priori des élèves

Voici un exemple de questionnaire, inspiré de l'article de Jacques VERDIER[17], dans lequel on trouvera certaines réponses d'élèves analysées.

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ? Pourquoi ?

Q2. On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c'est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois. Ai-je raison ?

Q3. « Si je lance simultanément deux pièces de 1 €, il y a une chance sur trois de voir un pile et un face » : cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

---

[17] Voir [7].

Q4. On lance quatre fois une pièce de 1 € et on note la suite des « pile » (P) ou « face » (F). Quel est le plus probable, obtenir PPPP ou obtenir PFFP ?

Q5. On lance plusieurs fois un dé dont trois faces sont bleues et trois faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?

Q6. On lance plusieurs fois un dé dont deux faces sont bleues et quatre faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?

Q7. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?

Q8. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?

Q9. Céline et Paul jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Paul est un peu tricheur, et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes les faces. Quand Céline lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Paul lance le sien ? Pourquoi ?

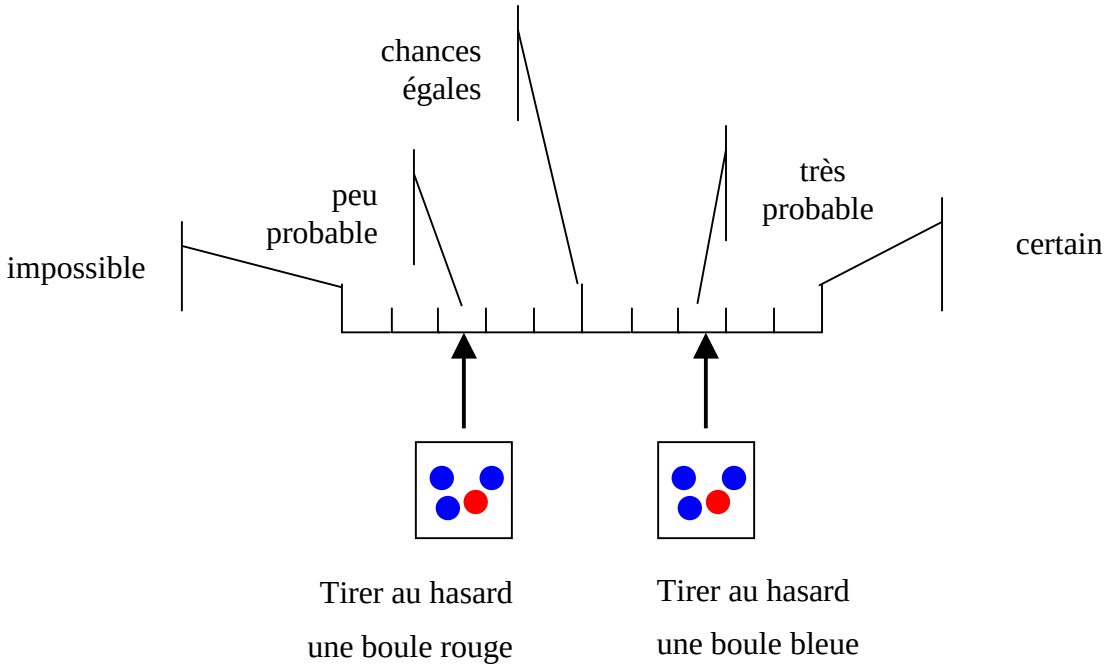
Q10. On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un 1, deux faces avec un X, et une face avec un 2. Si on le lance, qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? Et qu'est-ce qui sera le moins facile ? Pourquoi ?

Q11. On lance deux dés. Si le total des deux est supérieur à 9, tu marques un point ; si cette somme est inférieure à 4, c'est moi qui marque un point. Qui a le plus de chances de gagner ?

Q12. Dans un jeu de société, tu dois faire un total de six pour commencer à jouer. Tu peux lancer au choix un seul dé, ou deux dés. Que choisis-tu ? Et s'il fallait faire un total de cinq ?

Utilisation d'une échelle de probabilité et quantification progressive

L'utilisation d'une « échelle de probabilité », construite progressivement, permet en début d'apprentissage de qualifier la « probabilité » de certains événements et de situer ces probabilités les unes par rapport aux autres. La quantification peut s'effectuer en précisant les graduations de l'échelle. On peut indiquer la probabilité d'un événement sur une échelle de probabilité comme ci-dessous, depuis 0, événement impossible, jusqu'à 1, événement certain.



Voici un exemple d'exercice exploitant une telle échelle de probabilité puis un questionnaire à choix multiples travaillant le vocabulaire et un début de quantification.

1. Placer une flèche sur l'échelle de probabilité pour indiquer la probabilité des événements suivants.

a) Vous lancez une pièce d'un euro et obtenez « face ».

b) Noël sera cette année le 25 décembre.

c) Il va pleuvoir durant la première semaine de décembre.

d) Un homme a trois têtes.

e) Vous jouez au loto et gagnez le gros lot.

f) Vous lancez un dé et obtenez un nombre pair.

g) Il va pleuvoir demain.

h) L'équipe de France va remporter son prochain match international de football.

i) Un élève de votre classe a son anniversaire demain.

2. Un sac contient trois balles blanches et deux balles grises. Placer une flèche sur l'échelle de probabilités suivante pour indiquer :

a) la probabilité d'extraire au hasard une balle blanche du sac ;

b) la probabilité d'extraire au hasard une balle grise du sac.

3. Questionnaire à choix multiples

1. Quelque chose qui se produit de façon peu probable a une probabilité entre :

☐ 0 et 0,5

☐ 0,5 et 1

☐ 1 et 2

2. Quelque chose qui se produit de façon probable a une probabilité entre

☐ 0 et 0,5

☐ 0,5 et 1

☐ 1 et 2

3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 avec un dé supposé équilibré ?

☐ un sixième

☐ un

☐ zéro

4. Quelle est la probabilité d’obtenir « face » avec une pièce supposée équilibrée ?

☐ 1

☐ 0,5

☐ 0,2

5. Quelle est la probabilité d’obtenir un nombre pair avec un dé supposé équilibré ?

☐ un sixième

☐ un tiers

☐ un demi

6. Une pièce supposée équilibrée est lancée trois fois. Elle tombe deux fois sur « face » et une fois sur « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au prochain lancer ?

☐ 1

☐ un demi

☐ 0

7. Un sac contient sept boutons. Trois d’entre eux sont verts. Quelle est la probabilité d’extraire au hasard un bouton vert du sac ?

☐ un septième

☐ deux septièmes

☐ trois septièmes

8. Quelque chose qui a autant de chances d’arriver ou de ne pas arriver a une probabilité de

☐ 100 %

☐ 50 %

☐ 0 %

9. Un sac contient seulement 5 boutons, qui sont tous bleus. Quelle est la probabilité d’extraire au hasard un bouton rouge du sac ?

☐ 0

☐ 0,5

☐ 1

10. Un sac contient quatre boutons blancs. Combien de boutons noirs faut-il ajouter pour avoir autant de chances de tirer au hasard un bouton noir ou un bouton blanc du sac ?

☐ 4

☐ 8

☐ 0

3.2 – Exploiter une double approche empiriste et théorique

Ni l'approche empirique, expérimentale, ni l'approche théorique, classique, de la notion de probabilité ne permettent à elles seules d'en comprendre les différentes dimensions. Il est nécessaire de développer ces deux idées simultanément et d'en montrer la dépendance, particulièrement dans le cadre de la modélisation.

À ce propos, le didacticien Heinz Steinbring ([6] - 1991) s'exprime ainsi :

> « Il est nécessaire de créer un cadre éducatif dans lequel les liens mutuels entre probabilités et hasard, aussi bien qu'entre les différents concepts de probabilité, permettent aux conceptions et à la théorie de se développer à l'unisson. Le processus d'enseignement doit répondre au paradoxe selon lequel la clarification et la compréhension des concepts fondamentaux [en probabilité] ne peut se réaliser qu'avec la théorie complète des cours d'enseignement des années à venir. Une condition nécessaire importante pour satisfaire à cette exigence en classe est d'éviter de développer l'éducation à l'aléatoire exclusivement en termes de fréquence ou de symétrie classique. […]
>
> Même un concept aussi élémentaire que l'équiprobabilité nécessite simultanément l'interprétation mathématique idéale d'égale distribution au sens arithmétique, et la représentation empirique du statistiquement équidistribué, telle qu'elle émerge des expériences concrètes. L'équidistribution comme modèle ne signifie pas que les résultats réels devraient être exactement équidistribués ; si cela se produit réellement c'est une raison suffisante pour douter de l'expérience. Le modèle de l'exacte équidistribution est requis comme référence pour décider si les fréquences observées peuvent être considérées comme issues d'une telle distribution uniforme, ou si les écarts sont trop grands pour une telle affirmation. […] Les relations entre objet et modèle doivent toujours rester à l'esprit durant le processus d'enseignement. La dialectique objet-modèle nécessite une approche mixte. »

Pour Heinz Steinbring, l'apprentissage de la notion de probabilité doit comporter les étapes suivantes :

– jugements personnels et « prédiction » à propos de phénomènes aléatoires ;

– comparaison entre les données empiriques (expérimentations) et différents modèles théoriques conjecturés (simulations éventuelles) ;

– création de principes généraux et caractérisation plus précise des phénomènes aléatoires.

Graham Jones, chercheur australien, fait le constat suivant dans un article de 2005 (voir [3]) dressant alors l'état des lieux des recherches en didactique des probabilités.

> « Le contenu de ce que l'on doit enseigner en probabilités a connu plusieurs changements depuis plus de 15 ans [2005] durant lesquels les probabilités sont devenues une part du tronc commun d'enseignement. […] Les changements en cours ont conduit à mettre davantage en avant les probabilités expérimentales et leur lien avec les probabilités théoriques. De plus, en conséquence de ces changements, le lien puissant et historique entre probabilités et inférence statistique est devenu plus transparent. […] Les recherches et expérimentations pédagogiques de ces 15 dernières années ont conduit à un effort concerté pour lier statistique et probabilités en relevant les défis de « quoi enseigner » et « comment enseigner ». »

Jeu équitable ?

Dans cette activité, les élèves explorent deux jeux pour deux joueurs. Ils débattent du fait que le jeu est ou non équitable. Le premier jeu n'est pas équitable et cela doit apparaître en jouant. Le second jeu est équitable, ce qui est plus difficile à observer et leur avis peut être partagé.

À un premier niveau, il n'est pas attendu des élèves de calculer des probabilités, mais de développer une intuition des chances et de leur probabilité de gagner.

Jeu A : à chaque partie, on lance deux dés et on multiplie les chiffres obtenus. Le joueur 1 gagne si le produit est impair. Le joueur 2 gagne si le produit est pair.

Le binôme joue un grand nombre de parties en prenant note du nombre de victoire de chaque joueur. Une discussion s'engage ensuite pour savoir si le jeu est équitable ou quel joueur, sinon, est avantagé.

Jeu B : à chaque partie, on lance deux dés et on additionne les chiffres obtenus. Le joueur 1 gagne si la somme est impaire. Le joueur 2 gagne si la somme est paire.

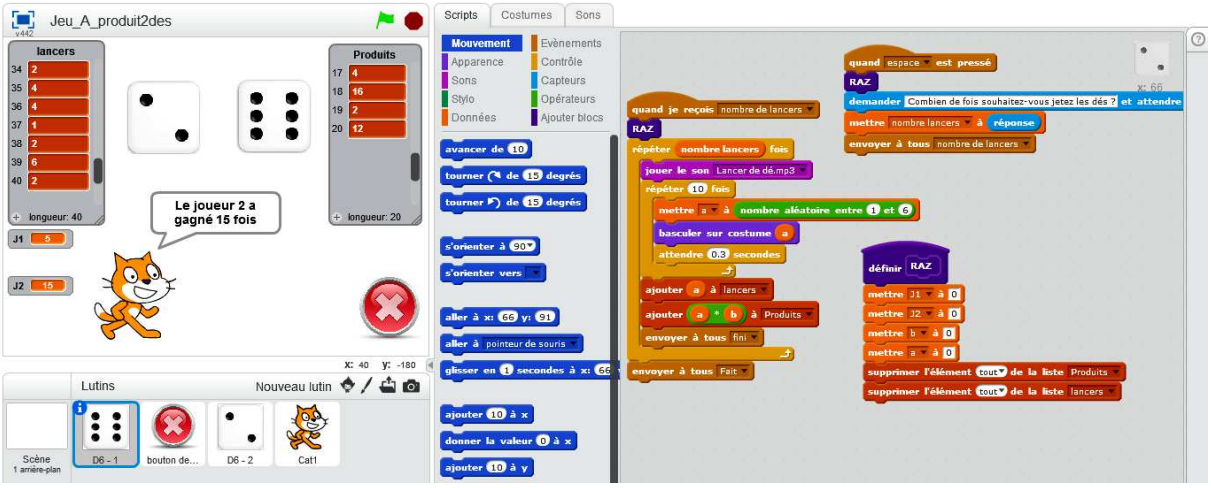
Le binôme joue un grand nombre de parties en prenant note du nombre de victoire de chaque joueur. Une discussion s'engage ensuite pour savoir si le jeu est équitable ou quel joueur, sinon, est avantagé.

On peut mettre en commun les données de la classe, notamment à propos du jeu B. On peut ensuite, selon le niveau d'apprentissage, raisonner sur les tables de multiplication et d'addition pour calculer les probabilités, en se situant dans le modèle ou chaque case du tableau est équiprobable.

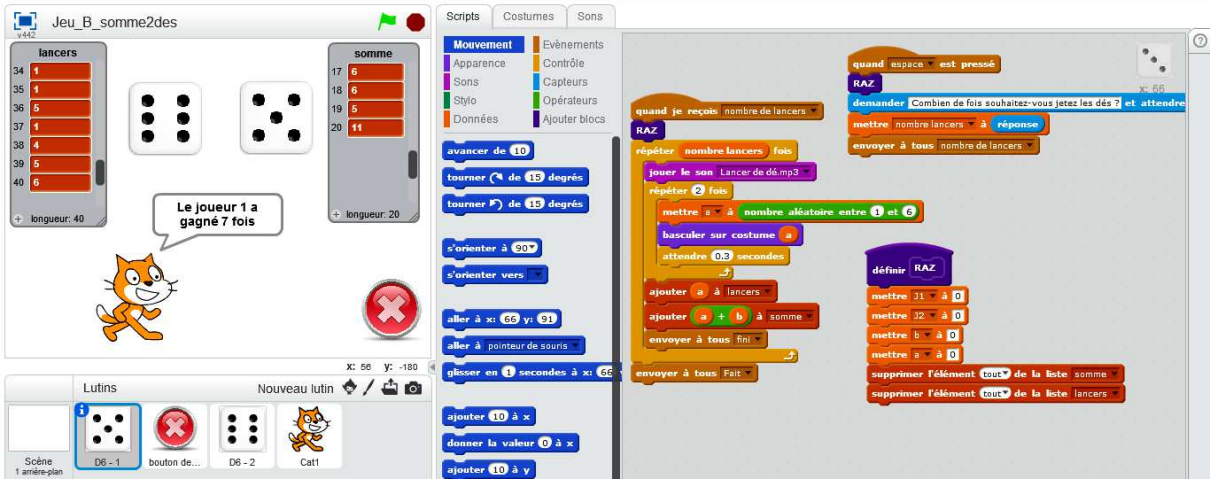
produit	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

somme	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Une simulation de ces deux jeux peut être élaborée sur Scratch (au moins partiellement par les élèves, selon l'avancement des apprentissages dans le domaine « algorithmique et programmation »).



Jeu A : sur 20 parties, le joueur 2, qui parie sur un produit pair, a gagné 15 fois.



Jeu B : sur 20 parties, le joueur 1, qui parie sur une somme impaire, a gagné 7 fois.

Jeu et stratégie : « Course de la somme de deux dés »

L'activité suivante illustre l'article de Heinz STEINBRING – *The theoretical nature of probability in the classroom* – 1991 ([6]). On peut l'actualiser en introduisant la simulation.

Le jeu se joue à trois joueurs avec deux dés. Chaque joueur choisit l'un des nombres de 2 à 12 avec des choix différents. On lance les deux dés et on fait la somme des chiffres apparus. Si cette somme correspond à l'un des choix des joueurs, le joueur correspondant marque une croix dans sa colonne. Le premier joueur qui a réussi à compléter sa colonne avec des croix a gagné.

Arrivée										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Départ										

1. Effectuer une partie et compléter, à chaque lancer le tableau suivant.

Somme des deux dés	Nombre de lancers avec cette somme
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

11	
12	
Nombre total de lancers :	

2. Certains nombres permettent-ils de gagner plus sûrement que d'autres ? Expliquer.

3. Prolongement (proposé après la séance par exemple à la maison).

La table suivante comporte les différentes possibilités pour lesquelles chacune des sommes 2, 3, 4 apparaissent. Compléter la table.

2	1 + 1		
3	1 + 2	2 + 1	
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Éléments de réponse

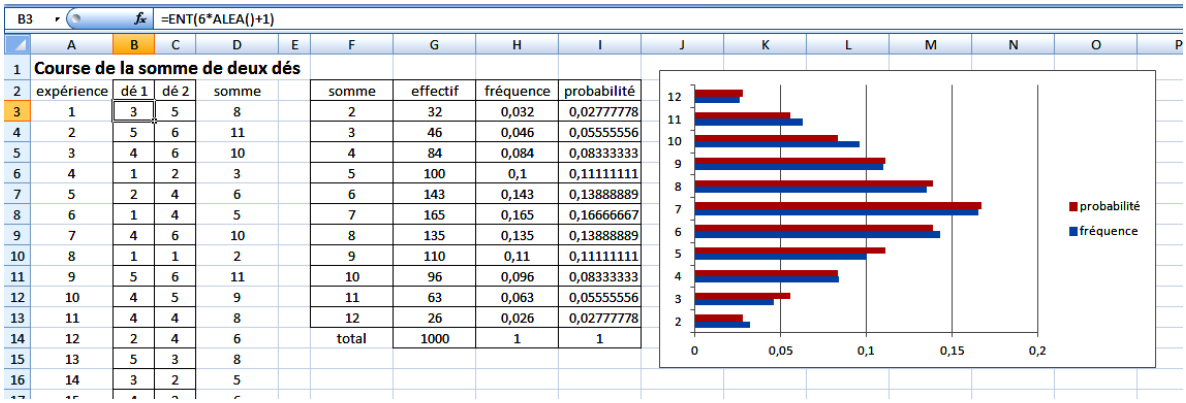
La compréhension de la règle du jeu est aisée et cet exemple peut être le premier rencontré d'une distribution non équiprobable.

L'activité peut se dérouler durant une séance de classe : 5 à 10 minutes de présentation ; 20 minutes de travail en groupe et au moins 10 minutes de discussion en classe entière.

La durée d'une partie dépend des choix effectués et de leurs probabilités p de succès. Le temps d'attente d'un succès correspond à une loi géométrique de paramètre p dont l'espérance est $1/p$. Le temps moyen de 10 succès « somme égale à 7 » est donc de $10 \times \frac{1}{\frac{6}{36}} = 60$ lancers.

2. La discussion peut se faire sur la base des observations des fréquences de chaque somme.

La simulation, par exemple à l'aide d'un tableur, permet d'obtenir une distribution de fréquences sur un grand nombre de lancers.



B3 =ENT(6*ALEA()+1)

Course de la somme de deux dés

expérience	dé 1	dé 2	somme
1	3	5	8
2	5	6	11
3	4	6	10
4	1	2	3
5	2	4	6
6	1	4	5
7	4	6	10
8	1	1	2
9	5	6	11
10	4	5	9
11	4	4	8
12	2	4	6
13	5	3	8
14	3	2	5

somme	effectif	fréquence	probabilité
2	32	0,032	0,02777778
3	46	0,046	0,05555556
4	84	0,084	0,08333333
5	100	0,1	0,11111111
6	143	0,143	0,13888889
7	165	0,165	0,16666667
8	135	0,135	0,13888889
9	110	0,11	0,11111111
10	96	0,096	0,08333333
11	63	0,063	0,05555556
12	26	0,026	0,02777778
total	1000	1	1

3. La table fait apparaître la distribution théorique des probabilités (en divisant par 36) sous forme d'un diagramme en barres horizontal, que l'on pourra comparer avec l'analogue obtenu sur les fréquences observées sur les parties jouées en classe ou les simulations.

2	1 + 1					
3	1 + 2	2 + 1				
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1			
5	1 + 4	2 + 3	3 + 3	4 + 1		
6	1 + 5	2 + 4	3 + 3	4 + 2	5 + 1	
7	1 + 6	2 + 5	3 + 4	4 + 3	5 + 2	6 + 1
8	2 + 6	3 + 5	4 + 4	5 + 3	6 + 2	
9	3 + 6	4 + 5	5 + 4	6 + 3		
10	4 + 6	5 + 6	6 + 4			
11	5 + 6	6 + 5				
12	6 + 6					

3.3 – Observer la stabilisation des fréquences dès la classe de quatrième

La banalisation de l'utilisation des outils numériques a considérablement modifié l'apprentissage de la notion de probabilité, permettant « d'observer » la stabilisation de la fréquence d'un événement lors de la reproduction, à l'identique, d'une expérience aléatoire. Cette observation peut, dans un premier temps, s'effectuer sur quelques valeurs numériques. On réalise par exemple quelques dizaines d'expériences physiques, puis on simule 1 000 expériences. Dans un second temps, une observation graphique de la fréquence cumulée de l'événement en fonction du nombre d'expériences réalisées pourra s'envisager. Mais il s'agit là d'un graphique déjà plus compliqué à comprendre. C'est un objectif de fin de cycle.

On donne ci-dessous un exemple d'activité pouvant être mise en place en début de quatrième. Cet exemple date de 2002, où il était proposé sans simulation. Il a été prolongé, à partir de la question 3., pour introduire une simulation sur tableur pouvant être réalisée par les élèves (de façon plus ou moins autonome selon la maîtrise des fonctionnalités du tableur).

Le camion pizza

La situation suivante est issue de la thèse de Gwendolyn ZIMMERMANN – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002 ([8]).

On donne à Stan le problème suivant à résoudre.

Un camion pizza a établi que 60 % de ses commandes par téléphone concernent des pizzas avec viande (bœuf, salami, etc.) et que les 40 % restant sont des pizzas sans viande (fromage,

végétarienne, etc.). On suppose que les commandes sont indépendantes. Quelle est la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées par téléphone soient toutes deux avec viande ?

Pour estimer cette probabilité, Stan utilise des boules de couleur. Il prend 6 boules rouges pour les pizzas avec viande et 4 boules vertes pour les pizzas sans viande. Il met les 10 boules dans un sac, le remue, prend au hasard une boule, note sa couleur et la remet dans le sac. Il effectue 50 fois l'expérience.

1. Pensez vous que les expériences de Stan lui permettront d'estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ? Justifier.

Si vous ne pensez pas que les expériences de Stan fonctionnent, comment les modifieriez-vous pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ?

2. On suppose que Stan a mené son expérience et obtenu les résultats suivants :

RRRVRRRVVVVRVRRVVVVRRRVRVRRVVVRRVVVRRVVRRRVVRVRVVR

Pouvez-vous utiliser ces résultats pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ? Si la réponse est oui, effectuer les calculs et expliquez votre raisonnement. Si la réponse est non, expliquez pourquoi.

3. Reproduire la feuille de calcul suivante pour simuler 1 000 réalisations de l'expérience consistant à tirer au hasard et avec remise deux boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules vertes. L'instruction simulant un tirage est =SI(ALEA()<0,6;"R";"V").

B3 : =SI(ALEA()<0,6;"R";"V")

	A	B	C	D
1	**Camion pizza**			
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat
3	1	V	R	VR
4	2	V	V	VV
5	3	R	R	RR
6	4	R	R	RR
7	5	R	V	RV
8	6	R	V	RV

L'instruction entrée en D3 et recopiée vers le bas est =CONCATENER(B3;C3).

4. Utiliser la feuille de calcul pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande.

5. Quelle opération directe permet d'obtenir la probabilité recherchée avec les données « 60 % des pizzas sont avec viande, 40 % sont sans viande » ?

Éléments de réponse

1. On peut penser qu'il faudrait plutôt tirer deux boules avec remise.

2. On peut regrouper les observations deux par deux.

RR RV RR RV VV VR VR RV VV VR RR VR VR RV VV RR VV VR RV VR RR VV RV RV VR

On observe 5 résultats RR sur 25 couples d'où une fréquence de 0,2. On peut estimer que la probabilité cherchée est de l'ordre de 0,2. Mieux vaudrait cependant effectuer davantage d'expériences.

G3 : =NB.SI(D3:D1002;"RR")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Camion pizza**							
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat			effectif	fréquence
3	1	R	R	RR		RR	371	0,371
4	2	R	R	RR				
5	3	V	R	VR				
6	4	R	V	RV				

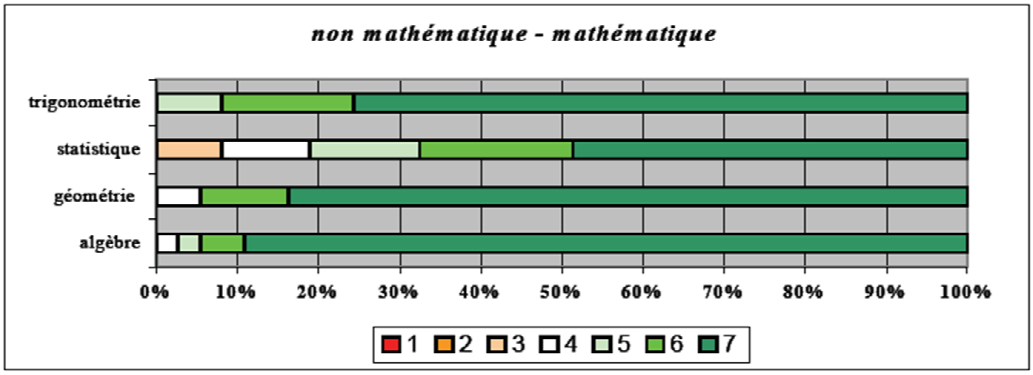
4. On utilise la fonction NB.SI du tableur.

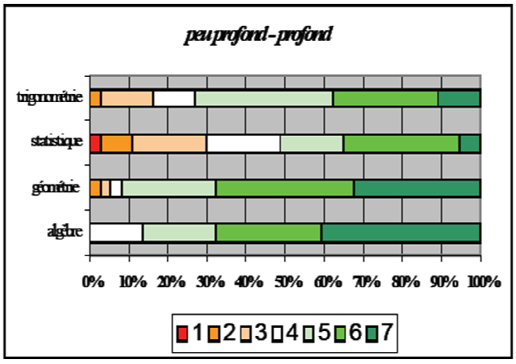
5. $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

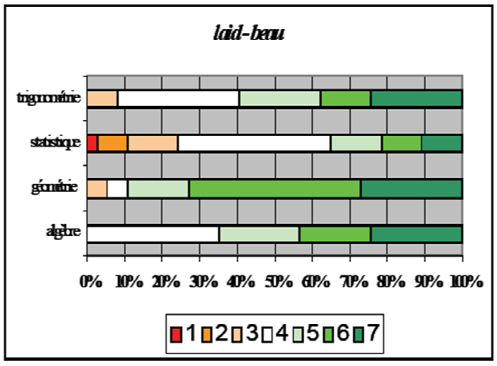
4 – Formation des enseignants

4.1 – Un état des lieux en statistique

Dans le cadre d'une thèse soutenue en 2005[18], Floriane Mathieu-Wozniak interrogeait 41 professeurs stagiaires de mathématiques sur leur image des différents domaines enseignés. Il en ressort que la statistique est plutôt « mathématique » : là-dessus, il n'y a pas de doute – même si elle l'est un peu moins que les autres domaines considérés. En revanche, elle est sensiblement moins brillante, quelque peu terne, elle est moins belle et moins profonde.







[18] Voir [4].

Cette image, assez négative, de la statistique est sans doute encore relativement majoritaire chez les professeurs de mathématiques français, même si l'on peut penser qu'elle évolue et que, par leur formation, les nouveaux professeurs l'ont en grande partie dépassée (la préparation au CAPES, par exemple, intègre dorénavant des leçons de statistique inférentielle issues des programmes de BTS). Elle s'explique en partie par un manque de formation dans le domaine et des contenus d'enseignement souvent techniques et peu intéressants. Par ailleurs, il s'agit en statistique de mathématiques « différentes » (rôles des raisonnements inductifs et déductifs, de la modélisation) conduisant à des attitudes pédagogiques inhabituelles.

La situation dans les classes a sans doute quelque peu évolué depuis 2005. La simulation (au programme depuis 2000) est globalement enseignée en seconde et se développe au collège. On rencontre cependant encore fréquemment des professeurs rejetant l'enseignement de la statistique et des probabilités en fin de progression et abordant de manière incomplète les contenus du programme. L'approche fréquentiste de la notion de probabilité en troisième était assez peu développée avant les programmes de 2016. Il n'était pas rare de voir, dans les cahiers des élèves, des cours de probabilités débutant par une définition correspondant au rapport des cas favorables au cas possibles. Un enseignement trop académique de la statistique inférentielle en terminale scientifique, contextualisant peu ou mal, sans laisser de place à l'expérimentation, est à craindre, notamment de la part de professeurs peu familiers de ce type d'enseignement et non formés.

3.2 – Des priorités de formation

Les priorités de la formation des professeurs du secondaire pour l'enseignement de la statistique et des probabilités pourraient être les suivantes.

1) La présentation de situations dans des contextes variés, notamment avec de « vraies données statistiques » et une initiation à la modélisation.

Il peut s'agir d'accompagner les enseignants dans les choix des activités proposés par les manuels, mais, pour l'essentiel cet apport documentaire proviendra d'institutions : formateurs ESPE, IREM, SFdS, APMEP, ressources Internet telles que celles de sites de la statistique institutionnelle. Il s'agit d'avoir les bons supports d'activité et cela demande une certaine expertise.

2) Une formation à l'organisation et à l'encadrement de la démarche d'investigation, à sa mise en œuvre avec différents logiciels et à son évaluation (prise d'information « en direct » lors de travaux pratiques, comptes-rendus de TP, possibilités offertes par les logiciels - tableurs, GeoGebra, Scratch, Scilab, R ...).

On rejoint ici des besoins plus globaux de formation, qui ne sont pas spécifiques à l'enseignement de la statistique et des probabilités, mais qui, dans ce domaine, sont incontournables.

3) Des apports théoriques permettant le recul nécessaire à l'enseignement des notions nouvellement introduites dans les programmes du secondaire.

Ce troisième point est une évidence, mais parce que c'est une évidence nous avons tenu à placer les deux premiers points avant. En effet, les apports théoriques ne suffisent pas et l'opérationnalité de cet enseignement passe avant tout par la contextualisation, la modélisation et l'expérimentation. Par ailleurs, la culture historique des enseignants concernant la statistique est souvent réduite. Une meilleure connaissance de la genèse, dans la première moitié du XX^{e} siècle, des notions de test d'hypothèse et d'intervalle de confiance,

des débats et controverses qu'elles ont suscités, notamment entre Fisher et Pearson-Neyman, éclaire utilement leur enseignement. La formation devrait intégrer cet aspect[19].

Conclusion

On attribue à Herbert George Wells (1866-1946) la « prophétie » suivante : "Statistical thinking will one day be as necessary for efficient citizenship as the ability to read and write". Ce jour est venu.

L'American Statistical Association liste six recommandations pour l'enseignement de la statistique[20] :

1. Mettre l'accent sur les compétences statistiques du citoyen (*statistical literacy*) et développer l'esprit statistique.

2. Utiliser de vraies données.

3. Privilégier la compréhension des concepts plutôt que l'accumulation de connaissances techniques.

4. Favoriser l'apprentissage actif dans la classe.

5. Utiliser la technologie pour développer la compréhension des concepts et l'analyse des données.

6. Utiliser les évaluations pour améliorer l'apprentissage des élèves.

On ne peut que souscrire à ces recommandations. Les nouveaux programmes du secondaire sont relativement novateurs et ambitieux dans le domaine de la statistique et des probabilités, un effort particulier de formation et d'accompagnement des enseignants est nécessaire à la réussite de leur mise en œuvre.

Références

[1] AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education – College report*, ASA 2005 et 2010. Rapport téléchargeable à l'adresse : http://www.amstat.org/education/gaise/

[2] ARMATTE, Michel, *Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique*, Revue électronique *Statistique et enseignement*, SFdS 2010, www.statistique-et-enseignement.fr.

[3] JONES Graham, THORNTON Carol – *An overview of research into the teaching and learning of probability* – 2005.

[4] MATHIEU-WOZNIAK, Floriane, *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. un repérage didactique*, thèse sous la direction d'Yves CHEVALLARD (2005).

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/41/60/PDF/these_wozniak_floriane.pdf

[5] MEUSNIER, Norbert, *Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques* dans *Histoire de probabilités et de statistiques*, Ellipse, 2004.

[6] STEINBRING Heinz – *The theoretical nature of probability in the classroom* – 1991.

[7] VERDIER Jacques – *Le hasard au collège* – Bulletin APMEP n° 484 – 2009.

---

[19] Voir [2].

[20] Voir [1].

[8] ZIMMERMANN Gwendolyn – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.

[9] Ressources pour la classe de première générale et technologique – *Statistiques et probabilités*, DGESCO 2011.

[10] Ressources pour la classe terminale générale et technologique – *Probabilités et statistique*, DGESCO 2012.

[11] Ressources pour le cycle 4 – *Probabilités*, DGESCO 2016.

Les documents ressources sont accessibles par :

http://eduscol.education.fr/cid45766/mathematiques-pour-le-college-et-le-lycee.html