TECHNIQUES DE CALCUL ET SYSTEMES DE NOMBRES : QUELLES ARTICULATIONS DE L'ECOLE AU COLLEGE ?

Céline CONSTANTIN

Résumé.
Tandis que la construction de systèmes de nombres et l'enseignement de certaines techniques de calcul (numérique ou algébrique) semblent pouvoir s'organiser autour de la propriété de distributivité, des extraits d'analyses de manuels et de discours enseignants nous amènent à questionner la prise en compte potentielle ou effective de ces articulations dans l'enseignement. Nous présenterons également une ingénierie didactique afin d'en interroger les effets, et d'aborder des aspects sémiotiques et linguistiques au cœur du calcul algébrique et de ses relations avec les nombres.

Ce texte propose d'interroger des articulations possibles entre construction de techniques de calcul et construction de systèmes de nombres tout au long de la scolarité obligatoire. En prenant appui sur des analyses de manuels et de programmes, la première partie permet de faire émerger des enjeux de formalisation, d'unification et de généralisation qui semblent potentiellement au cœur de cette articulation. Comme nous le verrons, ces enjeux paraissent absents ou faiblement explorés dans les manuels récents comme plus anciens. Ceci nous amène à questionner, à partir de résultats de recherches ou d'extraits d'entretiens menés auprès d'enseignants, les difficultés pour les élèves comme pour les professeurs à construire ou à reconstruire des liens dans le domaine numérique comme algébrique entre l'émergence de nouveaux nombres, ou de nouvelles techniques de calcul. Nous abordons enfin quelques résultats issus d'une expérimentation dans une classe de collège menée au moment de l'introduction de la propriété de distributivité. Celle-ci correspond à une première partie d'une ingénierie didactique prenant en compte des articulations possibles entre des techniques de calcul de multiplications anciennes (abordées à l'école primaire) et la construction d'un calcul algébrique. Elle permet d'entrevoir des effets potentiels de la prise en compte des articulations qui nous intéressent pour l'enseignement.

Préambule : calculs et systèmes de nombres de l'école au collège

A la suite des travaux de Chevallard (1989), nous définissons, en première approche, un système de nombres comme un ensemble sur lequel on considère d'une part, une addition associative, commutative et qui possède un élément neutre, d'autre part, une multiplication ayant les mêmes propriétés et qui soit de plus distributive par rapport à l'addition, et enfin une relation d'ordre (total) compatible avec l'addition et la multiplication[1]. Les systèmes de nombres rencontrés tout au long de l'école et du collège concernent des ensembles de plus en plus vastes, des nombres entiers naturels aux nombres décimaux, relatifs ou rationnels. Nous n'aborderons pas ici les situations conduisant à l'émergence de nouveaux objets que l'on considèrera ensuite comme des nombres, à l'instar des décimaux qui peuvent apparaître comme une solution à l'insuffisance des entiers pour la mesure de grandeurs. Nous nous

---

[1] Nous renvoyons le lecteur à Chevallard (1989) qui propose de raffiner cette définition afin notamment d'exclure les anneaux non intègres et de caractériser les systèmes rencontrés de l'école au collège.

situons au moment où ces objets acquièrent le statut de nombre, autrement dit au moment où l'on fait avec ces objets ce que l'on fait usuellement avec des nombres : les comparer, les ajouter, les multiplier …

Avec les opérations, des techniques de calcul se construisent. Par techniques de calcul nous entendons à la fois des techniques permettant d'obtenir un résultat, autrement dit, une écriture réduite de nombre dans le domaine numérique, et des techniques permettant de produire une expression égale à une expression donnée dans le domaine algébrique, c'est-à-dire des techniques permettant de développer, factoriser ou réduire des expressions.

Chevallard (1989) soulignait déjà combien « le problème du calcul algébrique, de sa construction formelle comme de ses emplois […] est doublement lié » au « problème didactique de la construction des différents systèmes de nombres ». Il met en avant ce qu'il appelle une « incontournable dialectique » dans le sens où d'une part les systèmes de nombres offrent des domaines de calcul à partir desquels vont se constituer en particulier des techniques de calcul, et d'autre part, le calcul algébrique se trouve aux fondements de la construction de systèmes de nombres :

> Le calcul algébrique constituera le mobile essentiel, et l'outil fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs. (Chevallard 1989, p. 50)

Par exemple :

> C'est la considération de l'équation ax = b (a non nul) qui invite à passer à un système de nombres sur lequel la division (par un nombre non nul) soit possible ; et c'est cette extension qui, alors invite à étendre le calcul algébrique aux fractions rationnelles qu'elle permet maintenant de définir. (Chevallard 1989 p. 51-52)

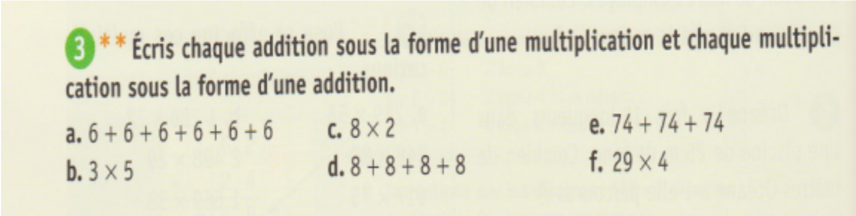
Et par suite, poursuit l'auteur « l'algèbre va permettre la formulation et l'étude des propriétés des systèmes de nombres ». Les enjeux d'extension et de formalisation qui se dessinent ici m'ont amenée à interroger cette dialectique ou cette co-construction au travers d'aspects formalisateur, unificateur et généralisateur ou FUG (Robert 1998). Ces aspects sont liés à une notion à enseigner à un moment donné du curriculum et visent à caractériser la distance entre connaissances anciennes et connaissances nouvelles. Une notion revêt ainsi un caractère formalisateur si elle offre un formalisme nouveau, non nécessairement algébrique, de connaissances anciennes ; unificateur si elle unifie des connaissances anciennes traitées de manière isolées jusque là, et généralisateur si elle étend des connaissances anciennes.

L'organisation de l'extension des ensembles rencontrés de l'école au collège dans les programmes et les manuels et la construction d'opérations et de techniques de calcul sur ces ensembles peuvent-elles être pensées au travers d'enjeux formalisateurs, unificateurs et généralisateur ?

Afin d'explorer des articulations possibles au regard de ces enjeux tout au long des systèmes de nombres, nous allons nous centrer sur une opération, la multiplication, et sur les techniques de calcul fondées sur l'une de ses propriétés, la propriété de distributivité. Dans cette perspective, nous examinons tout d'abord à partir d'étude de manuels et de programmes les techniques de calcul convoquant la propriété de distributivité, et les liens qu'elles entretiennent avec les constructions de systèmes de nombres. Ces liens sont-ils, ou peuvent-ils fondés sur des enjeux FUG et dans quelle mesure ?

Des enjeux FUG qui affleurent dans les programmes et les manuels ?

Le premier ensemble rencontré à l'école primaire est celui des nombres entiers positifs. La multiplication est introduite (MEN 2016) en CE1, et peut être définie par addition itérée ainsi que le donnent à voir certains manuels :

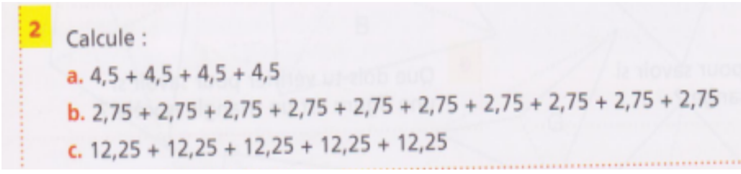


3 ** Écris chaque addition sous la forme d'une multiplication et chaque multiplication sous la forme d'une addition.

a. $6+6+6+6+6+6$ c. 8×2 e. $74+74+74$
b. 3×5 d. $8+8+8+8$ f. 29×4

Figure 1 : Outils pour les maths CE2 (2012)

Cette construction peut être reprise pour la multiplication d'un nombre décimal par un entier :



2 Calcule :
a. 4,5 + 4,5 + 4,5 + 4,5
b. 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75
c. 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25

Figure 2 : Euromaths CM2 (2009)

La multiplication est alors orientée et la commutativité découle de l'égalité des résultats, ce qui est soutenu dans certains manuels par des dénombrements d'objets disposés sous la forme de rectangles avec des comptages en ligne ou en colonne.
La propriété de distributivité apparaît implicitement dans les programmes de cycle 2 et de cycle 3 au travers de l'injonction suivante : « Utiliser les propriétés des opérations, y compris *celles du type* $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$ *».* Les analyses de manuels conduites dans le cadre d'une recherche antérieure (Constantin 2014) montrent que les techniques de calcul reposant sur la distributivité correspondent à des calculs de produits à effectuer mentalement ou en posant. Ainsi le manuel Cap Maths de CM2 (2017) propose-t-il de calculer 37×73 « sans poser » à partir de la donnée du produit de 37 par 63. Il s'agit *a priori* de calculer 10 fois 37, puis d'ajouter 370 au résultat donné.

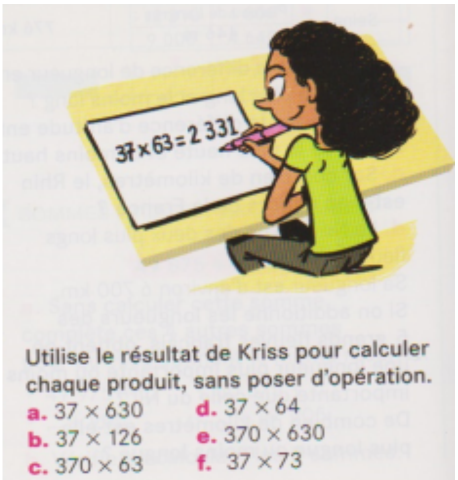


Figure 3 : Cap Maths CM2 (2017)

La technique de calcul posé de multiplication « usuelle » repose de même sur la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dont témoignent les produits partiels mis en avant par certains manuels à l'instar de l'extrait suivant :

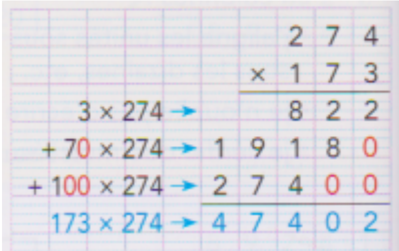


Figure 4 : Maths explicites CM2 (2016)

La distributivité fonctionne implicitement dans ces techniques de calcul à l'école primaire, elle n'est pas encore objet d'étude officiel, et n'est pas nommée. Dès lors, elle apparaît très normalement traitée en « préconstruction » dans le sens où les techniques de calcul sont montrées, sans explicitation de savoirs correspondant. Cela ne signifie pas que l'on ne puisse pas interroger ces techniques ou leur validité, elles peuvent être accompagnées de justifications locales dans les manuels s'appuyant sur des découpages de rectangles. Mais l'étude de la propriété, son ou ses formalismes, son domaine de validité ne pourra se faire dans sa généralité que plus tard. La distributivité pourra alors se constituer comme élément de justification commun aux techniques anciennes de calcul mental et posé de multiplication tout en les unifiant.

La définition de la multiplication par addition itérée sur les entiers naturels et l'associativité de l'addition permettent de plus de la justifier à partir d'un exemple générique en écrivant par exemple :

$5 \times 12 = 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5$

Soit $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5)+(5+5)$ ou encore$(5 \times 10) + \ (5 \times 2)$.

Elle peut être justifiée de la même manière sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$. La définition de la multiplication par addition itérée, et l'associativité de l'addition assurent par exemple les égalités :

$2{,}75 \times (10+2) = 2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75$
$= (2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75+2{,}75)+(2{,}75+2{,}75) = 2{,}75 \times 10 + 2{,}75 \times 2$

La généralisation peut être construite dans une certaine mesure. Néanmoins, lorsqu'en 6^{e} la multiplication est étendue sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$, elle ne peut plus être définie par addition itérée. L'environnement théorique change de nature. Les documents d'accompagnement des programmes du collège de 2008[2] suggèrent des constructions fondées sur des raisonnements sur des grandeurs (aires ou prix) ainsi que l'utilisation du point de vue théorique, de la notion de quotient permettant de définir par exemple le produit $2{,}14 \times 3{,}7$ comme quotient par 10 du produit connu $2{,}14 \times 37$. Cela se justifie en effet par l'égalité reposant sur l'associativité étendue de la multiplication sur les nombres décimaux :

$$(2{,}14 \times 3{,}7) \times 10 = 2{,}14 \times \left(\frac{37}{10} \times 10\right) = 2{,}14 \times 37$$

Si la commutativité[3] (sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) et l'associativité (sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$) de la multiplication anciennement connues sont étendues (sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$), alors la multiplication est ainsi définie. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est, par suite, nécessairement étendue. L'exemple générique suivant pourrait être envisagé comme élément justificatif. La distributivité sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{N}$ permet, avec l'associativité de la multiplication postulée sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$ de justifier les égalités suivantes :

$(2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5) \times 10 = (2{,}14 \times 3{,}2) \times 10 + (2{,}14 \times 0{,}5) \times 10 = 2{,}14 \times 32 + 2{,}14 \times 5$

et :

$[2{,}14 \times (3{,}2+0{,}5)] \times 10 = 2{,}14 \times [(3{,}2+0{,}5) \times 10] = 2{,}14 \times (32+5) = 2{,}14 \times 32 + 2{,}14 \times 5$

---

[2] Ces documents d'accompagnement sont toujours associés aux programmes actuels (BO spécial n°11 du 26 novembre 2015) dans le sens où ils sont cités comme référence dans les ressources d'accompagnement.

[3] La commutativité de la multiplication permet de définir les produits sur $\mathbb{N} \times \mathbb{D}^+$.

Ainsi, $2{,}14 \times (3{,}2 + 0{,}5)$ et $2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5$ apparaissent comme étant le quotient de $2{,}14 \times 32 + 2{,}14 \times 5$ par 10. L'unicité du quotient assure l'égalité $2{,}14 \times (3{,}2 + 0{,}5) = 2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5$ qui témoigne de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sur $\mathbb{D}^+ \times \mathbb{D}^+$.
L'environnement théorique et la construction des opérations tels que les programmes et les manuels les donnent à voir permettent de dégager un premier mouvement de généralisation de la propriété de distributivité : cette propriété peut se déduire dans la théorie numérique dont disposent les élèves lorsqu'elle devient objet d'enseignement. Autrement dit elle peut passer du statut de préconstruit[4] implicitement manipulé au travers de techniques de calculs anciennes au statut d'objet construit.
Elle se trouve parallèlement étendue pour la construction de nouveaux systèmes de nombres dont les ensembles d'objets ont émergé dans les classes précédentes (rationnels et relatifs). Son extension répond alors à un nouvel enjeu : celui de la construction d'opérations sur ces ensembles. Il s'agit d'un deuxième mouvement de généralisation car la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est axiome, l'extension des propriétés connues sur les systèmes antérieurs étant postulée pour la construction de techniques de calcul. Observons en particulier le cas des nombres relatifs.
Les documents d'accompagnement des programmes de 2008, toujours cités dans les documents d'accompagnement des programmes de 2016, mettent en avant le fait que :

> « La multiplication sur les décimaux relatifs ne peut résulter que d'une construction mathématique dans laquelle on cherche à étendre cette opération aux nombres relatifs en faisant en sorte que les propriétés de la multiplication sur les décimaux positifs continuent de s'appliquer. Toujours en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on commence par déterminer le produit de deux décimaux de signes différents […] ». *Le calcul numérique au collège* p. 20

Pourtant, l'étude de manuels de 4^{e} menée par Assude, Coppé et Pressiat (2012) montre que :

> « les liens entre distributivité et multiplication des relatifs ne sont pas clairement établis : d'une part, rien ne témoigne du fait que la définition de la multiplication des négatifs est choisie de façon à ce qu'elle soit (demeure) distributive par rapport à l'addition […] » p. 53-54

L'explicitation de l'enjeu de l'extension pour construire la multiplication sur les nouveaux nombres que sont les relatifs est absente et le prolongement des propriétés connues jusque-là sur les autres nombres se fait comme s'il allait de soi. Les analyses de manuels menées dans le cadre d'une recherche antérieure (Constantin 2014) corroborent ces résultats pour des éditions plus récentes correspondant aux programmes de 2008, avec une exception, nous allons y revenir. Qu'en est-il pour les manuels associés aux nouveaux programmes ?
Les manuels de cycle 4 de 2016 que nous avons analysés (Maths Monde, Mission indigo, Myriade, Sesamath et Transmath) semblent davantage mettre en avant la justification de la règle de multiplication dans les parties Activités, à l'instar de l'extrait suivant :

---

4 Rappelons qu'un « objet » est dit préconstruit lorsque son concept est absent (Chevallard 1989), son existence est assurée par monstration, dans une sorte d'évidence qui ne permet ni questionnement ni savoir scientifique à son propos. Les savoirs qui lui correspondent sont peu explicitables, fortement dépendants du contexte, et donc peu robustes. Notons qu'ici nous employons dans une acception un peu plus large le terme de préconstruit pour un objet qui n'est pas même désigné (il ne porte pas de nom, il est seulement utilisé implicitement, en acte). Ce sont les techniques calculatoires qui sont traitées en préconstruction et par conséquent le savoir implicitement à l'œuvre. Nous parlerons dans ce sens de préconstruction à propos de la distributivité à l'école primaire et au collège.

Activité 1

Multiplication de deux nombres relatifs

Une classe de 4e assiste à la projection d'un documentaire sur les animaux marins. Ils entendent : « La lumière solaire pénètre jusqu'à la cote – 500 m sous le niveau de la mer. Les cachalots peuvent descendre 5 fois plus bas que la lumière solaire. »

1 Calculer $-500+(-500)+(-500)+(-500)+(-500)$ et en déduire $5\times(-500)$.
Conclure sur la cote que peuvent atteindre les cachalots.

2 Ali se demande : « Mais alors comment calculer $1{,}2\times(-4)$? »
On ne peut pas procéder de la même manière car 1,2 n'est pas un nombre entier.
On utilise ici le fait que $1{,}2\times(-4)+1{,}2\times4$ est égal à $1{,}2\times(-4+4)$.
a. Calculer $1{,}2\times(-4+4)$ et en déduire le résultat de $1{,}2\times(-4)+1{,}2\times4$.
b. Calculer $1{,}2\times4$ et en déduire $1{,}2\times(-4)$.

3 Katia réagit alors : « D'accord, mais cela ne nous dit pas comment calculer $(-3)\times(-7)$. »
On utilise ici le fait que $(-3)\times(-7)+3\times(-7)$ est égal à $(-3+3)\times(-7)$.
a. Calculer $(-3+3)\times(-7)$ et en déduire le résultat de $(-3)\times(-7)+3\times(-7)$.
b. Calculer $3\times(-7)$ et en déduire $(-3)\times(-7)$.

Figure 5 : Transmath 4e (2016) p. 25

Ce manuel propose tout d'abord de construire la règle de multiplication à partir de la définition étendue de la multiplication par addition itérée sur un cas particulier. Dans un deuxième temps, en précisant la limite de cette construction dans le cas où l'un des facteurs n'est plus entier, est avancé un élément de justification dont l'égalité $1{,}2\times(-4)+1{,}2\times4=1{,}2\times(-4+4)$ évoque la propriété de distributivité. La validité de l'égalité n'est cependant pas questionnée et la distributivité n'est pas nommée ni déclarée généralisée à des fins de construction de la règle de la multiplication laissant muet l'enjeu d'extension. Ceci s'explique sans doute par le choix de l'organisation des savoirs fait dans la collection. La propriété de distributivité est introduite au chapitre 3 selon la progression du manuel proposée, tandis que la multiplication sur les nombres relatifs est abordée au chapitre 2. Les élèves ne disposant pas de cette propriété comme objet de savoir, on peut s'interroger sur le sens donné aux égalités affirmées dans l'activité précédente.

Les manuels de la collection Myriade (2016) et de la collection Mission Indigo (2016) organisent de même leur progression en traitant les opérations sur les nombres relatifs avant l'introduction officielle de la propriété de distributivité, celle-ci étant abordée à partir d'activités proposant plusieurs calculs numériques dans un chapitre consacré au calcul littéral. Pour ces trois collections, l'organisation de la rencontre des savoirs fait obstacle à leur articulation du point de vue des justifications et des co-constructions entre systèmes de nombres et techniques de calcul. Ce n'est pas le cas de tous les manuels.

Les manuels de cycle Maths Monde ou Sesamath proposent par exemple d'aborder la distributivité en amont. Le manuel Maths Monde 4e explicite la règle de distributivité pour prouver des égalités, tandis que le manuel Sesamath de 4e l'évoque en demandant de factoriser. Toutefois, aucun des deux n'explicite l'enjeu d'extension qui y préside. Les tentatives de manuels sont dans ce sens inabouties, et le constat est renouvelé sur 5 collections. Le manuel Transmath de 4e dans son édition de 2011 fait toutefois exception :

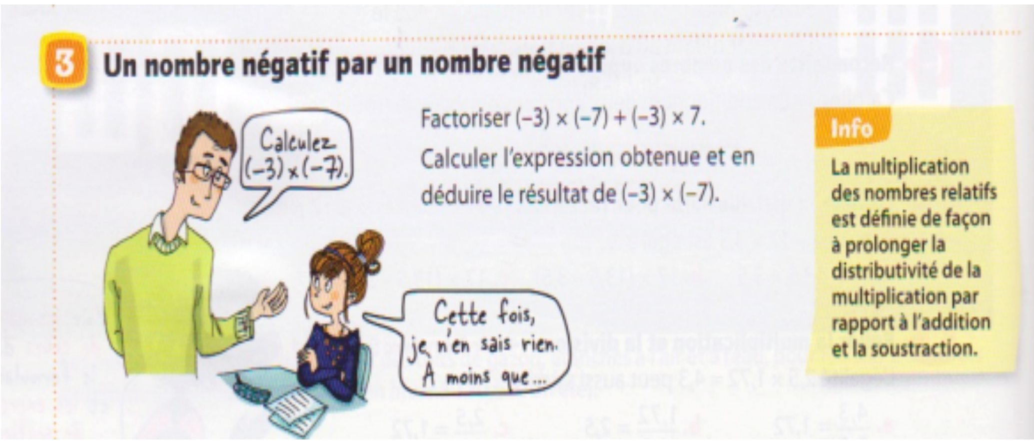


Figure 6 : Transmath 4e (2011) p. 14

Le discours autour de l'enjeu d'extension, consistant à prolonger les propriétés connues des opérations sur les nombres rencontrés jusqu'alors, fait ici explicitement l'objet d'une note. Toutefois, c'est le seul manuel parmi neuf manuels récents analysés à le faire[5]. De sorte que l'on puisse faire l'hypothèse que cet enjeu soit faiblement exploré dans les classes.
Plus généralement, l'étude des manuels et des programmes menée dans le cadre d'une recherche antérieure (Constantin 2014) donne à voir une possible organisation curriculaire basée sur les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité qui semble pouvoir persister au vu de l'organisation des savoirs dans les nouveaux programmes.
Le schéma suivant récapitule cette organisation :

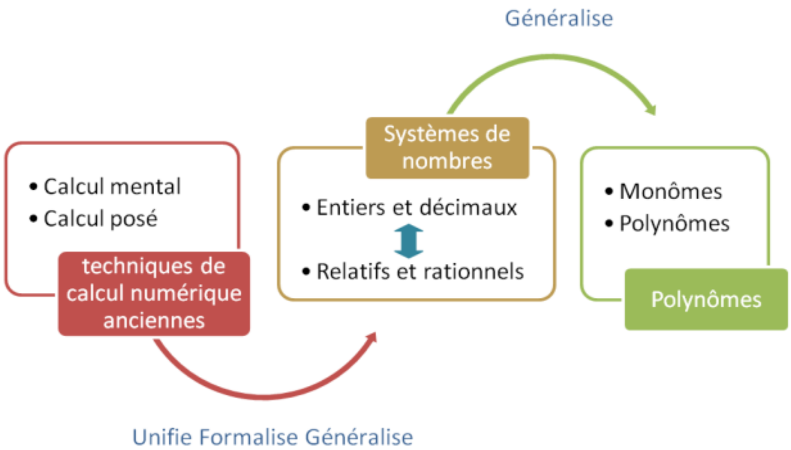
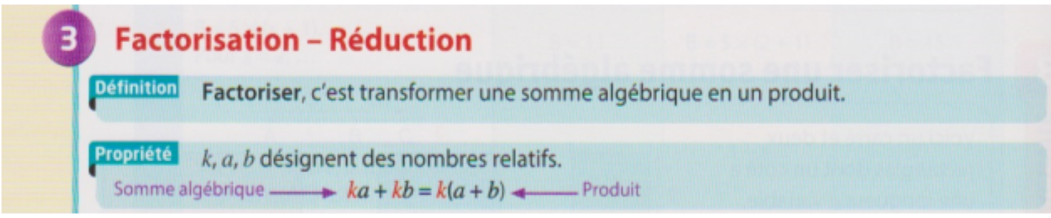


Figure 7 : Schéma d'une articulation possible entre construction de systèmes de nombres et techniques de calcul autour de la multiplication et de la propriété de distributivité.

Nous faisons apparaître ici une extension supplémentaire du côté des polynômes qui semble s'exercer de façon concomitante tout au long du collège. La propriété de distributivité concerne non seulement des nombres issus d'ensembles de plus en plus vastes, pour lesquels elle participe à la construction des opérations, mais aussi plus généralement, des expressions algébriques. Cette généralisation de son usage est pourtant peu discutée dans les manuels, et s'accompagne d'extensions muettes des formalismes de la propriété. Ainsi en va-t-il du formalisme proposé dans l'extrait suivant :

[5] Quatre manuels de 4e de 2011 ont été de plus analysés, correspondant aux collections Transmath, Phare, Triangle et Sesamath.



3 **Factorisation – Réduction**

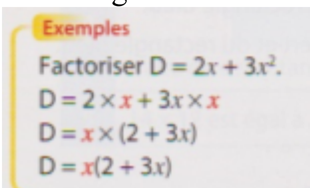
Définition **Factoriser**, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Somme algébrique $\longrightarrow ka + kb = k(a + b) \longleftarrow$ Produit

Figure 8 : Transmath 4e (2016) p. 40

Tandis qu'il est précisé que les lettres désignent « des nombres relatifs », l'exemple donné à la suite étend *a priori* l'utilisation de cette égalité au cas où b correspond à un monôme :



Exemples

Factoriser $D = 2x + 3x^2$.

$D = 2 \times x + 3x \times x$

$D = x \times (2 + 3x)$

$D = x(2 + 3x)$

Figure 9 : Transmath 4e (2016) p. 40

Ceci interroge la transparence de cet usage : « $3x$ » est-il interprétable comme une écriture de nombre relatif ? Les expressions étant considérées comme de nouveaux objets sur lesquels il est possible de calculer, un nouveau système émerge implicitement, l'anneau des polynômes (à coefficient dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Q}$ pour les expressions qui nous occupent en collège).

Dans ce cas, la distributivité unifie de fait deux techniques de calcul algébrique permettant de développer ou de factoriser une expression donnée. Pourtant l'étude de manuels conduite par Assude *et al.* (2012) citée précédemment montre que :

> Ces deux types de tâches sont séparés, la distributivité pouvant être spécifiée selon chacun. Ceci contribue selon nous, à accentuer l'atomisation des tâches.

Dans les nouveaux programmes, développement et factorisation apparaissent en 4e, dans un resserrement de l'étude par rapport aux programmes antérieurs pour lesquels le travail du calcul algébrique s'étendait de la 5e à la 3e.

Malgré ces changements, les cloisonnements observés par ces recherches demeurent, dans certains manuels du moins. Par exemple, le manuel Transmath de 4e (2016) sépare en deux paragraphes distincts « Développement » et « Factorisation ». Pour chacun, la propriété sous forme symbolique algébrique est réécrite dans le sens de lecture de gauche à droite, avant de donner des exemples. Selon les manuels, le nom même de la propriété de distributivité peut n'apparaître que dans le titre de la partie consacrée à ces paragraphes, mais le peu de discours accompagnant les techniques n'en fait plus mention, de sorte que les pratiques sont centrées sur des manipulations ostensives soutenues par des reconnaissances de formes appuyées par des mises en couleur. L'unification que pourrait, ou que devrait organiser la distributivité, se révèle donc en l'état, incomplète ou ignorée. Nous allons y revenir.

Par ailleurs, contrairement aux programmes de 2008, les différents formalismes tels qu'on les utilise culturellement en France (distributivité simple, double et identités remarquables) ne sont plus spécifiés. Les collections correspondant aux éditions de 2016 montrent donc des choix différents :

	TRANSMATH			MYRIADE			SESAMATH			MATHS MONDE		
	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e
$k(a+b) = ka+kb$		✓			✓	()	✓	✓	✓	✓	✓	
$k(a-b) = ka-kb$					✓		✓	✓	✓	✓		
$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$		✓				✓	✓	✓			✓	✓
Identités remarquables			✓			✓			✓			✓

Figure 10 : Choix et niveau d'introduction des formalismes pour la propriété de distributivité pour quatre collections.

On observe une grande diversité tant pour ce qui concerne le niveau d'introduction de la propriété de distributivité (en 5e ou en 4e) que pour les choix des formalismes et des niveaux d'enseignement où ils apparaissent. En introduisant la propriété en 4e (plutôt qu'en 5e dans les programmes de 2008), il devient également possible de ne pas proposer de formalisme correspondant à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction puisque l'on dispose alors de la multiplication sur les nombres relatifs. Seule l'écriture symbolique $k(a+b) = ka + kb$ devient nécessaire. Cela ne signifie pas pour autant que la seconde ne soit pas utile : pour développer $8(4x-3)$ comme pour factoriser $(x-4)(3x-5) - (8x+7)(3x-5)$ par exemple, disposer de $k(a-b) = ka - kb$ permet de s'affranchir d'un travail sur les signes et de penser l'équivalence entre soustraction et addition de l'opposé qui serait nécessaire si l'on ne disposait que de la somme.
Le fait que l'étude des techniques de calcul pour développer et factoriser soit resserrée en 4e et 3e amène à supposer que l'articulation entre ces différents formalismes puisse être davantage mise en avant. C'est ce que l'on observe dans certains manuels comme Myriade ou Transmath. Les articulations sont cependant lacunaires ou insuffisamment explorées, y compris pour des manuels qui tentent de les organiser comme le donne à voir l'extrait suivant :

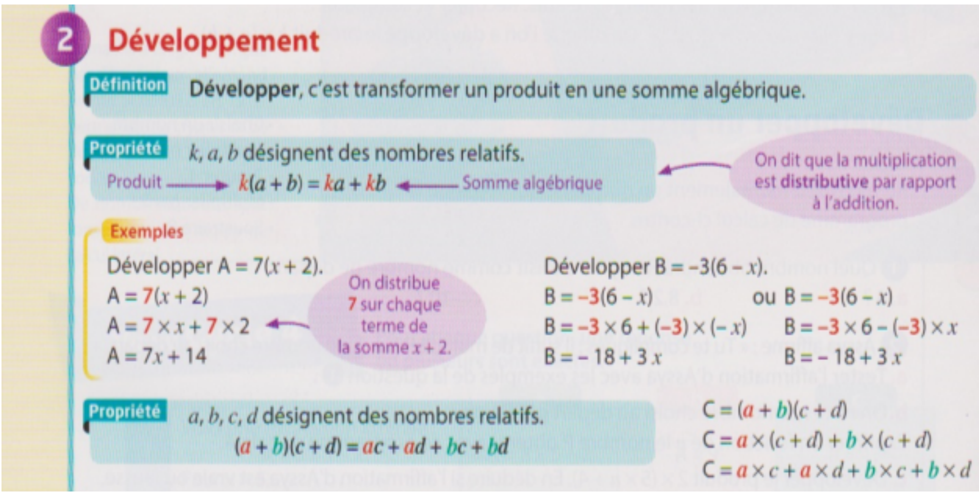


Figure 11 : Transmath 4e (2016) p. 40

Deux techniques de développement sont proposées pour l'expression B. A gauche, la deuxième ligne paraît provenir du développement de $-3(6+(-x))$ en référence au formalisme proposé par le manuel, après avoir *a priori* considéré la différence $6 - x$ comme équivalente à la somme $6 + (-x)$. A droite, l'écriture de la deuxième ligne suggère qu'on a développé le produit d'un facteur par une différence. S'agit-il d'une réinterprétation du développement écrit à gauche en utilisant à nouveau l'équivalence entre additionner et soustraire l'opposé ? Mais dans ce cas, additionner $(-3) \times (-x)$ revient à soustraire l'opposé de $(-3) \times (-x)$ qui ne peut s'écrire $(-3) \times x$ qu'au moyen d'une étape (que l'on aurait pu écrire $3 \times (-x)$). Ou bien s'agit-il d'un développement fondé par la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction formalisée par $k(a-b) = ka - kb$? Les écritures proposées et l'absence de discours sur l'équivalence entre soustraire et ajouter l'opposé semblent plutôt en accord avec cette seconde interprétation, ce qui paraît pourtant contradictoire au vu de l'absence du formalisme correspondant.
De même dans le passage à la double distributivité, la distributivité employée est à droite (le facteur considéré comme décomposé est celui de gauche) ce qui ne correspond pas au

formalisme simple de la distributivité donné au paragraphe précédent. Que l'on considère la distributivité à droite ou que l'on convoque la commutativité de la multiplication, les justifications ou les choix opérés (il était possible de développer à gauche) ne sont pas explicités. On peut supposer que le choix du manuel est guidé par la recherche de l'obtention dans l'ordre des produits (ordre correspondant à la lecture gauche / droite) sans avoir besoin de recourir à la commutativité de l'addition par économie. Mais là encore, l'exploration et les questionnements autour de ces techniques sont lacunaires.

Les aspects formalisateurs, unificateurs et généralisateurs dans l'articulation entre construction de systèmes de nombres et construction de techniques de calcul qui semblent en arrière plan de l'organisation des savoirs dans les programmes sont peu mis à l'étude dans les manuels, ou pas du tout, laissant à la charge de l'élève ces implicites et les recompositions afférentes.

Or, un certain nombre de recherches tendent à interroger la transparence de ces articulations qui peuvent ne pas aller de soi, pour les enseignants comme pour les élèves. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Une dialectique qui peut ne pas aller de soi

1. Des unifications qui peuvent ne pas avoir lieu pour les élèves

Des recherches telles que celles de Mok (2010) à propos du sens donné à la distributivité pour des élèves à Hong Kong, laissent à penser que certaines unifications peuvent ne pas aller de soi du point de vue des savoirs enseignés ou appris. Mok (2010) rencontre à Hong Kong ce manque d'unification pour un élève à l'occasion d'un entretien. Il fait suite à un test à propos de la distributivité dans le cadre numérique. L'une des questions posées consiste à dire si l'égalité 62.(23 + 49) = 62.23 + 62.49 est vraie et pourquoi. Voici ce qu'en relate l'auteure :

> The question 'Is 62 · (23 + 49) = 62 · 23 + 62 · 49 correct? Why?' (Task 1) was asked to see how students argued given a numerical example. Students demonstrated successful numerical application when they could say that 62 · (23 + 49) = 62 · 23 + 62 · 49 was correct without carrying out any computation. This represents a minimum knowledge of the distributive property as a property that they can apply in arithmetic. Students who failed to do this may have treated arithmetic and algebra as separate domains. In cases like this, the students may have been able to say that $a(b + c) = ab + ac$ but they still needed to check using calculation when they encountered numerical cases because they may have believed that 62 · (23 + 49) and 62 · 23 + 62 · 49 represented two different computation procedures and thus could possibly give different results. For example, a student did not know whether 62 · (23 + 49) = 62 · 23 + 62· 49 was correct. He needed to calculate the answer. When asked whether he had other methods besides calculation, he said that he learned 'algebra' in primary school but was not sure whether this question was the same as the 'algebra' he had learned. He was not able to elaborate any further (Mok, 2010, p. 65).

Mok (2010) cherche à partir d'entretiens d'explicitation à caractériser le sens donné par les élèves à la distributivité et leur capacité à raisonner en utilisant cette propriété. Elle montre au travers de cet épisode que la dialectique entre numérique et algébrique peut ne pas advenir, pour l'élève auquel elle se réfère ici, il n'y a pas de lien assuré entre les pratiques dans ces cadres. Sans avoir d'étude portant sur la représentativité de tels épisodes, nous pouvons néanmoins en conclure qu'en l'absence d'enseignement l'organisant, l'unification peut ne pas avoir lieu et faire obstacle aux apprentissages.

2. Côté enseignant : comment unifier ?

Les analyses des projets d'enseignement à partir d'entretiens menés auprès de 5 enseignants de collège[6] à l'occasion d'une recherche antérieure (Constantin 2014) montrent que s'ils perçoivent les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des savoirs à enseigner sur la distributivité, ils soulèvent un certain nombre de questions quant à ces caractéristiques ou à leur prise en compte dans leurs classes.

Ces pratiques déclarées permettent également d'avancer des hypothèses quant aux difficultés possibles pour prendre en compte ces enjeux d'unification, renvoyant potentiellement à des besoins de formation.

Ainsi Sandra témoigne-t-elle d'une certaine volonté de justifier les techniques de calcul numériques anciennes avec la propriété de distributivité :

> « les applications directes, ça va être du calcul mental donc quand ils connaissent 9 fois 7 et qu'ils ont oublié 9 fois 8 donc là ils répondent toujours qu'ils ajoutent 9 donc tu peux leur justifier que 8 c'est 7 plus 1 et on applique la distributivité là-dessus […] »

Mais poursuit-elle :

> « le problème c'est qu'ils savent le faire naturellement ils rajoutent 9, donc ils voient pas le lien avec le calcul littéral, […] pour eux c'est pas du développement, même si tu leur apprends, même si tu leur dis, pour eux ils ne l'intègrent pas comme quelque chose qui provient d'un développement »

Nous réinterprétons cet épisode relaté sous la forme suivante :

Comment mettre les élèves en activité pour compléter les connaissances anciennes (techniques de calcul mental et même posé) avec la distributivité ?

Observons néanmoins l'exemple choisi : il s'agit de justifier que 9×8 peut s'obtenir en ajoutant 9 à 9×7. Il n'est pas certain que cet exemple corresponde à ce qu'elle propose en classe, néanmoins, il interroge le choix des nombres pour faire émerger le lien avec la distributivité. Pour que cette propriété soit dévoilée dans une technique de calcul ancienne, le choix d'un nombre à décomposer sous la forme $a \pm 1$ induisant un facteur égal à 1 dans l'un des produits partiels n'est sans doute pas le plus approprié. Dans ce cas, deux éléments de justification se trouvent en concurrence : la propriété de distributivité et la définition de la multiplication par addition itérée. Or cette dernière suffit, avec l'associativité permettant le regroupement des 7 premiers termes, à justifier les égalités suivantes : $9 \times 8 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 9 \times 7 + 9$. Le facteur 1 n'ayant pas de raison *a priori* d'apparaître dans cette technique de calcul. Considérer la technique comme issue de l'égalité $9 \times 8 = 9 \times 7 + 9 \times 1$ plutôt que de l'égalité $9 \times 8 = 9 \times 7 + 9$, même si l'on réinterprète l'une par rapport à l'autre, demande de penser un produit par 1 supplémentaire qui n'a pas nécessairement lieu d'être, ce qui ne serait pas le cas pour calculer 35×12 par exemple, en exécutant $35 \times 10 + 35 \times 2$.

Par ailleurs, aucun des manuels de cycle 4 de 2016 analysés (Sesamath, Transmath, Maths Monde, Myriade et Mission Indigo) n'envisage de retour sur la technique de calcul posé de multiplication pour la justifier à partir de la propriété de distributivité lorsque celle-ci a été introduite.

Ces manuels ne prennent pas davantage appui sur les techniques de calcul mental anciennes dans les activités d'introduction de la propriété. Ce n'est pas le cas de certains manuels de 5e correspondant aux programmes de 2008. Dans ces derniers cependant, les activités proposées, non seulement ne permettent pas de revisiter pour les compléter les pratiques anciennes du

[6] Ces cinq enseignants, renommés dans la suite du texte, exercent dans des collèges ordinaires (non classés en REP), et leur ancienneté varie de 3 ans à 20 ans.

primaire, mais plus encore, en mettant en avant des cas où le facteur 1 apparaît, construisent finalement d'autres techniques, à côté, (concurrentes ? voire moins efficaces) fondées sur la distributivité, sans unifier au moyen de l'addition itérée, les techniques anciennes. Il y a donc une sorte de contre unification avec cette coexistence de deux techniques disjointes pour ces calculs. Elle est même explicite dans le manuel Transmath (2010) dont l'exercice 86 donne comme aide : « Pour multiplier par 11, on multiplie par 10 et au produit obtenu, on ajoute le nombre à multiplier par 11 ». La prégnance de spécimens présentant ce facteur égal à 1 dans les parties exercices est du reste de nature à renforcer ce phénomène, que l'on observe quelle que soit l'importance accordée aux tâches calculatoires (une grande variété existe de ce point de vue selon les manuels : le manuel Triangle (2010) propose ainsi 4 produits à effectuer mentalement, contre 13 pour Sésamath (2010), 24 pour Prisme (2010) ou 26 pour Transmath (2014)) :

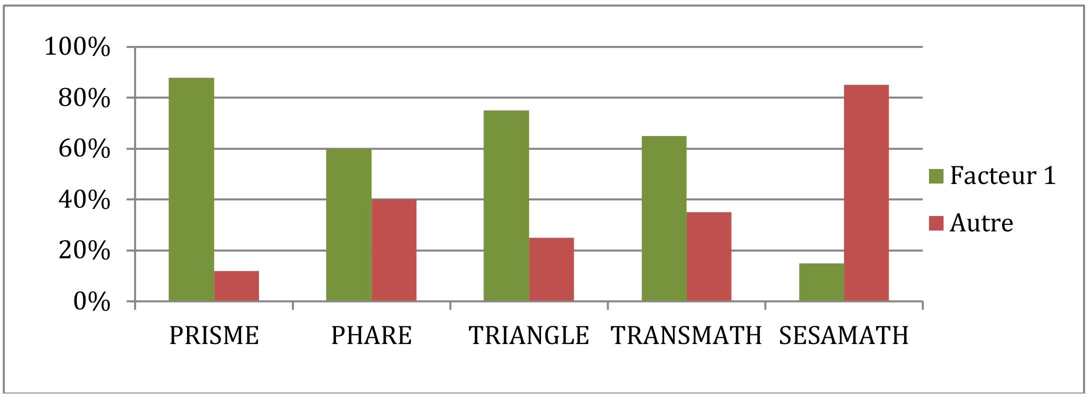


Figure 12 : Comparaison relative des places des spécimens de calcul engageant avec la distributivité, un facteur égal à 1 dans les produits partiels

Le fait que le manuel Sésamath soit le seul à proposer plus de spécimens engageant des décompositions additives sans terme égal à 1 *a priori*, est peut être surprenant compte tenu de la partie Activités centrant la grande majorité de ses tâches calculatoires sur ce cas. Nous y voyons là un effet : celui d'unifier des pratiques d'un point de vue formel, avec le même usage de la distributivité en acte. Bien sûr le fait que ces calculs apparaissent dans le chapitre correspondant à cette propriété laisse penser qu'elle pourra faire partie des organisations de savoir, mais le travail pour ce faire n'est pas organisé par le manuel, laissant à la charge de l'élève d'en percevoir les implicites.
Cette question se prolonge par celle plus générale des éléments mathématiques permettant de valider ou d'invalider les techniques de calcul numérique comme algébrique évoqués par les enseignants interrogés.

3. Côté enseignant : comment justifier ?

Nous leur avons demandé comment ils envisageraient de répondre à un élève de 5^{e}, Valentin, qui demande pourquoi pour calculer $12 \times 13 + 12 \times 7$ on ne fait pas $12 + 12 = 24$ et 24×20.
Les cinq enseignants interrogés sont surpris par cette question, certains doutant de l'existence même d'un tel élève. Valentin est bien un élève réel et sa question apparaît à l'occasion d'un épisode de calcul mental proposé par son professeur après l'étude de la propriété de distributivité dans le cadre numérique. Elle déstabilise tellement les enseignants interrogés que produire une explication à brûle pourpoint n'est pas chose aisée.
Sandra est la seule enseignante parmi les cinq interrogés à évoquer l'addition itérée :

> « 12 fois 13 c'est 13 plus 13 plus … 12 fois […] et 12 heu, non je m'y prends mal, non c'est 12 plus 12 plus 12 plus … 13 fois, puis 7 fois 12, 12 plus 12, 7 fois donc après ça fait vingt 12 »

L'oralisation tout d'abord inversée amène de plus à supposer que la présence de cette propriété pour justifier ou valider les calculs dans les classes soit fortement dépendante des pratiques enseignantes.

Jérôme et Benjamin quant à eux, proposent d'exécuter chacun des programmes de calcul à la calculatrice et de conclure à l'inadéquation de la technique proposée en observant des résultats différents. Jérôme propose de plus de travailler sur des identifications d'éléments liés aux écritures des expressions, en s'appuyant sur la formule $k(a+b)=ka+kb$ [7]:

> « le nombre qui revient, ils vont me dire 12, après je sais pas si c'est bien à faire je leur dis ben la formule, vous mettez le 12 d'abord parce que c'est le nombre qui revient […] vous ouvrez votre parenthèse après qu'est-ce qu'il y a, je leur dis toujours qu'est-ce qui est collé à 12 ? Donc ils vont me dire 13, après vous continuez votre lecture, il faut pas oublier le signe donc plus, ben après qu'est-ce qu'il y a ? 7 et voilà. »

De nombreuses autres recherches observent des discours formels similaires dans les classes (Lenfant-Corblin (2002) ou Abou-Raad & Mercier (2009) par exemple). Il serait faux de penser que cet enseignant en est satisfait, d'autant qu'il le considère comme second par rapport à l'effectuation des calculs pour vérifier l'équivalence. Mais comment parler des formalismes, c'est-à-dire des ostensifs qui donnent aussi des moyens de contrôle des écritures des expressions, et des équivalences ? Son incertitude peut s'expliquer par le fait qu'il n'exerce que depuis 3 ans, dont 2 ans en collège, c'est toutefois la seule occasion de l'entretien où il l'exprime. Ceci interroge de notre point de vue la construction d'un discours légitime portant sur les aspects syntaxiques des écritures, autrement dit d'un discours qui articule le travail sur les formalismes et les propriétés qui le permettent, sans rigidifier la pratique ou conduire à des extensions abusives fondées sur des éléments des expressions peu pertinents.

La question du discours à même de justifier les techniques de calcul se prolonge dans le cadre algébrique.

4. Côté enseignants : comment généraliser ?

Jérôme aborde ainsi des difficultés d'élèves qu'il identifie à propos de la factorisation en 3e :

> Jérôme : « pour factoriser ils ont beaucoup de mal, si tu veux, si t'as $x+1$ facteur de $x+2$ plus $x+1$ facteur de $x+3$, ils ont du mal à voir que ça c'est le même nombre (*il entoure x+1*) et qu'on peut utiliser la distributivité que c'est le *k* tu vois et que ça c'est le *a* et ça c'est le *b*.
>
> $(x+1)(x+8)+(x+1)(x+3)$
>
> C : et pourquoi à ton avis ?
>
> Jérôme : mais je pense que ça vient vraiment de la représentation, que pour eux, c'est pas un nombre, c'est pas comme avec 2 fois 3 comme ils faisaient au début.

Cet enseignant interroge d'une certaine manière la transparence de l'interprétation des expressions au regard de la construction de la propriété de la distributivité dans le domaine numérique et de son formalisme qui y renvoie. Comment étendre l'usage de $k(a+b)=ka+kb$ au cas où k, a, et b désignent d'autres objets, dont les expressions relèvent d'écritures de nombres ? ou de programmes de calcul ?

Benjamin tente de faciliter les reconnaissances de forme en écrivant au tableau la formule à utiliser sous l'expression à développer ou à factoriser :

> Benjamin : C'est encore plus utile de savoir transformer une écriture en une autre écriture, en ayant l'identité en dessous, et en voyant à quoi correspond chaque lettre.

[7] Une autre enseignante interrogée, Nadine, proposera aussi des arguments liés aux écritures en évoquant les opérations en jeu, puis les priorités opératoires.

C : d'accord, mais alors comment tu fais si tu as $3a + 5a + 2a$?
Benjamin : Ha ben ouais, ça c'est un cas que je vois rarement, en 5e ça arrive des fois, mais c'est vrai que en général en 5e je reste sur ça quoi »

Ceci amène à faire l'hypothèse d'auto-censures possibles chez les enseignants pour éviter des adaptations à des sommes de plus de trois termes par exemple.
Comment dès lors articuler l'usage des formalismes algébriques et une certaine souplesse d'utilisation de la théorie dont on dispose pour la mise en œuvre des techniques de calcul ?
Sans apporter de réponse définitive aux questions soulevées ici, l'ingénierie expérimentée que nous allons aborder dans la suite du texte permet d'entrevoir des effets potentiels d'un enseignement prenant en compte les enjeux FUG, et dévoilant en partie la co-construction entre système de nombres et techniques de calcul. Elle se situe au moment de l'introduction de la propriété de distributivité. Elle a été expérimentée en 2013 en 5e, niveau auquel les programmes alors en vigueur demandaient d'introduire cette propriété, dans une classe ordinaire d'un collège non classé.
Nous revenons dans un premier temps sur quelques éléments d'analyse d'extraits de manuels permettant d'approcher des points d'appui et des contraintes héritées des techniques de calcul anciennes de primaire afin d'expliciter une partie des choix effectués pour l'élaboration de l'ingénierie.

Une ingénierie didactique

1. Spécificités de l'utilisation implicite de la propriété de distributivité dans les connaissances anciennes

Des occasions d'emploi de la propriété en acte peuvent exister en calcul mental à l'école primaire, tout comme en 6e et en 5e. Ainsi en témoigne l'étude de manuels faite dans le cadre de notre recherche, dont on retrouve des extraits similaires dans les manuels récents correspondant aux nouveaux programmes :

2 Calcule mentalement.
a. 25×11 c. 25×12 e. 25×21
b. 25×19 d. 25×9 f. 25×101
Explique comment tu as trouvé les réponses.

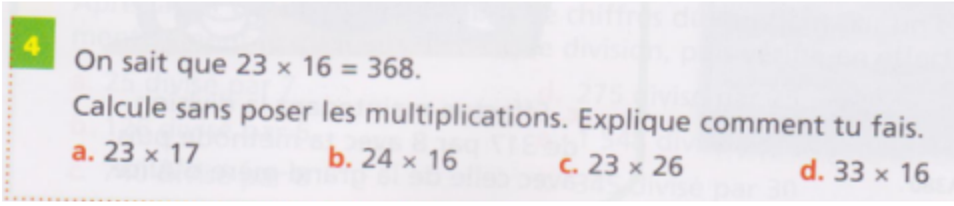
Figure 13 : Cap Maths CM2 (2017) p. 16

Par exemple, pour calculer 25×12 l'une des techniques possibles consiste à multiplier 25 par 10 puis par 2 et à ajouter les résultats obtenus. Dans l'extrait de manuel de 5e suivant, l'on observe des occasions d'utiliser la propriété de distributivité par rapport à l'addition (pour le a. et le b.) et par rapport à la soustraction (le c.).

20 Calculer mentalement.
a. 24×12 b. 13×32 c. 15×18

Figure 14 : Transmath 5e (2016) p. 38

La distributivité peut être à gauche ou à droite selon les facteurs à décomposer *a priori*.



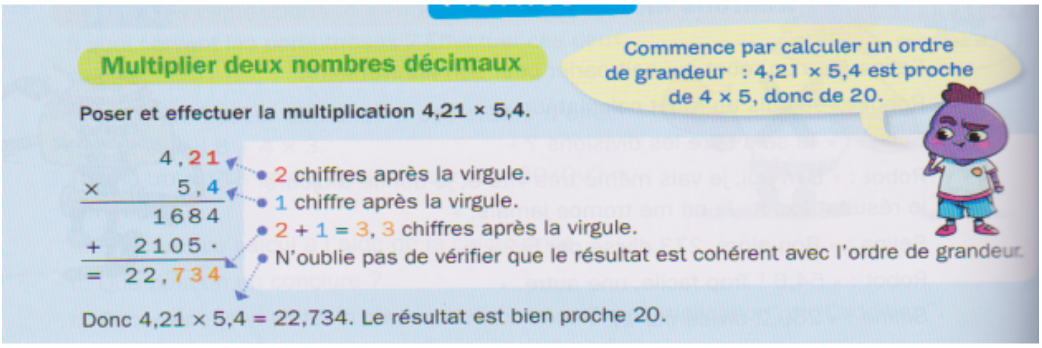
4 On sait que 23 × 16 = 368.

Calcule sans poser les multiplications. Explique comment tu fais.

a. 23 × 17   b. 24 × 16   c. 23 × 26   d. 33 × 16

Figure 15 : Euro Math CM2 (2009) p. 56

On peut supposer que les calculs c. et d. reposent sur les égalités suivantes : $23 \times 26 = 23 \times 16 + 23 \times 10$ et $33 \times 16 = 23 \times 16 + 10 \times 16$.
Les décompositions peuvent concerner des sommes de plus de deux termes, en calcul posé par exemple, lorsque les facteurs sont des nombres à trois chiffres (non nuls) comme nous l'avons vu dans la première partie de ce texte (*cf.* figure 4).
Ces manuels donnent à voir une diversité potentielle des formes de la propriété de distributivité employée. Cette diversité peut être un levier pour construire une certaine souplesse d'utilisation de la propriété à condition de s'emparer de ces diverses formes de savoir dans les connaissances anciennes.
Par ailleurs, lorsqu'elle est mise à l'étude, la distributivité anciennement utilisée en acte peut être oubliée ou masquée par des éléments liés à la numération décimale de position, en particulier pour le calcul posé :



Multiplier deux nombres décimaux

Commence par calculer un ordre de grandeur : 4,21 × 5,4 est proche de 4 × 5, donc de 20.

Poser et effectuer la multiplication 4,21 × 5,4.

```
     4,21   • 2 chiffres après la virgule.
 ×    5,4   • 1 chiffre après la virgule.
     1684
 +  2105·   • 2 + 1 = 3, 3 chiffres après la virgule.
 =  22,734  • N'oublie pas de vérifier que le résultat est cohérent avec l'ordre de grandeur.
```

Donc 4,21 × 5,4 = 22,734. Le résultat est bien proche 20.

Figure 16 : Dimensions 6e (2016) p. 42

Dans ce manuel de 6e, comme dans les manuels correspondant aux programmes de 2008, le discours se centre sur le placement de la virgule. Cette insistance à ce niveau d'étude, en fin du cycle 3 actuel, sur les éléments liés à la numération décimale de position est très normalement guidée par les éléments nouveaux qui concernent la multiplication de deux nombres décimaux, et non plus seulement d'un décimal par un entier.
En outre, dans les techniques de calcul mental, l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition peut se révéler n'être que l'une des propriétés des nombres et des opérations utilisées en acte. Ainsi, le document ressources intitulé *Le nombre au cycle 3*, *Apprentissages numériques*, propose-t-il une exemplification dans ce sens pour calculer 48×250 :

- décomposition additive canonique de 250[8] :
  48 × 250 = 48 × 200 + 48 × 50 = 48 × 2 × 100 + 48 × 5 × 10 = 96 × 100 + 240 × 10
  48 × 250 = 9 600 + 2 400 = 12 000
  ou
  48 × 250 = 48 × 200 + 48 × 50 = 48 × 2 × 100 + 48 × 100 ÷ 2 = 96 × 100 + 4 800 ÷ 2
  48 × 250 = 9 600 + 2 400 = 12 000
  Etc.

Figure 17 : Calcul et conceptualisation (Butlen et Masselot) p. 38 (Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, Collection « Ressources pour faire la classe » MEN-CNDP, 2012)

La première étape témoigne d'une utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, avec une décomposition implicite du facteur 250 écrit à droite en 200 + 50. L'égalité suivante engage une décomposition des nombres 200 et 50 en produits de puissances de dix, soit 2×100 et 5×10 ici, pour ensuite utiliser l'associativité de la multiplication afin d'effectuer les produits des facteurs autres que les puissances de 10 en premier, c'est-à-dire 48×2 et 48×5. Ceci permet de retarder ces derniers produits dont l'effectuation repose sur des propriétés de l'écriture décimale de position. Dans un même temps, on peut questionner les techniques pour calculer les produits 48×2 et 48×5. Selon les habiletés de chacun, et par là le caractère éventuellement problématique de l'exécution, ces calculs vont pouvoir s'exprimer dans la technique globale. Ainsi, pour la tâche consistant à calculer 48×250, les éléments composant à la fois la technique de calcul et la technologie implicitement à l'œuvre peuvent être multiples. Il n'y a rien là de surprenant, dans le sens où ces techniques sont en construction au cycle 3.

Ce fait n'est pas systématique, on trouve bien sûr dans les manuels des occasions d'emploi plus isolées de la distributivité en calcul mental comme nous avons pu le voir précédemment.

Cependant, il semble que pour pouvoir se saisir des techniques de calcul anciennes pour faire émerger la propriété de distributivité, celle-ci doit pouvoir être réactivée, et isolée dans les techniques. Du moins doit-on pouvoir mettre l'accent dans les techniques sur cette étape, ce qui suppose de choisir des nombres pour le calcul mental qui évitent que l'on ait besoin d'expliciter dans la technique des étapes supplémentaires permettant de calculer des produits partiels. De même pour le calcul posé, si l'on veut exhiber la distributivité implicitement à l'œuvre, il faudra « débarrasser » les descriptions de techniques (ou les reformuler) pour s'affranchir des éléments liés à la numération décimale de position.

2. Expérimentation

L'ingénierie expérimentée se structure autour de quatre situations que nous allons décrire succinctement dans un premier temps. La première consiste à faire calculer mentalement puis en posant le résultat de produits donnés comme 12×203 pour le calcul mental ou 136×235 pour le calcul posé. Dans une deuxième situation, les élèves sont invités à produire des égalités en appui sur les retranscriptions des descriptions orales de techniques de calcul mental issues de la situation précédentes, ainsi que sur les traces écrites des opérations posées. Les égalités visées sont par exemple $17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$.

La situation suivante est une situation de formulation. A partir d'un certain nombre d'égalités produites par les élèves, il s'agit d'exhiber une « chose commune », puis d'institutionnaliser la propriété de distributivité sous la forme d'un théorème dans une dernière situation.

Nous allons revenir plus précisément sur cette description rapide afin de présenter un certain nombre de résultats issus de l'expérimentation menée.

a. Situation de calculs : des obstacles à lever dans les descriptions

Les calculs donnés à effectuer mentalement sont les suivants :

Série 1	Série 2	Série 3	Série 4
7 × 32	17 × 12	13 × 102	35 × 98
46 × 3	68 × 11	15 × 104	23 × 97
512 × 3	43 × 21	12 × 203	25 × 19

		62 × 1001	41 × 199

Figure 18 : listes des multiplications données à calculer mentalement

Pour chaque série, les calculs sont écrits au tableau et les élèves écrivent les résultats sur leur cahier. Ils sont ensuite interrogés pour corriger et décrire leur technique de calcul. Les descriptions qui émergent sont par exemple *« 12 fois 200 plus 12 fois 3 ça fait 36 »* pour 12×203 ou *« 2 fois 3, 6, 10 fois 3, 30, et 500 fois 3, 1 500 et on additionne les résultats »* pour 512×3.

L'un des rôles de cette situation consiste à faire émerger des descriptions qui s'appuient sur les nombres plutôt que sur les chiffres. Pour les élèves qui « posent mentalement », la réinterprétation des juxtapositions de chiffres comme addition de nombres posent des difficultés qui ne sont pas négligeables. Un épisode de correction les fait apparaître dans la classe où se déroule l'expérimentation :

> Enz : J'ai fait 7 fois 2, j'ai mis en haut pour retenir la dizaine, j'ai fait 7 fois 3, 21, plus 1, 22 et j'ai pas ajouté, 22 à 4, j'ai mis à côté
> P : ah mais non, parce que c'est pas 22
> Enz : j'ai pris 1 à 14, j'ai ajouté 1 à 21 et 22 je l'ai posé devant, là
> […]
> P : mais 22 et 4 ça fait 26
> Art : non mais heu c'est pour l'addition
> Yan : mais toi t'as posé

La manipulation des chiffres ne se traduit pas directement par l'addition, en particulier en raison de l'opération sur l'écriture consistant à isoler le chiffre des dizaines. Enz ne parvient pas à faire le lien avec les opérations effectuées sur les nombres, « j'ai pas ajouté » dit-il, « j'ai mis à côté ». La routinisation de l'algorithme de multiplication et l'usage de la position sont de nature à masquer à la fois le produit partiel de 30 par 7 (car on effectue mentalement 7×3 + 1), et l'addition de 210 et de 14. La concaténation des écritures est celle de 22 et 4, qui ne correspond pas à la même somme, mais plutôt à l'addition de 220 et 4, ce qui éloigne encore de la distributivité. Plus encore, la somme ne porte que sur un seul chiffre, tout comme le produit ce qui peut gêner la mise à jour des nombres en jeu et de la distributivité. Les obstacles à lever pour passer d'une description de technique fondée sur les chiffres à une description en termes d'opérations sur des nombres vont être d'autant plus importants en calcul posé. La technique de calcul s'appuie alors sur les propriétés de la numération décimale de position. Le jeu sur les retenues et le placement des chiffres de droite à gauche permet de s'affranchir de la valeur des chiffres et des conversions entre unités de numération qui s'opèrent silencieusement. La valeur des chiffres se retrouve après coup lors de la lecture des résultats. Comment dès lors réactiver le passage d'une description de technique fondée sur les chiffres à une description en termes d'opérations sur des nombres (comme entrevu à la figure 17 par exemple) ? L'ingénierie élaborée va l'organiser en deux temps, tout d'abord à l'occasion de la vérification des résultats des multiplications posées, puis lors de la situation de production d'égalités.

Les calculs donnés à poser sont les suivants :

43 × 12	534 ×22	57 × 403	435 × 374	56 × 5485
67 × 14	86 × 34	738 × 204	136 × 235	5485 × 56
58 × 16	1374 × 58	38 × 309	472 × 316	
	248 × 67	425 × 506		

Figure 19 : listes des multiplications données à poser

Les élèves sont par deux, et doivent vérifier à la calculatrice à la fois le résultat et les résultats intermédiaires. Cette vérification a pour but de faire émerger une première réinterprétation possible des écritures de chaque ligne comme produit de deux nombres. Elle est bien entendu insuffisante : d'une part si le résultat est juste la vérification des produits partiels est inutile, et d'autre part, il est possible de vérifier chaque ligne en effectuant les calculs pour chaque chiffre. La situation de production d'égalités joue un rôle plus important de ce point de vue.

b. Situation de production d'égalités : vers une nouvelle interprétation du signe =

L'enjeu de cette situation est celui de la construction d'un ensemble d'égalités formalisant les techniques de calcul fondées sur l'utilisation implicite de la distributivité qui ont été mises en œuvre lors de la situation précédente. Les élèves, par groupe de quatre, sont invités à produire un certain nombre d'égalités. Pour ce faire, les élèves disposent des retranscriptions de leurs descriptions rhétoriques pour les techniques de calcul mental, et des reproductions des multiplications posées à l'instar de la fiche suivante :

7 × 32	*J'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j'ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j'ai additionné 210 et 14.*
12 × 203	*12 fois 200 plus 12 fois 3 ça fait 36.*
58 × 16	58 × 16 348 + 580
248 × 67	248 ×. 67 1736 14880

Figure 20 : Support écrit d'un groupe

Les résultats sont effacés car leur recherche n'est plus un enjeu. La consigne le spécifie, et précise que l'égalité attendue ne doit pas montrer de résultat, y compris de résultat intermédiaire, il s'agit d'*« écrire des égalités montrant les procédés de calcul »*. La consigne impose ainsi un formalisme nouveau pour décrire les techniques anciennes de calcul, qui s'accompagne d'une rupture de contrat par rapport à l'utilisation du signe = essentiellement employé en primaire comme annonce de résultat. Lors de l'expérimentation, la dévolution a bien lieu, les élèves s'emparent de cette rupture de contrat qui se trouve au cœur des discussions :

Flo : on écrit 43 fois 2
Gre : est égal à 86
[…]
Flo : mais faut pas marquer les résultats, tu mets 43 fois 2 … plus
Gre : pourquoi tu mets plus
Séb : faut marquer le résultat
Flo : mais non
Gre : mais si
Flo : écoutez : 43 fois 2 plus… […]… 43 fois 2 plus 43 fois 10 est égal et tu mets le résultat
Wil : non non

Les résistances sont importantes, Flo refuse d'écrire les résultats intermédiaires mais veut marquer le résultat après le signe =. L'écriture d'une égalité pour décrire sous un formalisme particulier les techniques de calcul est difficile. Les identifications des produits partiels sont le premier enjeu des discussions, et se heurtent aux obstacles liés à la numération décimale de position (multiplie-t-on par 5 ou par 50 ?) et à l'écriture en ligne d'un enchaînement d'opérations. Après avoir écrit le membre de gauche, ne sachant pas quoi écrire à droite du signe =, le groupe abandonne ce cas pour passer au suivant. On voit à quel point la consigne est forte. Le professeur intervient par la suite auprès de ce groupe en rappelant qu'il faut aussi un membre de droite pour écrire une égalité. Cependant, les résistances demeurent et l'écriture du produit à droite apparaît au moment de la contrainte du passage au tableau.
Comme l'analyse *a priori* le prévoyait, les premières écritures contiennent des résultats intermédiaires ou des écritures du produit donné à effectuer à l'instar des égalités suivantes :

$$7 \times 30 + 7 \times 2 = 7 \times 32$$

$$62 \times 1000 + 62 \times 1 = 62000 + 62$$

Figure 21 : Exemples d'égalités proposées par les groupes lors de la première phase de travail

De fait les écritures attestent que la rupture de contrat est levée, et c'est l'un des enjeux majeurs de cette situation : accepter des écritures d'égalités avec des opérations de chaque côté du signe =, ce qui prépare l'interprétation des égalités produites comme relations d'équivalence.
L'intervention du professeur est cependant nécessaire pour amener à élaborer une égalité montrant la décomposition de l'un des facteurs, faisant le lien entre les deux programmes de calcul ainsi écrits. Un élève de chaque groupe est envoyé au tableau pour écrire l'une des égalités qu'il a produites. Les égalités sont examinées collectivement en vérifiant leur validité par calcul des résultats de chaque membre, puis leur adéquation au regard de la consigne donnée. En appui sur l'égalité $134 \times 22 = 134 \times 20 + 134 \times 2$ écrite au tableau par l'un des groupes, le professeur propose alors d'expliciter le lien entre 22 et 20 et 2, ce qui permet de faire émerger la décomposition de 22 en 20 + 2 dans l'écriture du membre de gauche.
Le tableau est ensuite effacé afin de limiter les analogies scripturales (et de ce point de vue, le fait que chaque groupe dispose de produits différents joue également un rôle) et les élèves sont renvoyés à leur tâche d'écriture.
L'un des principaux résultats de l'expérimentation conduite réside dans la diversité des écritures produites par les groupes en lien avec les choix des nombres en jeu dans les calculs donnés à effectuer lors de la première situation :

$$17 \times (10 + 2) = (17 \times 10) + (17 \times 2)$$

$$86 \times 4 + 86 \times 30 = 86 \times (30 + 4)$$

$$136 \times (200 + 30 + 5) = (136 \times 200) + (136 \times 30) + (136 \times 5)$$

Figure 22 : Exemples d'égalités proposées par les groupes à l'issue de la deuxième situation

Les égalités correspondent à la fois à des distributivités à gauche ou à droite, avec des sommes de deux ou trois termes. On observe des localisations géographiques souples des nombres comme par exemple 30 et 4 qui n'apparaissent pas dans le même ordre dans le membre de gauche et dans le membre de droite de la seconde égalité. A ce stade néanmoins, les écritures ne sont pas interprétées comme telles, il reste à construire un discours pour que la distributivité émerge comme une propriété unifiant et généralisant ces égalités. Un travail reste également à organiser pour que cette propriété joue un rôle de justification à la fois aux techniques de calcul anciennes, et à la production de nouvelles égalités. La flexibilité des écritures qui se créent dans cette situation prépare néanmoins de façon cruciale une unification qui puisse être fondée sur des indices mathématiquement pertinents des expressions que sont les facteurs ou les termes. Elle constitue un levier pour construire la propriété de distributivité dont les formalismes (rhétoriques et algébriques) puissent intégrer ces instanciations possibles et une certaine souplesse d'utilisation comme nous allons le voir.

c. Situation de formulation : vers des adaptations facilitées ?

La situation suivante est à la fois une situation de formulation et d'institutionnalisation première d'une propriété commune. Le travail se déroule à partir d'un certain nombre d'égalités produites par les groupes lors de la situation précédente, et photocopiées :

17 × (10 + 2) = 17 × 10 + 17 × 2

62 × (1 000 + 1) = 62 × 1 000 + 62 × 1

86 × (30 + 4) = 86 × 4 + 86 × 30

68 × (10 + 1) = (68 × 10) + 68 × 1

(500 + 34) × 22 = (500 × 22) + 34 × 22

Figure 23 : Egalités distribuées aux élèves pour la situation de formulation

Les élèves sont invités à décrire une « chose commune » à partir de ces égalités. A l'issue de cette description collective, il leur est demandé de mettre à l'épreuve le discours produit pour écrire de nouvelles égalités, avant que le professeur n'établisse une preuve à partir de l'addition itérée.
Comme le prévoyait l'analyse *a priori*, les élèves s'attachent tout d'abord à des reconnaissances brutes d'éléments tels que les parenthèses ou le signe =, le « nombre qui revient », ainsi que l'ordre dans l'écriture, ce dernier élément étant toutefois rapidement abandonné après évocation d'un élève du fait que « 500 n'est pas repris deux fois ». Ceci permet d'engager une discussion sur la manière de désigner de façon générale le « nombre qui est repris deux fois ». Les difficultés langagières sont importantes dans ce travail de généralisation, mais le jeu sur les variables didactique permet d'écarter les éléments non pertinents et de mettre l'accent sur les invariants des expressions qui sont ce qu'on appelle les fonctions syntaxiques des sous-expressions (facteur et termes dans chaque membre). Mais ce qui est d'autant plus difficile c'est qu'à gauche et à droite, les nombres n'ont pas la même fonction (termes ou facteurs).
La mémoire des situations antérieures joue cependant un rôle essentiel et permet de dépasser ces identifications premières pour accéder à des premières tentatives de formulation d'une technique de production d'égalité :

> Elo : A la première égalité en fait c'est pour avoir le chiffre heu qui multiplie, et ben en fait, c'est entre parenthèses le chiffre qui multiplie, que à la deuxième en fait il est décomposé en 2 fois ou heu en 10 fois …
> P : vous voyez ce dont parle Elo ?
> […]

Elo : ben par exemple 10 plus 2 c'est un peu la décomposition de 17 fois 10 et de 17 fois 2

L'intervention d'Elo va centrer la construction du discours sur la manipulation des écritures et la construction d'un lien entre le membre de droite et le membre de gauche d'une même égalité :

Chr : ben 10 plus 2 ça fait 12 alors on a décomposé
P : Heu, je crois qu'Elo essayer d'expliquer le 10 et le 2 non ?
Elo : oui, voilà […] en fait c'est les multiplicateurs, enfin c'est …
[…]
Elo : 17 c'est le facteur, ben en fait, c'est là en fait les deux ils sont par un et là en fait y'a deux fin ….
Mar : Ah j'ai compris
P : Tu as compris Mar ? Tu peux le dire autrement ?
Mar : En fait elle dit que le 10 plus 2 ça reprend le fois 10 et le fois 2.

La construction d'un discours demande du temps, des reprises, des décontextualisations et recontextualisations dont le rôle n'est pas négligeable : les recontextualisations permettent notamment de s'entendre sur ce dont on parle avant d'en trouver une manière adéquate de le désigner :

Elv : A chaque fois ça reprend le même chiffre
[…]
Dav : Oui puisque celle d'après c'est 62 qui est heu / c'est 62 qu'on reprend deux fois // après y'a le 86 / le 68 et …
Art : Ah ouais
P : alors qu'est-ce que c'est ? ce … On reprend deux fois oui ?
Dav : le facteur
P : est-ce qu'on peut améliorer cette phrase ? On reprend deux fois le facteur ? Mar ?
Mar : ben qui est pas additionné

La mémoire des situations précédentes joue à nouveau un rôle fondamental : elle permet une double interprétation des écritures. Mar parle de façon saisissante de « facteur qui est pas additionné ». L'ensemble des calculs donnés à effectuer lors de la première situation sert de référence forte et permet d'éviter la difficulté de reconnaissance d'un produit. La seconde situation permet de façon essentielle d'interpréter la somme comme un facteur, et comme une écriture de nombre.
La première formulation dans la classe est la suivante :

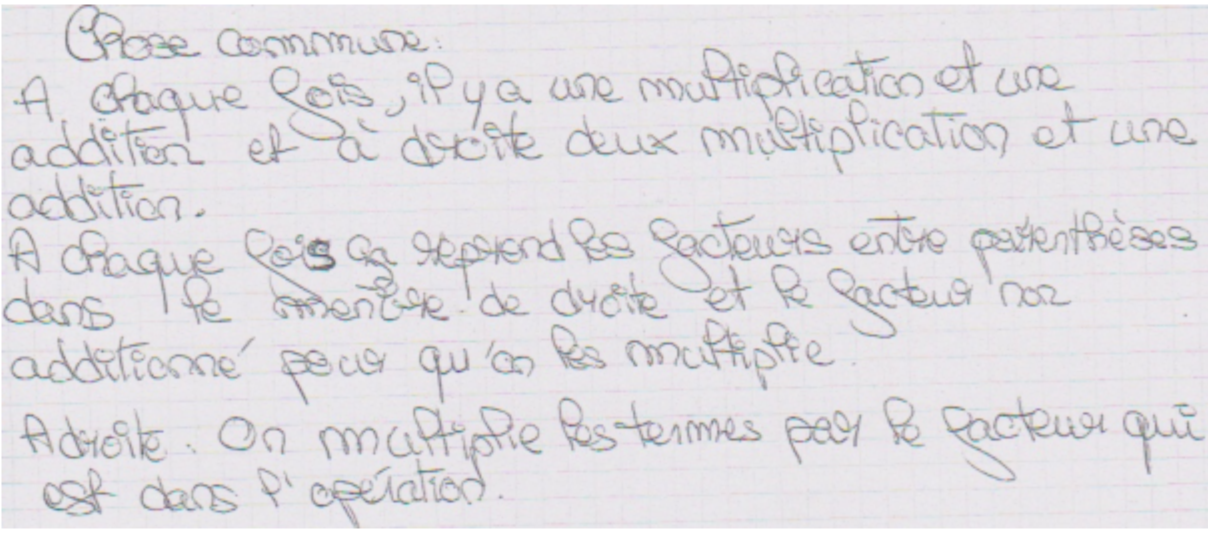

Chose commune:
A chaque fois, il y a une multiplication et une addition et à droite deux multiplication et une addition.
A chaque fois ça reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite et le facteur non additionné pour qu'on les multiplie.
A droite. On multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération.

Figure 24 : Extrait d'un cahier d'élève, permières formulations collective de « la chose commune »

Il est ensuite proposé aux élèves de « produire des égalités utilisant cette chose commune à partir de produits donnés » et de vérifier les égalités. Cette « chose commune » qui va se muer en propriété, a émergé à partir de traduction de techniques de calcul, il s'agit d'en éprouver la fonction productrice d'égalité :

Calcul : 15 x 103.
Égalité : (100+3) x 15 = 15 x 100 + 15 x 3.
Vérification : (100+3) x 15 = 1545.
15 x 100 + 15 x 3 = 1545

Figure 25 : Extrait d'un cahier d'élève

Cette étape est une amorce de mise en place de ce qui va finir par être formulé comme un théorème comme élément de justification de manipulation des écritures pour produire des égalités.
La question suivante posée à la classe et alors celle de la généralisation de ce mode de production d'égalité : puisqu'en manipulant ainsi les écritures, l'on parvient à produire des égalités (vérifiées en exécutant les programmes de calculs), peut-on le justifier et le généraliser ?

d. Situation d'institutionnalisation

A l'issue de la construction d'un premier discours unifiant les écritures, mais aussi leur mode de production, et les équivalences de programmes de calcul données à voir, la construction d'un environnement théorique pour les nombres entiers par l'addition itérée amène à une institutionnalisation sous trois formes : un formalisme algébrique et deux formalismes rhétoriques pour un même théorème généralisant l'équivalence de deux types de programmes de calculs :

387 X 13 = 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387
= (387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387) + (387 + 387 + 387)
On peut regrouper : c'est une addition on peut la faire dans n'import quel sens.
= 387 X 10 + 387 X 3

Théorème

Additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits.

Des calculs équivalents sont des calculs qui donnent le même résultat.

Le produit d'un facteur par une somme est égal à la somme des produits de ce facteur par chacun des termes.

En mathématique on utilise une écriture symbolique pour traduire et retenir ce théorème, on utilise des lettres pour désigner n'importe quel nombre.

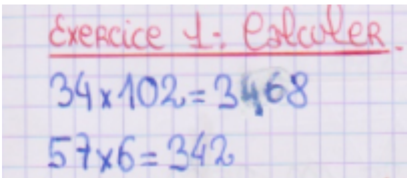
$\boxed{u \times (a + g) = u \times a + u \times g}$

Figure 26 : Extrait d’un cahier d’élève

L’introduction du formalisme algébrique se fait ici par celle d’une identité comme un autre formalisme associé aux précédents : une nouvelle extension de l’usage de l’égalité apparaît, avec la lettre comme nombre généralisé. Ces trois formalismes ont pour rôle de soutenir les différentes interprétations, tout en les généralisant, unifiant, celle des égalités produites : équivalence de programmes de calcul, résultante d’une manipulation des écritures et égalité d’expression algébrique (identité ici).

Cependant, le théorème ne s’est pas constitué comme élément de justification des techniques de calcul, si ce n’est par les premières égalités comme description de technique, il reste à le rendre opérant, c’est-à-dire à ce qu’il assure les fonctions de justification, de soutien aux adaptations et aux interprétations multiples.

De ce point de vue, les exercices de calcul suivant jouent un rôle important :



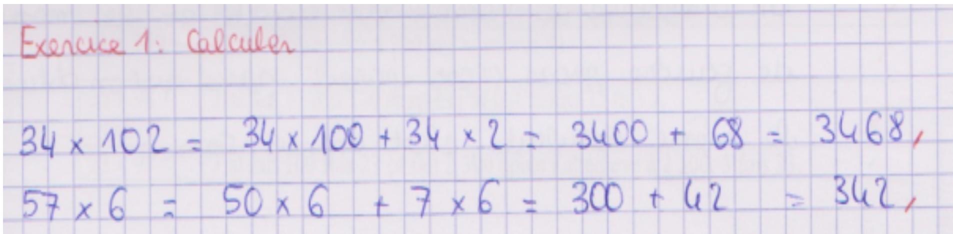


Figure 27 : extraits de deux cahiers d’élèves concernant l’exercice de calcul mental

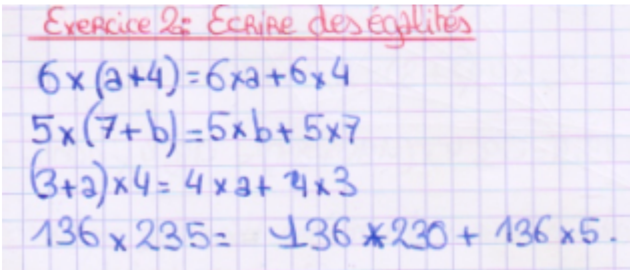
Il faut que le théorème serve à la fois à justifier les manipulations d’écritures (d’où le type de tâches de production d’égalité) et des techniques de calcul mental (anciennes).

Dans le premier exercice, il s’agit de calculer mentalement les produits donnés. Les élèves peuvent écrire directement le résultat, ou écrire des étapes intermédiaires. Lors de la correction, le professeur sollicite les élèves pour justifier les équivalences de programmes de calcul. L’épisode suivant correspond au calcul de 34×102 :

> Mat : parce que c’est la même chose qu’a fait Chr et c’est le théorème enfin en fait elle a décortiqué le nombre elle a fait 100 plus 2
> P : elle a fait 100 plus 2 et après ?
> Dav : de l’autre côté
> Mat : 100 et 2 ça fait 102 donc heu 34 fois 100 elle a trouvé le résultat après elle l’a ajouté à 34 fois 2 pour faire 100 plus 2 et elle a trouvé le résultat
> P : oui mais qu’est-ce qui vous assure que là, ça ce calcul là il est bien égal à celui là ? Chl ?
> Chl : c’est le théorème qui le dit

Dans la technique de calcul mental, le théorème assure une double fonction. Il justifie l’équivalence implicitement employée, l’intervention de Chl en s’exclamant « c’est le théorème qui le dit » montre que la distributivité assure son rôle de validation de ce point de vue. Mais il sert aussi aux manipulations, et c’est le sens de l’intervention de Mat qui décrit des gestes de transformation d’écritures.

L’exercice suivant a pour rôle d’insérer le théorème comme élément de justification dans l’utilisation et la mise en œuvre de manipulations d’écriture : la consigne et de nouveau les interventions de l’enseignant l’y conduisent, à la fois sur des expressions algébriques et numériques :



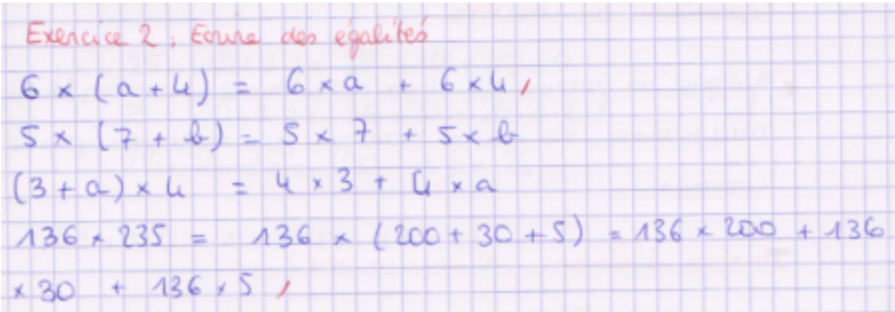


Figure 28 : extraits de deux cahiers d'élèves concernant l'exercice d'écriture d'égalités en employant le théorème

Les développements effectués correspondent à des égalités générales de programmes de calcul qui sont à interpréter comme des instanciations partielles du théorème.

On observe la souplesse d'utilisation avec des localisations géographiques des termes et des facteurs, permise par la forme rhétorique par rapport à la forme algébrique, qui laisse à penser que les identifications des éléments pertinents des expressions sont bien à l'œuvre dans les techniques de production d'égalité.

Une adaptation à une somme de trois termes apparaît pour la dernière égalité à l'occasion de la correction.

La dernière correction voit trois réponses possibles apparaître au tableau selon les propositions de trois élèves :

$136 \times 235 = 136 \times 230 + 136 \times 5$
$136 \times 235 = 136 \times 200 + 136 \times 35$
$136 \times 235 = 136 \times 200 + 136 \times 30 + 136 \times 5$

Le théorème unifie de ce point de vue deux techniques différentes correspondant à deux écritures différentes d'égalités reposant sur deux sommes différentes. La décomposition apparaît donc non unique. Mais ce qui occupera véritablement la classe est la question du nombre de termes. Nous avons vu plus haut que le théorème comme les écritures, compte tenu aussi du support écrit de la séance 3, réfère plus ou moins implicitement à des sommes de deux termes. C'est là la question qui émerge :

Murmures : pourquoi y'en a trois
P : ha pourquoi y'en a trois ?
Mau : pour moi y'en a deux non ?
P : normalement y'en a deux ? qu'est-ce qu'il dit le théorème ?
Elv : on est pas obligé de faire deux
P : ha il dit qu'on est pas obligé de faire deux / qu'est-ce qu'il dit ? Cl ?
Chl : il dit additionner puis multiplier
P : additionner puis multiplier / est-ce que on a bien une addition donc à gauche, elle est pas écrite, mais qui correspond à celle là qu'est-ce que c'est l'addition ? qu'est-ce que c'est l'addition qui est pas écrite ? (écrit sous la dictée d'un élève) 200 plus 30 plus 5 et qui serait multiplié par combien ?
Classe : 136

P : 136 / c'est le facteur commun / et est-ce que ça revient bien à multiplier à chaque fois par le facteur
Classe : oui
P : par chacun des termes ? avant d'additionner ?
Classe : oui
P : c'est bien ce que dit le théorème / le théorème ne dit pas qu'on est obligé d'en avoir deux / c'est pas vrai.

On voit donc ici Mau interpréter une généralité et Chl retourner à une formulation plus complète du théorème. Il y a pourtant un glissement, car en réalité, si la deuxième formulation construite avec la classe n'évoque pas deux termes, la première, si. Le professeur modifie quelque peu le discours réellement élaboré pour généraliser, or, il y a là certainement un moment technologique shunté qui aurait pu ne pas l'être, avec notamment, la vérification de l'équivalence par effectuation des programmes de calcul. On aurait pu aussi envisager de réitérer deux fois l'utilisation du théorème avec des égalités successives à deux termes. Le questionnement suivant aurait aussi pu à la fois poser de nouveau l'extension de la théorie, et aussi de celle des formalismes et en particulier de l'écriture algébrique.
Ce moment n'en réalise pas moins une généralisation du théorème, tant dans sa formulation que dans son domaine de validité, amenant ainsi à désamorcer ce que pourrait rigidifier dans les techniques, le formalisme de l'écriture algébrique ou les effets de contrats que pourraient induire la majorité des spécimens rencontrés où n'apparaissent que deux termes.
On peut noter une certaine souplesse des écritures qui persiste : le facteur 4 n'est par exemple pas localisé géographiquement. Cette flexibilité va se retrouver lors de l'évaluation de fin de séquence qui a lieu près d'un mois après l'expérimentation. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition aura alors été abordée. Ainsi en témoigne l'extrait de copie suivante :

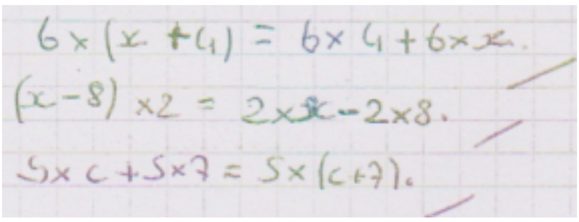


Figure 29 : Extrait d'une copie d'élève concernant le développement et la factorisation

L'exercice consiste à compléter des égalités en utilisant la distributivité, le premier membre étant une expression algébrique donnée, x, et c étant des nombres indéterminés :

$6 \times (x + 4) =$
$(x - 8) \times 2 =$
$5 \times c + 5 \times 7 =$

La grande majorité des 21 élèves dont nous avons recueilli les copies[8] ont réussi à effectuer les développements et factorisations. Parmi les 15 élèves qui réussissent la deuxième égalité, 6 utilisent des écritures non localisées géographiquement à un moment ou à un autre, tandis que les autres ont en quelque sorte, normalisé leur écriture. Ceci nous permet de supposer que pour ces 6 élèves au moins, la flexibilité des écritures soit contrôlée ainsi que le donne à voir a figure 30.

[8] Nous ne disposons de l'autorisation de recueillir les écrits que pour 24 élèves sur 28, et il manque 3 copies à notre corpus de données.

On observe de plus des justifications d’égalités multiples convoquant à la fois l’équivalence des programmes de calcul ou les manipulations des écritures fondées par la propriété de distributivité.
Le troisième exercice de l’évaluation donne pour consigne de déterminer si les égalités sont vraies ou fausses, et de justifier. Les égalités proposées sont les suivantes :

$$13 \times 105 = 13 \times 98 + 13 \times 2 + 13 \times 5$$
$$5 \times b + 10 = 5 \times (b + 2)$$
$$a \times 3 + a \times 2 = 5 \times a \times a$$

Pour la première égalité par exemple, l’on observe ainsi des traces s’appuyant sur un développement soutenu par l’exécution des programmes de calcul et l’équivalence alors justifiée doublement :

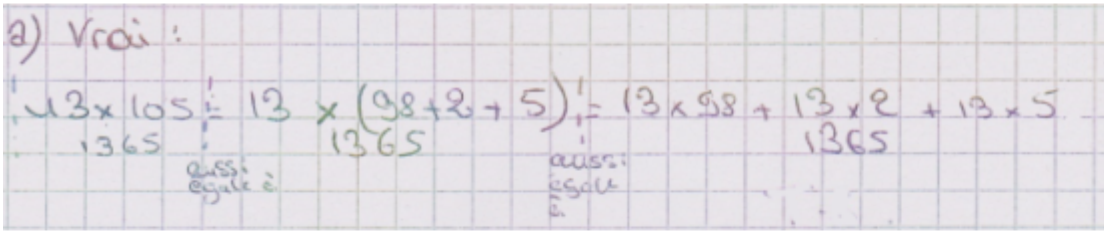


Figure 30 : extrait d’une copie d’élève à propos d’une justification d’égalité

Conclusion

L’ingénierie élaborée ne prétend pas répondre entièrement aux questions soulevées tout au long de ce texte. Il semble néanmoins au vu des analyses de manuels récents comme plus anciens, que l’on puisse faire l’hypothèse que « l’incontournable dialectique » dont parlait Chevallard entre construction de systèmes de nombres et construction de techniques de calcul numérico-algébrique ne vive que peu dans les classes. Ceci nous amène à envisager un travail sur l’organisation possible des savoirs afférents autour d’enjeux formalisateur, unificateur et généralisateur comme une piste à explorer pour la formation.
L’ingénierie que nous avons élaborée et expérimentée ne prétend pas se constituer comme un exemple à reproduire en l’état. Les difficultés langagières sont importantes, et les interventions didactiques du professeur prévisibles, apparaissent avec toutes leurs maladresses dans la classe où l’expérimentation a lieu. Elèves et professeur élaborent pourtant un discours robuste dans un véritable effort collectif. La mémoire de la situation de référence bâtie autour de calculs de produits, ainsi que celle de la situation de production d’égalités, jouent un rôle déterminant pour permettre des interprétations multiples des égalités et des expressions mises à l’étude, et une évolution des discours en construction. Ces discours prennent du temps, et nécessitent de nombreuses reprises faites de décontextualisations et de recontextualisations.
Cette expérimentation montre cependant qu’il est possible que les élèves construisent et se saisissent d’un discours sur les aspects syntaxiques pertinents des expressions, tout en l’articulant avec les propriétés mathématiques soutenant les techniques de calcul, au moment de l’introduction de la propriété de distributivité. Elle montre aussi comment se saisir de connaissances anciennes au travers des contraintes mais aussi des points d’appui issus des spécificités qu’elles arborent.

Bibliographie

Assude T., Coppé S. et Pressiat A. (2012). Tendances de l’enseignement de l’algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série*, 35-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Abou-Raad N. et Mercier A. (2009). Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(2), 155-288.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 43-72.

Constantin C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au college ?* (thèse de doctorat, Aix-Marseille Université).

Lenfant-Corblin (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires* (thèse de doctorat, Université Paris 7).

Mok I.A.C. (2010). Students' algebra sense via their understanding of the distributive law. Pedagogies : an international journal, 5(3), 251-263.

Robert A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, Recherche en didactique des mathématiques, 18(2), 139-190.

Les manuels

Agnel S., Amadei Giuseppi D., Blazquez N., Florian F., Grech J.-Y. et Sibari H. (2016). Maths 6e cycle 3, Editions Hatier.

Barnet C., Berger H., Billa N., Demoulin P., Flous A., Lafargue B., ...Villattes A. (2016). Mission indigo Maths Cycle 4, 5e Editions Hachette.

Barnet C., Berger H., Billa N., Demoulin P., Flous A., Lafargue B., ...Villattes A. (2016). Mission indigo Maths Cycle 4, 4e Editions Hachette.

Barnet C., Berger H., Billa N., Demoulin P., Flous A., Lafargue B., ...Villattes A. (2016). Mission indigo Maths Cycle 4, 3e Editions Hachette.

Boullis M., Cambon M., Danard Y., Gallien V., Herrmann E., Meyer I., …Percot S. (2016). Maths 5e cycle 4, collection Myriade, Editions Bordas.

Boullis M., Cambon M., Danard Y., Gallien V., Herrmann E., Meyer I., …Percot S. (2016). Maths 4e cycle 4, collection Myriade, Editions Bordas.

Boullis M., Cambon M., Danard Y., Gallien V., Herrmann E., Meyer I., …Percot S. (2016). Maths 3e cycle 4, collection Myriade, Editions Bordas.

Bourgeat F., Carlod V., Jacquemoud D., Keller A., Maze M., Plantiveau A., …Verdier F. (2014). 5e Collection Transmath, Editions Nathan.

Brault R., Daro I., Ferrero C., Perbos-Raimbourg C., Telmon C. (2010). Mathématiques 5e Collection Phare, Editions Hachette.

Briand J., Ngono B., Pelitier M.-L., Vergnes D. (2009). Euromaths CM2, Editions Hatier.

Castioni L., Budon Dubarry H., Amiot Desfontaine M., Flament-Taillez S., Aboukrat Y. (2016). Maths Explicites CM2, Editions Hachette.

Lanata F., Adam J., Agache A., Barret O., Chabrier C., Charpentier R., …Simonet M. (2016) Maths monde Cycle 4, Editions Didier.

Malaval J., Courbon D., Carlod V., Fundakowski M., Maze M., Plantiveau A., …Wallon P. (2010). 5e Collection Transmath, Editions Nathan.

Malaval J., Chaput A., Carlod V., Fundakowski M., Maze M., Plantiveau A., …Wallon P. (2011). 4e Collection Transmath, Editions Nathan.

Malaval J., Carlod V., Estevens F., Fundakowski M., Keller A., Maze M., …Wallon P. (2012). 3e Collection Transmath, Editions Nathan.

Malaval J., Carlod V., Chrétien B., Desrousseaux P.-A., Jaquemoud D., Jorioz A., …Verdier F. (2016). 5e Collection Transmath, Editions Nathan.

Malaval J., Carlod V., Chrétien B., Desrousseaux P.-A., Jaquemoud D., Jorioz A., …Verdier F. (2016). 4e Collection Transmath, Editions Nathan.

Malaval J., Carlod V., Chrétien B., Desrousseaux P.-A., Jaquemoud D., Jorioz A., …Puigredo F., Verdier F. (2016). 3e Collection Transmath, Editions Nathan.

Chapiron G., Mante M., Mulet-Marquis R., Perotin C. (2010). Mathématiques 5e Collection Triangle, Editions Hatier.

Chapiron G., Jaffard M., Jaffard R., Mante M., Mulet-Marquis R., Perotin C. (2011). Mathématiques 4e Collection Triangle, Editions Hatier.

Charnay R, Anselmo B., Combier G., Dussuc M-P., Madier D. (2017). Manuel nombres et calculs problèmes CM2 Collection Cap Maths, Editions Hatier.

Gros P., Reale-Bruyat F., Frey-Tournier M.L. (2012). Outils pour les maths CE2, Editions Magnard.

Sésamath (2010). Le manuel Sesamath et ses compléments numériques 5e.

Sésamath (2011). Le manuel Sesamath et ses compléments numériques 5e.

Sésamath (2016). Le manuel de cycle 4.

Programmes et documents d'accompagnement

MEN (2006). Les nombres au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e, Direction Générale de l'enseignement scolaire.

MEN (2007). Le calcul numérique au collège, Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e, Direction Générale de l'enseignement scolaire.

MEN (2008). Programmes du collège : BO spécial n° 6 du 28 août 2008

MEN (2015), Programmes des cycles 3 et 4 : BO spécial n° 11 du 15 novembre 2015

MEN-CNDP (2012). Calcul et conceptualisation (Butlen et Masselot), Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, Collection « Ressources pour faire la classe ».